Abstract

Nonlinear phenomena on periodic necklace graphs constitute the central theme of this thesis. Applications of periodic graphs arise in many fields of science, for instance as models for complex physical structures such as photonic crystals, nano-tubes or graphene.

In the first part we provide a rigorous proof for the existence of breather solutions for nonlinear Klein-Gordon equations on periodic metric necklace graphs with Kirchhoff boundary conditions. In particular, we construct long-wave breathers that are symmetric with respect to the semi-circles of the necklace graph. The proof relies on a spatial dynamics approach. Thus, the existence question is approached by considering an infinite-dimensional system of ordinary differential equations on subintervals of the real line that are coupled by suitable boundary conditions. A careful analysis of the Floquet-Bloch spectrum of the associated linear operator and an appropriate fixation of the temporal period of the breather allow us the application of a center manifold reduction. The persistence of the approximately constructed pulse solutions on the center manifold under higher order perturbations is obtained by symmetry and reversibility arguments.

Furthermore, we consider a nonlinear diffusion equation on a metric necklace graph. We prove that terms which are irrelevant with respect to linear diffusion on the real line are irrelevant on the graph, too. The proof is based on L^1-L^∞-estimates combined with Bloch wave analysis.

In the second part of this thesis we deal with a discrete version of the necklace graph. We prove dispersive estimates for Klein-Gordon systems with small symmetric initial conditions. In particular, we use explicit integral representations of the semi-group and van der Corput's lemma to obtain a temporal decay rate of $(1+t)^{-\frac{1}{3}}$. Note that anti-symmetric initial conditions correspond to eigenvalues and will not lead to any temporal decay. Moreover, asymptotic stability of the vacuum state for nonlinear Klein-Gordon systems with power nonlinearity is shown.

Finally, we prove the existence of strongly localized breather solutions, which are not symmetric with respect to the periodic branching of the discrete graph. The main ingredient of the proof is the Theorem of Crandall and Rabinowitz (bifurcation from a simple eigenvalue). For this purpose we request a non-resonance condition.

Zusammenfassung

Nichtlineare Phänomene auf periodischen Perlenschnur-Graphen bilden das zentrale Thema dieser Arbeit. Periodische Graphen finden Anwendung in vielen naturwissenschaftlichen Disziplinen, beispielsweise als Modelle für komplexe physikalische Strukturen wie photonische Kristalle, Nanoröhren oder Graphen.

Im ersten Teil der Arbeit beweisen wir die Existenz so genannter Breather Lösungen von nichtlinearen Klein-Gordon Gleichungen auf periodischen, metrischen Perlenschnur-Graphen mit Kirchhoff Randbedingungen. Insbesondere konstruieren wir langwellige Breather Lösungen, die symmetrisch bezüglich der Halbkreise des Graphen sind. Der Beweis beruht auf einem Fourierreihenansatz, der auf ein System mit räumlicher Dynamik führt. Die Existenzfrage wird somit auf ein unendlich dimensionales System von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Teilintervallen der reellen Achse zurück geführt, die über geeignete Randbedingungen gekoppelt sind. Eine sorgfältige Analyse des Floquet-Bloch Spektrums des zugehörigen linearen Operators und eine geeignete Wahl der zeitlichen Periode der Breather Lösungen erlaubt uns die Durchführung einer Zentrumsmannigfaltigkeitenreduktion. Dabei erhalten wir die Persistenz der näherungsweise konstruierten Pulslösungen auf der Zentrumsmannigfaltigkeit unter Störungen höherer Ordnung mithilfe von Symmetrie- und Reversibilitätsargumenten.

Zudem betrachten wir eine nichtlineare Diffusionsgleichung auf einem metrischen Perlenschnur-Graphen. Wir zeigen, dass vernachlässigbare Terme hinsichtlich Diffusion auf der reellen Achse auch vernachlässigbar auf dem Graphen sind. Der Beweis basiert auf L^1-L^∞-Abschätzungen kombiniert mit einer Blochwellenbetrachtung.

Im zweiten Teil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einer diskreten Version des Perlenschnur-Graphen. Wir beweisen dispersive Abschätzungen für Klein-Gordon Systeme mit kleinen, symmetrischen Anfangsbedingungen.
Hierzu benutzen wir eine explizite Integraldarstellung der Halbgruppe und das Lemma von van der Corput um zeitliche Abfallraten der Form $(1+t)^{-\frac{1}{3}}$ zu erreichen. Antisymmetrische Anfangsbedingungen gehören zu Eigenwerten und werden zu keinem zeitlichen Abfall führen. Des Weiteren wird die asymptotische Stabilität des Vakuumszustandes einer nichtlinearen Klein-Gordon Gleichung mit polynomieller Nichtlinearität gezeigt.

Letzlich beweisen wir die Existenz von stark lokalisierten Breather Lösungen, die nicht symmetrisch bezüglich der periodischen Zweige des diskreten Graphen sind. Der Hauptbestandteil des Beweises ist das Theorem von Crandall und Rabinowitz (Bifurkation von einem einfachen Eigenwert), wofür wir eine Nichtresonanz-Bedingung fordern.