Abstract: Spatial and Temporal Modeling of Extremes with Non-Stationary Spatial Dependence Structures

Carolin Forster

Weather extremes, such as heavy rainfall, often cause enormous social and economic damage. They commonly occur simultaneously in various locations and may continue over a certain period of time. Thus, models for spatial and spatio-temporal extremes are of great interest, as they can support a better understanding and knowledge of such events. In this thesis, we aim to model spatial and spatio-temporal extremes with flexible non-stationary spatial dependence structures. To achieve this, we consider these two cases separately.

For spatial processes, it is common to model the dependence structure with parametric models for max-stable processes or ℓ-Pareto processes. Apart from a few exceptions for the class of extremal-t processes, the existing literature for max-stable processes mainly focuses on models with stationary dependence structures. However, in many applications, due to the complexity of the underlying physical phenomena, it is reasonable to assume that the dependence structure is not stationary. Such a non-stationary dependence structure could depend, for example, also on covariates. Although there are already non-stationary approaches for max-stable processes, a more flexible approach that also allows for unbounded variograms and extends to ℓ-Pareto processes would be useful. In this thesis, we propose such a novel non-stationary approach that can be used for both Brown–Resnick and extremal-t processes—two of the most popular classes of max-stable processes—by including covariates in the corresponding variograms and correlation functions, respectively. While max-stable processes with deterministic covariates inherit most of the properties from classical max-stable processes, we additionally investigate theoretical properties of max-stable processes conditional on random covariates. We show that these can result both in asymptotically dependent and asymptotically independent processes. Thus, conditionally max-stable models are more flexible than classical max-stable models. In numerical experiments, we study the finite-sample performance of pairwise likelihood estimators for the novel non-stationary models in both scenarios. Furthermore, we apply our approach to extreme precipitation data in two regions in Southern and Northern Germany and compare the results with existing stationary and non-stationary models in terms of Takeuchi's information criterion (TIC). Our results in this case study, which focus on altitude as a covariate, indicate that non-stationary models are more appropriate for the more mountainous region in Southern Germany. Moreover, one of our new non-stationary models results in the best TIC value. Therefore, our novel models for max-stable processes demonstrate good performance in practice. In addition, we extend the ℓ-Pareto processes corresponding to the max-stable counterparts previously considered in the same way to non-stationary dependence structures. Thus, our approach captures both max-stable processes and ℓ-Pareto processes with non-stationary dependence structures.

Besides spatial extremes, it is also important to better understand spatio-temporal extremes in order to take into account not only their spatial extent but also their duration, which can have a significant effect on the impact of extreme events. In the spatio-temporal context, modeling the dependence structure is overly complex. Therefore, as a first step, the occurrence of extreme events in space and time is modeled, which is commonly done via point processes. In this case, not only the time, but also the site of the occurrence of an extreme event is of interest. Limit results for such spatio-temporal point processes can describe the occurrence of spatio-temporal extremes in more detail. However, they are still missing in the existing literature. Therefore, we analyze the asymptotic behavior of the point process of exceedances in a spatio-temporal setting whose points are given by the rescaled occurrence times, the sites and the rescaled values of exceedances. Here, exceedances over a high threshold are flexibly defined via site-dependent risk functionals, which, depending on the definition, result in one extreme event leading to one or multiple points in the point process. Exploiting the framework of stationary regularly varying multivariate time series, we combine and extend the results from the literature in order to show weak convergence of the considered point processes of extremes and to explicitly determine its limit distribution. Moreover, we add certain features of extreme events, so-called marks, to the point processes. Marks can be, for example, values of site-dependent risk functionals or values of spatial risk measures. Then, we extend the previous limit results to these marked point processes, which enables the joint analysis of components, dependences, and features of spatio-temporal extremes.

Kurzfassung: Spatial and Temporal Modeling of Extremes with Non-Stationary Spatial Dependence Structures

Carolin Forster

Wetterextreme wie Starkregen verursachen oft enorme soziale und wirtschaftliche Schäden. Sie treten häufig gleichzeitig an verschiedenen Orten auf und können über einen bestimmten Zeitraum andauern. Daher sind Modelle für räumliche und räumlich-zeitliche Extreme von großem Interesse, da sie zu einem besseren Verständnis und Wissen über solche Ereignisse beitragen können. In dieser Arbeit wollen wir räumliche und räumlich-zeitliche Extremereignisse mit flexiblen nichtstationären räumlichen Abhängigkeitsstrukturen modellieren. Zu diesem Zweck betrachten wir diese beiden Fälle getrennt voneinander.

Bei räumlichen Prozessen ist es üblich, die Abhängigkeitsstruktur mit parametrischen Modellen für max-stabile Prozesse oder ℓ-Pareto-Prozesse zu modellieren. Abgesehen von einigen wenigen Ausnahmen für die Klasse der extremal-t-Prozesse konzentriert sich die vorhandene Literatur zu max-stabilen Prozessen hauptsächlich auf Modelle mit stationären Abhängigkeitsstrukturen. In vielen Anwendungen ist es jedoch aufgrund der Komplexität der zugrunde liegenden physikalischen Phänomene naheliegend anzunehmen, dass die Abhängigkeitsstruktur nichtstationär ist. Eine solche nichtstationäre Abhängigkeitsstruktur könnte beispielsweise auch von Kovariaten abhängen. Obwohl es bereits nichtstationäre Ansätze für max-stabile Prozesse gibt, wäre ein flexiblerer Ansatz nützlich, der auch unbeschränkte Variogramme zulässt und auf ℓ-Pareto-Prozesse übertragen werden kann. In dieser Arbeit schlagen wir einen solchen neuen nichtstationären Ansatz vor, der sowohl für Brown-Resnick- als auch für Extremal-t-Prozesse – zwei der beliebtesten Klassen max-stabiler Prozesse – verwendet werden kann, indem Kovariaten in die entsprechenden Variogramme bzw. Korrelationsfunktionen eingebaut werden.

Während max-stabile Prozesse mit deterministischen Kovariaten die meisten Eigenschaften klassischer max-stabiler Prozesse erben, untersuchen wir zusätzlich theoretische Eigenschaften von max-stabilen Prozessen mit zufälligen Kovariaten. Wir zeigen, dass diese sowohl zu asymptotisch abhängigen als auch zu asymptotisch unabhängigen Prozessen führen können. Somit sind bedingt max-stabile Modelle flexibler als klassische max-stabile Modelle. In numerischen Experimenten untersuchen wir die Performance von paarweisen Likelihood-Schätzern für die neuen nichtstationären Modelle bei begrenzter Stichprobengröße in beiden Szenarien. Darüber hinaus wenden wir unseren Ansatz auf Extremniederschlagsdaten in zwei Regionen in Süd- und Norddeutschland an und vergleichen die Ergebnisse anhand des Takeuchi-Informationskriteriums (TIC) mit bestehenden stationären und nichtstationären Modellen. Unsere Ergebnisse in dieser Fallstudie, die sich auf die Höhe als Kovariate konzentrieren, deuten darauf hin, dass nichtstationäre Modelle für die bergigere Region in Süddeutschland besser geeignet sind. Darüber hinaus erzielt eines unserer neuen nichtstationären Modelle den besten TIC-Wert. Daher zeigen unsere neuen Modelle für max-stabile Prozesse in der Praxis eine gute Performance. Darüber hinaus erweitern wir die ℓ-Pareto-Prozesse, die den zuvor auf die gleiche Weise betrachteten max-stabilen Gegenstücken entsprechen, auf nichtstationäre Abhängigkeitsstrukturen. Somit umfasst unser Ansatz sowohl max-stabile Prozesse als

auch ℓ-Pareto-Prozesse mit nichtstationären Abhängigkeitsstrukturen.
Neben räumlichen Extremen ist es auch wichtig räumlich-zeitliche Extreme besser zu verstehen, um neben ihrer räumlichen Ausdehnung auch ihre Dauer zu berücksichtigen, die einen erheblichen Einfluss auf die Auswirkungen von Extremereignissen haben kann. Im räumlich-zeitlichen Kontext ist die Modellierung der Abhängigkeitsstruktur übermäßig komplex. Daher wird in einem ersten Schritt das Auftreten von Extremereignissen in Raum und Zeit modelliert, was üblicherweise über Punktprozesse erfolgt. In diesem Fall ist nicht nur der Zeitpunkt, sondern auch der Ort des Auftretens eines Extremereignisses von Interesse. Grenzwerte für solche räumlich-zeitlichen Punktprozesse können das Auftreten räumlich-zeitlicher Extreme detaillierter beschreiben. In der bestehenden Literatur fehlen sie jedoch noch. Daher analysieren wir das asymptotische Verhalten des Punktprozesses der Überschreitungen in einem räumlich-zeitlichen Rahmen, dessen Punkte durch die skalierten Zeiten, die Orte und die skalierten Werte der Überschreitungen gegeben sind. Hier werden Überschreitungen eines hohen Schwellenwerts flexibel über ortsabhängige Risikofunktionale definiert, was je nach Definition dazu führt, dass ein Extremereignis einen oder mehrere Punkte im Punktprozess zur Folge hat. Unter der Nutzung von stationärer, regulär variierender multivariater Zeitreihen kombinieren und erweitern wir die Ergebnisse aus der Literatur, um die schwache Konvergenz der betrachteten Punktprozesse von Extremen zu zeigen und deren Grenzverteilung explizit zu bestimmen. Darüber hinaus fügen wir den Punktprozessen bestimmte Merkmale von Extremereignissen, sogenannte Marken, hinzu. Marken können beispielsweise Werte ortsabhängiger Risikofunktionale oder Werte räumlicher Risikomaße sein. Anschließend erweitern wir unsere theoretischen Resultate auf diese markierten Punktprozesse, was die gemeinsame Analyse von Komponenten, Abhängigkeiten und Merkmalen räumlich-zeitlicher Extreme ermöglicht.