Abstract

In this thesis we extend the approach of Cordes to characterize the symbols $\mathscr{S}^0_{0,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ via their Kohn-Nirenberg operators T and the smoothness of the map $\rho_\lambda(-)T\rho_\lambda(-)^*$ for the Schrödinger representations ρ_λ. For this purpose we introduce generalizations $\mathscr{F}(\pi)$ of the spaces of smooth vectors $\mathscr{E}(\pi)$ and analytic vectors $\mathscr{A}(\pi)$ of representations π and discuss properties of associated algebras $\mathscr{F}(\mathrm{Ad}_\pi)$ for the representation

$$\mathrm{Ad}_\pi T = \pi(-) \circ T \circ \pi(-)^{-1}$$

on the continuous operators. In order to apply these concepts to the ultradifferentiable case, we built on top of the existing theory of ultradifferentiable functions and create a framework for vector valued ultradifferentiable functions defined by the action of analytic frames.

We apply our results to the ultradifferentiable operators $\mathscr{E}^{[M]}_D(\mathrm{Ad}_\pi)$ and identify the corresponding spaces of symbols for the Schrödinger representations $\pi = \rho_\lambda$, for the left-regular representation $\pi = \boldsymbol{L}_2$ on compact Lie groups and for Schrödinger-type representations $\pi = \Theta_\lambda$ on the Dynin-Folland group $\mathbb{H}_2$.

We create new Gelfand triples that work well with the Fourier transform and the Kohn-Nirenberg quantizations on general homogeneous Lie groups. The new framework enables us to rely more heavily on topological tensor products. We hope this will be useful for the task of integrating the Kohn-Nirenberg quantization on homogenous Lie groups into the approach of Cordes in future research.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit erweitern wir den Ansatz von Cordes, in dem die Symbole $\mathscr{S}^0_{0,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit Hilfe ihrer Kohn-Nirenberg-Operatoren T und der Differenzierbarkeit der Abbildung $\rho_\lambda(-)T\rho_\lambda(-)^{-1}$ charakterisiert werden. Hierbei bezeichnet ρ_λ die Schrödinger-Darstellung. Dafür führen wir Verallgemeinerungen $\mathscr{F}(\pi)$ der Räume der glatten Vektoren $\mathscr{E}(\pi)$ und analytischen Vektoren $\mathscr{A}(\pi)$ ein. Außerdem diskutieren wir Eigenschaften der zugehörigen Algebren $\mathscr{F}(\mathrm{Ad}_\pi)$ zur Darstellung

$$\mathrm{Ad}_\pi T = \pi(-) \circ T \circ \pi(-)^{-1}$$

auf den stetigen Operatoren. Um diese Konzepte im ultradifferenzierbaren Fall anwenden zu können, knüpfen wir an die existierende Theorie der ultradifferenzierbaren Funktionen an und konstruieren und diskutieren Räume von vektorwertigen ultradifferenzierbaren Funktionen mit Hilfe von analytischen Rahmen.

Wir wenden diese Resultate auf die ultradifferenzierbaren Operatoren $\mathscr{E}^{[M]}_D(\mathrm{Ad}_\pi)$ an und identifizieren die zugehörigen Symbolräume. Dabei betrachten wir die Schödinger-Darstellungen $\pi = \rho_\lambda$, die linksreguläre Darstellung $\pi = \boldsymbol{L}_2$ einer kompakten Lie Gruppe und Darstellungen $\pi = \Theta_\lambda$ der Dynin-Folland-Gruppe $\mathbb{H}_2$.

Wir haben neue Gelfand-Tripel konstruiert, die sich gut in die Arbeit mit der Gruppen-Fouriertransformation und Kohn-Nirenberg-Quantisierung einfügen. Diese neuen Gelfand-Tripel ermöglichen es uns stärker von der Theorie der topologischen Tensorprodukte zu zehren. Wir hoffen, dass dies für zukünftige Forschung bei der Integration der Kohn-Nirenberg-Quantisierung auf homogenen Lie-Gruppen in den Ansatz von Cordes hilfreich sein wird.