Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt Spektralasymptotiken für Operatoren auf einigen nicht selbstähnlichen Fraktalen.

Im ersten Teil behandeln wir das gestreckte Sierpiński Dreieck. Diese Menge entsteht aus dem selbstähnlichen Sierpiński Dreieck, indem wir die Kontraktionsfaktoren der Ähnlichkeiten verringern, was dazu führt, dass sich die Kopien nicht mehr berühren. Daher werden diese mit eindimensionalen Linien erneut verbunden. Damit besteht das gestreckte Sierpiński Dreieck aus einem eindimensionalen Teil sowie einem höherdimensionalen fraktalen Teil. In [5] wurden von Alonso-Ruiz, Freiberg und Kigami sogenannte Resistance Formen auf diesem Fraktal konstruiert. Resistance Formen induzieren eine Metrik auf dem zugrundeliegenden Raum, die sogenannte Resistance Metrik. Wir wollen die Hausdorff Dimension des gestreckten Sierpiński Dreiecks in Bezug zu dieser Metrik berechnen. Um das zu erreichen, müssen wir jedoch Bedingungen an die Resistance Formen einführen. Unter diesen Bedingungen kann die Hausdorff Dimension alle Werte zwischen 1 und $\frac{\ln 3}{\ln 5 - \ln 3}$ annehmen. Diese Werte entsprechen den Dimensionen des eindimensionalen Teils sowie der Dimension des selbstähnlichen Sierpiński Dreiecks. Auch die Grenzfälle sind beide möglich.

Fügen wir nun noch ein Maß hinzu, so erhalten wir Dirichlet Formen und daher selbstadjungierte Operatoren. Diese besitzen nichtnegatives diskretes Spektrum, welches wir analysieren indem wir das asymptotische Verhalten der Eigenwertzählfunktion untersuchen. Unter den gleichen Bedingungen wie zuvor können wir die Ordnung des führenden Terms dieser Aysmptotiken bestimmen, welcher sich zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{\ln 9}{\ln 5}$ befindet. Das entspricht erneut den Werten des eindimensionalen Falles sowie des selbstähnlichen Sierpiński Dreiecks und wiederum können beide Grenzfälle angenommen werden. Es zeigt sich, dass die beiden berechneten Werte - Hausdorff Dimension und Ordnung des führenden Terms - eine Gleichung erfüllen, die bisher für p.c.f. selbstähnliche Fraktale bekannt war. Die nächste Frage, die sich stellt, ist die nach Oszillationen im führenden Term. Diese sind typisch für sehr symmetrische selbstähnliche Fraktale. Das gestreckte Sierpiński Dreieck ist jedoch nicht selbstähnlich, besitzt aber dennoch sehr viel Symmetrie. Wir müssen nun zwischen der Existenz einer periodischen Funktion und Oszillationen an sich unterscheiden. Ersteres ist unwahrscheinlich, das Zweite hingegen lässt sich zeigen. Das heißt die Oszillationen, die wir im führenden Term finden, sind nicht so regulär wie im selbstähnlichen Fall. Wir finden lokalisierte Eigenfunktionen, deren Eigenwerte sehr hohe Multiplizitäten besitzen.

Im zweiten Teil wollen wir das Konzept des Streckens auf so viele weitere Fraktale wie möglich erweitern. Wir konstruieren Resistance Formen auf diesen gestrecktenen Fraktalen und beantworten die gleichen Fragen, die wir schon im ersten Teil für das gestreckte Sierpiński Dreieck behandelt haben. Nachdem wir Bedingungen an die Resistance Formen gestellt haben, können wir die Hausdorff Dimension bezüglich der induzierten Resistance Metrik berechnen. Wir führen erneut ein Maß ein, um selbstadjungierte Operatoren zu erhalten. Für diese Operatoren können wir die Ordnung des führenden Terms der Asymptotik der Eigenwertzählfunktion bestimmen.

Abstract

In this thesis we conduct analysis of spectral asymptotics for some Laplacians on non-self-similar fractals.

In the first part we consider the stretched Sierpiński gasket. It is constructed by stretching the copies of the self-similar Sierpiński gasket apart from each other and reconnecting them by one-dimensional lines. Therefore, it consists of a one-dimensional line part and a higher dimensional fractal part. In [5] Alonso-Ruiz, Freiberg and Kigami introduced resistance forms on this set. A resistance form induces a metric on the underlying space which is called the resistance metric. We would like to calculate the Hausdorff dimension of the stretched Sierpiński gasket with respect to this metric, but to be able to do so we need to introduce some conditions. Depending on the choice of the resistance form this dimension takes values between 1 and $\frac{\ln 3}{\ln 5 - \ln 3}$. These values correspond to the dimensions of the one-dimensional part and the self-similar Sierpiński gasket. Both limiting cases can be realized.

If we equip the stretched Sierpiński gasket with a measure we obtain Dirichlet forms and thus self-adjoint operators. They have non-negative discrete spectrum, which we analyze by studying the asymptotic growing of the eigenvalue counting function. Under the same conditions as before we can calculate the order of the leading term of these asymptotics, which turns out to interpolate between $\frac{1}{2}$ and $\frac{\ln 9}{\ln 5}$. Again, these values belong to the one-dimensional part and the self-similar Sierpiński gasket, respectively, and both border cases can be achieved. As it turns out, these values, Hausdorff dimension and order of the leading term, satisfy the same relation as one known for p.c.f. self-similar sets. The next question that arises is if there are oscillations in the leading term which are typical for highly symmetrical self-similar fractals. The stretched Sierpiński gasket is not self-similar but it still exhibits very high symmetry. We have to distinguish between the appearance of a periodic function in the leading term and oscillations in general. The first one is unlikely as we will see, whereas the second one still holds. This means there are oscillations in the leading term, but these will not have this very strict periodic behavior that we know of the self-similar Sierpiński gasket. We will show that there exist localized eigenfunctions which have eigenvalues with very high multiplicities, and this property yields the oscillations in the spectral asymptotics.

In the second part we would like to generalize the concept of stretching to as many fractals as possible and introduce the notion of stretched fractals. We introduce resistance forms on these fractals and answer the same questions as in the first part for the stretched Sierpiński gasket. After introducing conditions on the resistance forms we can calculate the Hausdorff dimension with respect to the induced resistance metric. Furthermore, equipping the fractal with a measure, we get self-adjoint operators, for which we study the asymptotic behavior of the eigenvalue counting function by calculating the order of the leading term.