

# Adaptive Higher Order Discontinuous Galerkin Methods for Porous-Media Multi-Phase Flow with Strong Heterogeneities

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

**Birane Kane**

aus Dakar

Hauptberichter:

Prof. Dr. Kunibert Siebert

Mitberichter:

Apl. Prof. Dr. Bernd Flemisch

Prof. Dr. Christian Engwer

Tag der mündlichen Prüfung: 03.05.2018

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation der Universität Stuttgart

2018

D93

# Abstract

In this thesis, we develop, analyze, and implement adaptive discontinuous Galerkin (DG) finite element solvers for the efficient simulation of porous-media flow problems. We consider 2d and 3d incompressible, immiscible, two-phase flow in a possibly strongly heterogeneous and anisotropic porous medium. Discontinuous capillary-pressure functions and gravity effects are taken into account. The system is written in terms of a phase-pressure/phase-saturation formulation. First and second order Adams-Moulton time discretization methods are combined with various interior penalty DG discretizations in space, such as the symmetric interior penalty Galerkin (SIPG), the nonsymmetric interior penalty Galerkin (NIPG) and the incomplete interior penalty Galerkin (IIPG). These fully implicit space time discretizations lead to fully coupled nonlinear systems requiring to build a Jacobian matrix at each time step and in each iteration of a Newton-Raphson method.

We provide a stability estimate of the saturation and the pressure with respect to initial and boundary data. We also derive a-priori error estimates with respect to the  $L^2(\mathbb{H}^1)$  norm for the pressure and the  $L^\infty(L^2) \cap L^2(\mathbb{H}^1)$  norm for the saturation.

Moving on to adaptivity, we implement different strategies allowing for a simultaneous variation of the element sizes, the local polynomial degrees and the time step size. These approaches allow to increase the local polynomial degree when the solution is estimated to be smooth and refine locally the mesh otherwise. They also grant more flexibility with respect to the time step size without impeding the convergence of the method. The aforementioned adaptive algorithms are applied in series of homogeneous, heterogeneous and anisotropic test cases. To our knowledge, this is the first time the concept of local hp-adaptivity is incorporated in the study of 2d and 3d incompressible, immiscible, two-phase flow problems.

Delving into the issue of efficient linear solvers for the fully-coupled fully-implicit formulations, we implement a constrained pressure residual (CPR) two-stage preconditioner that exploits the algebraic properties of the Jacobian matrices of the systems. Furthermore, we provide an open-source DG two-phase flow simulator, based on the software framework DUNE, accompanied by a set of programs including instructions on how to compile and run them.

## Zusammenfassung

Mehrphasenströmungen in porösen Medien finden ein breites Anwendungsspektrum in der Hydrologie und Geologie, z. B. in der Erdöl oder Erdgasproduktion.

In dieser Arbeit entwickeln, analysieren und implementieren wir adaptive diskontinuierliche Galerkin (DG) Finite-Elemente-Löser für die effiziente Simulation von Strömungsproblemen in porösen Medien. Wir betrachten 2d- und 3d-inkompressible, nicht mischbare Zweiphasenströmungen in einem porösen Medium welches möglicherweise stark heterogenen und/oder anisotrop ist. Dabei werden diskontinuierliche Kapillardruckfunktionen und Gravitationseffekte berücksichtigt. Wir verwenden eine Phasen-Druck / Phasen-Sättigungs-Formulierung. Adams-Moulton-Zeitdiskretisierungsverfahren erster und zweiter Ordnung werden mit verschiedenen DG-Diskretisierungen des Gebietes im Raum kombiniert, wie der Symmetric Interior Penalty Galerkin (SIPG), der Nonsymmetric Interior Penalty Galerkin (NIPG) und der Incomplete Interior Penalty Galerkin (IIPG). Diese voll impliziten Raumzeitdiskretisierungen führen zu voll gekoppelten nichtlinearen Systemen und damit zu einer Jacobi-Matrix assemblierung in jeder Iteration einer Newton-Raphson-Methode in jedem Zeitschritt. Wir liefern eine Stabilitätsabschätzung der Sättigung und des Drucks in Bezug auf Anfangs- und Randdaten. Zusätzlich leiten wir a-priori-Fehlerschätzungen in Bezug auf die  $L^2(\mathbb{H}^1)$ -Norm für den Druck und die  $L^\infty(\mathbb{L}^2) \cap L^2(\mathbb{H}^1)$ -Norm für die Sättigung her.

Wir implementieren verschiedene Adaptivitätsstrategien, die eine gleichzeitige Variation der Elementgrößen, der lokalen Polynomgrade und der Zeitschrittgröße ermöglichen. Diese Ansätze erlauben es, den lokalen Polynomgrad zu erhöhen, wenn die Lösung als glatt beurteilt wird, und das Gitter ansonsten lokal zu verfeinern. Sie gewähren auch mehr Flexibilität in Bezug auf die Zeitschrittgröße, ohne die Konvergenz der Methode zu beeinträchtigen. Die adaptiven Algorithmen werden in homogenen, heterogenen und anisotropen Testfällen angewendet. Nach unserer Kenntnis ist dies das erste Mal, dass das Konzept der lokalen hp-Adaptivität in die Untersuchung von inkompressiblen, nicht mischbaren Zweiphasenströmungsproblemen in 2d und 3d einbezogen wird.

Wir beschäftigen uns mit effizienten linearen Lösern für die voll gekoppelten, voll impliziten Formulierungen und implementieren einen zweistufigen Vorkondition-

ierer (z. B. Constrained Pressure Residual), der die algebraischen Eigenschaften der Jacobimatrizen der Systeme ausnutzt. Darüber hinaus entwickeln wir einen Open-Source-DG-Zweiphasen-Strömungssimulator, basierend auf dem Software-Framework DUNE.