Abstract

In this thesis we investigate Schrödinger operators corresponding to N-particle quantum systems in dimension $d \geq 3$. First, we study the lower spectral threshold of the essential spectrum of the operator. We assume that it coincides with the half-line $[0, \infty)$ and we consider the case that the system is in a "critical state", i.e. where a negative eigenvalue of the operator is created as soon as an additional arbitrarily small part of the potential is added. In this case there is a solution of the Schrödinger equation corresponding to the spectral threshold zero, which is either an eigenvalue or a resonance of the operator. We are concerned with questions regarding the behaviour of such solutions at infinity and we provide estimates on their corresponding decay rates for a class of long- and short-range potentials. They depend on the underlying dimension, the number of quantum particles and their respective masses. Furthermore, we show that the obtained estimates are optimal by providing the concrete asymptotic behavior of the solutions in the case of short-range pair interactions.

Based on these results we then investigate the discrete spectrum of multi-particle Schrödinger operators with regard to the Efimov effect. In case of $d \geq 3$ and $N \geq 3$ or $d \geq 5$ and $N \geq 2$ the solutions described above are eigenfunctions corresponding to the eigenvalue zero. For such systems we prove by variational methods that the Schrödinger operator corresponding to the $(N+1)$-body system has only a finite number of negative eigenvalues. The case of three particles in dimension four is fundamentally different, because in this case the two-body subsystems can have zero-energy resonances. For this reason, we choose a different approach based on the method of the Faddeev equations to prove that the Efimov effect cannot exist for three-body systems in dimension four.

Zusammenfassung

In dieser Dissertation untersuchen wir Schrödingeroperatoren, die Systeme von N Quantenteilchen in Dimension $d \geq 3$ beschreiben. Zunächst beschäftigen wir uns mit der unteren Spektralkante des essentiellen Spektrums des Operators. Hierbei nehmen wir an, dass es mit der Halbgeraden $[0, \infty)$ zusammenfällt und betrachten den Fall, dass das System sich im "kritischen Zustand" befindet, d.h. bei dem der Operator stets einen negativen Eigenwert generiert, sobald ein noch so kleiner Teil des Potentials hinzuaddiert wird. In diesem Fall existiert eine Lösung der Schrödingergleichung zu der Spektralkante Null, die sowohl ein Eigenwert, als auch eine Resonanz des Operators sein kann. Wir untersuchen das Verhalten der entsprechenden Lösung im Unendlichen und liefern für eine Klasse von lang- und kurzreichweitigen Potentialen Abschätzungen für die entsprechenden Abfallraten. Diese hängen von der zugrundeliegenden Dimension, der Anzahl der Quantenteilchen und ihren jeweiligen Massen ab. Wir zeigen außerdem, dass die Abschätzungen scharf sind, indem wir das konkrete asymptotische Verhalten von solchen Lösungen im Fall von kurzreichweitigen Wechselwirkungen beweisen.

Darauf aufbauend untersuchen wir anschließend im Hinblick auf den Efimov-Effekt das diskrete Spektrum von Mehrteilchen-Schrödingeroperatoren. Im Fall von $d \geq 3$ und $N \geq 3$ oder $d \geq 5$ und $N \geq 2$ handelt es sich bei den oben beschriebenen Lösungen um Eigenfunktionen zum Eigenwert Null. Für solche Systeme zeigen wir mit variationellen Methoden, dass der zum $(N+1)$-Teilchensystem gehörende Operator nur eine endliche Anzahl an negativen Eigenwerten besitzen kann. Der Fall von drei Teilchen in Dimension vier ist grundlegend anders, da hier die Teilsysteme mit zwei Teilchen Resonanzen in der Null haben können. Aus diesem Grund wählen wir hierzu eine auf den Faddeev-Gleichungen basierende Methode, um zu zeigen, dass es für Systeme bestehend aus drei Teilchen keinen Efimov-Effekt geben kann.