Generalised Coupling Conditions for Multi-Dimensional Flows in Fluid–Porous Systems

Linheng Ruan

Abstract

Coupled flow systems involving a porous medium in contact with a free-flow region occur in numerous applications in biology, environmental sciences, and industry, such as drug transport in biological tissues, subsurface drainage, and industrial filtration processes. In corresponding mathematical models, the fluid flow is typically described by the Navier–Stokes equations in the free-flow region and Darcy's law in the porous medium with appropriate coupling conditions at the common interface. Classical interface conditions based on the Beavers–Joseph condition are only applicable to flows that are either parallel or perpendicular to the interface. More recently, generalised interface conditions have been derived in the literature using homogenisation and boundary layer theory. These conditions are suitable for arbitrary flow directions near the fluid–porous interface in the non-inertial regime. Other generalisations of the interface conditions that incorporate inertial effects have only been developed theoretically and have not yet been validated.

The objective of this dissertation is to develop coupling conditions that are valid for arbitrary flow directions near the fluid–porous interface and incorporate inertial effects. As an alternative to a sharp interface description, a modelling framework based on dimensional model reduction in a transition zone between the free-flow region and the porous medium is proposed. The transition region facilitates the transfer of mass and momentum between the two domains and provides a framework in which inertial effects can be naturally incorporated. The thickness of the transition zone is assumed to be sufficiently small so that it can be modelled as a complex interface. The non-inertial case is first addressed, and the model is subsequently extended to include inertial effects.

For the non-inertial case, a full-dimensional Stokes–Brinkman–Darcy model is proposed, which consists of the Stokes equations in the free-flow region, the Brinkman equations in the transition zone, and Darcy's law in the porous medium, together with appropriate interface conditions at the top and bottom of the transition region. To reduce the computational cost associated with resolving the thin transition zone, a hybrid-dimensional model is derived by vertically averaging the Brinkman equations across the transition zone. The well-posedness of both the full- and hybrid-dimensional models is established. Finite-volume schemes based on the MAC scheme are developed to solve the coupled flow problems, and an experimental convergence analysis is performed. The derived hybrid-dimensional model is validated against pore-scale simulations and compared with other coupling approaches reported in the literature. The results demonstrate that the proposed hybrid-dimensional model is suitable for arbitrary flow directions near the fluid–porous interface. In comparison with classical interface conditions, the model yields significantly improved agreement with pore-scale simulations and performs better than other interface conditions from literature.

The newly derived hybrid-dimensional model contains several uncertain physical parameters that influence model predictions. A surrogate-assisted global sensitivity analysis using Sobol' indices is performed for the hybrid-dimensional model for two test cases: filtration and splitting flows. Constructing surrogates for higher-dimensional random fields requires either many training runs or sophisticated sampling strategies. To address this challenge, polynomial chaos surrogates, including sparse and multi-resolution representations, are compared for their efficiency in global

sensitivity analysis using a predefined Sobol' sequence of training samples. For both test cases, a multi-resolution approach delivers the most accurate estimation of Sobol' indices. The sensitivity analysis shows that the model response is mainly influenced by a few key physical parameters related to the complex interface and porous-medium properties, with their relative importance depending on the flow configuration.

Finally, the coupled flow models are extended to incorporate inertial effects in the fluid domain. In the full-dimensional formulation, the flow is governed by the Navier–Stokes equations in the free-flow region, the Navier–Brinkman equations in the transition region, and the Darcy–Forchheimer equations in the porous medium, together with appropriate interface conditions at the top and bottom of the transition zone. In the hybrid-dimensional formulation, the Forchheimer term is neglected in the porous-medium region, and a hybrid-dimensional Navier–Stokes–Brinkman–Darcy model is derived by vertically averaging the Navier–Brinkman equations and proposing suitable transmission conditions. A finite-volume discretisation based on the MAC scheme and the Newton method is introduced to solve the coupled inertial system. Numerical simulations are performed for the full-dimensional Navier–Stokes–Brinkman–Darcy model, which confirm the stability of the Newton method and demonstrate that inertial effects are effectively absorbed within the transition region.

Generalised Coupling Conditions for Multi-Dimensional Flows in Fluid–Porous Systems

Linheng Ruan

Zusammenfassung

Gekoppelte Strömungssysteme, bei denen ein poröses Medium mit einem Freiströmungsbereich in Kontakt steht, treten in zahlreichen Anwendungen in der Biologie, den Umweltwissenschaften und der Industrie auf, wie beispielsweise beim Wirkstofftransport in biologischen Geweben, bei der unterirdischen Entwässerung und in industriellen Filtrationsprozessen. In entsprechenden mathematischen Modellen wird die Fluidströmung typischerweise durch die Navier-Stokes-Gleichungen im Freiströmungsbereich und durch das Darcy-Gesetz im porösen Medium beschrieben, ergänzt durch geeignete Kopplungsbedingungen an der gemeinsamen Grenzfläche. Klassische Grenzflächenbedingungen auf Grundlage der Beavers-Joseph-Bedingung sind nur auf Strömungen anwendbar, die entweder parallel oder senkrecht zur Grenzfläche verlaufen. In den vergangenen Jahren wurden in der Literatur verallgemeinerte Grenzflächenbedingungen mithilfe von Homogenisierung und Grenzschichttheorie hergeleitet. Diese Bedingungen sind für beliebige Strömungsrichtungen in der Nähe der Fluid-Poren-Grenzfläche im nicht-inertialen Regime geeignet. Andere Verallgemeinerungen der Grenzflächenbedingungen, die Trägheitseffekte berücksichtigen, wurden bislang nur theoretisch entwickelt und noch nicht validiert.

Ziel dieser Dissertation ist es, Kopplungsbedingungen zu entwickeln, die für beliebige Strömungsrichtungen in der Nähe der Fluid-Poren-Grenzfläche gültig sind und Trägheitseffekte berücksichtigen. Als Alternative zu einer scharfen Grenzflächenbeschreibung wird ein Modellierungsansatz vorgeschlagen, der auf einer Dimensionsreduktion des Modells in einer Übergangszone zwischen dem Freiströmungsbereich und dem porösen Medium basiert. Die Übergangsregion ermöglicht den Transfer von Masse und Impuls zwischen den beiden Gebieten, wobei Trägheitseffekte auf natürliche Weise berücksichtigt werden können. Die Dicke der Übergangszone wird als ausreichend klein angenommen, sodass sie als eine komplexe Grenzfläche modelliert werden kann. Zunächst wird der nicht-inertiale Fall betrachtet, anschließend wird das Modell erweitert, um Trägheitseffekte einzubeziehen.

Für den nicht-inertialen Fall wird ein volldimensionales Stokes-Brinkman-Darcy-Modell vorgeschlagen, das aus den Stokes-Gleichungen im Freiströmungsbereich, den Brinkman-Gleichungen in der Übergangszone und dem Darcy-Gesetz im porösen Medium besteht, zusammen mit geeigneten Grenzflächenbedingungen am oberen und unteren Rand der Übergangsregion. Um die mit der Auflösung der dünnen Übergangszone verbundenen Rechenkosten zu reduzieren, wird ein hybriddimensionales Modell hergeleitet, indem die Brinkman-Gleichungen vertikal über die Übergangszone hinweg gemittelt werden. Die Wohlgestelltheit wird sowohl für das volldimensionale als auch für das hybriddimensionale Modell gezeigt. Finite-Volumen-Verfahren auf Grundlage des MAC-Schemas werden entwickelt, um die gekoppelten Strömungsprobleme zu lösen. Außerdem wird eine experimentelle Konvergenzanalyse durchgeführt. Das hergeleitete hybriddimensionale Modell wird anhand von Porenskalen-Simulationen validiert und mit anderen Kopplungsansätzen in der Literatur verglichen. Die Ergebnisse zeigen, dass das vorgeschlagene hybriddimensionale Modell für beliebige Strömungsrichtungen in der Nähe der Fluid-Poren-Grenzfläche geeignet ist. Im Vergleich zu klassischen Grenzflächenbedingungen liefert das Modell eine deutlich bessere Übereinstimmung mit Porenskalen-Simulationen und schneidet besser ab als andere Grenzflächenbedingungen aus der Literatur.

Das neu hergeleitete hybriddimensionale Modell enthält mehrere unsichere physikalische Para-

meter, die die Modellvorhersagen beeinflussen. Eine globale Sensitivitätsanalyse mithilfe von Surrogatmodellen und Sobol'-Indizes wird für das hybriddimensionale Modell für zwei Testfälle durchgeführt: Filtrationsströmungen und Strömungsteilung. Die Konstruktion von Surrogatmodellen für höherdimensionale Zufallsfelder erfordert entweder viele Trainingsläufe oder ausgefeilte Stichprobenstrategien. Um diese Herausforderung zu bewältigen, werden Polynomial-Chaos-Surrogatmodelle, einschließlich spärlicher und multiauflösender Darstellungen, hinsichtlich ihrer Effizienz für die globale Sensitivitätsanalyse unter Verwendung einer vorgegebenen Sobol'-Sequenz von Trainingsstichproben verglichen. Für beide Testfälle liefert ein Multiauflösungsansatz die genaueste Abschätzung der Sobol'-Indizes. Die Sensitivitätsanalyse zeigt, dass die Modellantwort hauptsächlich von wenigen Schlüsselparametern beeinflusst wird, die mit der komplexen Grenzfläche und den Eigenschaften des porösen Mediums zusammenhängen, wobei ihre relative Bedeutung von der jeweiligen Strömungskonfiguration abhängt.

Abschließend werden die gekoppelten Strömungsmodelle erweitert, um Trägheitseffekte im Fluidbereich zu berücksichtigen. In der volldimensionalen Formulierung wird die Strömung durch die Navier-Stokes-Gleichungen im Freiströmungsbereich, die Navier-Brinkman-Gleichungen in der Übergangsregion und die Darcy-Forchheimer-Gleichungen im porösen Medium beschrieben, zusammen mit geeigneten Grenzflächenbedingungen am oberen und unteren Rand der Übergangszone. In der hybriddimensionalen Formulierung wird der Forchheimer-Term im Bereich des porösen Mediums vernachlässigt, und ein hybriddimensionales Navier-Stokes-Brinkman-Darcy-Modell wird durch vertikale Mittelung der Navier-Brinkman-Gleichungen sowie durch geeignete Übertragungsbedingungen hergeleitet. Zur Lösung des gekoppelten trägen Systems wird eine Finite-Volumen-Diskretisierung auf Grundlage des MAC-Schemas und des Newton-Verfahrens eingeführt. Numerische Simulationen werden für das volldimensionale Navier-Stokes-Brinkman-Darcy-Modell durchgeführt. Diese bestätigen die Stabilität des Newton-Verfahrens und zeigen, dass Trägheitseffekte effektiv innerhalb der Übergangsregion absorbiert werden.