Abstract

Partial differential equations constitute a powerful tool to describe many natural phenomena. In a variety of real-world applications, occurring problems are modeled through hyperbolic conservation laws. Such models often involve experimental data to characterize physical properties, such as porosity or heat conductivity. To account for insufficient measurements or underlying uncertainties in this data, random coefficients may be incorporated. Additionally, these random fields may contain discontinuities to represent, e.g., heterogeneities or fractures of a (porous) medium. In oder to tackle these challenges, the key focus of this manuscript lies on scalar conservation laws with a *random discontinuous flux function* and the corresponding uncertainty quantification. This dissertation addresses the question of well-posedness of the resulting random problem as well as the numerical simulation of the corresponding solutions.

As a first contribution, suitable admissibility criteria for the resulting scalar conservation laws with a random discontinuous flux function are introduced and well-posedness is established. While the question of pathwise existence and uniqueness can be answered by means of the underlying deterministic setting, establishing strong measurability of the random solution requires special treatment. Standard techniques for showing strong measurability of solutions utilize continuous dependence results or leverage the deterministic existence proof. However, these procedures are not applicable in the random discontinuous flux setting or require very restrictive assumptions, such as *strong measurability* of the flux function. With general randomized positions of the flux discontinuities, such an assumption is out of reach and *merely measurable* flux functions can be expected at best. To establish strong measurability of random solutions for such merely measurable flux functions, a novel proof strategy is presented.

Moreover, the numerical approximation of solutions to the random discontinuous-flux conservation law is addressed. For these simulations and as an example of the developed theory, a *Lévy-type random field* is employed in the flux function. This coefficient is constructed via a (continuous) Gaussian part and a spatially discontinuous jump field. Consequently, the Lévy-type random field enables a more realistic modeling of, e.g., heterogeneities or fractures in a (porous) medium, as compared to state-of-the-art continuous coefficients. Numerical simulations demonstrate the ability of sample-adapted discretization schemes to approximate pathwise solutions of the resulting random discontinuous-flux conservation law. In particular, a novel *jump-adapted wave-cell meshing technique* is introduced, which reduces the samplewise variance of finite volume approximations by accounting for standing-wave profiles caused by the flux discontinuities. For estimating statistical moments of the solution, these pathwise approximations are combined with a fast and precise multilevel Monte Carlo method.

Zusammenfassung

Partielle Differentialgleichungen stellen ein wichtiges Mittel zur Beschreibung vieler natürlicher Phänomene dar. In einer Vielzahl von praktischen Anwendungen werden auftretende Probleme durch hyperbolische Erhaltungsgleichungen modelliert. Solche Modelle beinhalten häufig experimentelle Daten, um physikalische Eigenschaften wie beispielsweise Porösität oder Wärmeleitfähigkeit zu charakterisieren. Um zugrundeliegenden Unsicherheiten oder unzureichenden Messungen in diesen Daten Rechnung zu tragen, können randomisierte Koeffizienten in die Modelle einbezogen werden. Um Heterogenitäten oder Risse in einem (porösen) Medium zu berücksichtigen, sollten diese Zufallsfelder Unstetigkeiten beinhalten dürfen. Motiviert durch diese Herausforderungen, liegt das Hauptaugenmerk dieses Manuskripts auf skalaren Erhaltungsgleichungen mit *zufälligen unstetigen Flussfunktionen* und der entsprechenden Unsicherheitsquantifizierung. Kurzgefasst befasst sich diese Dissertation mit der Frage der Wohlgestelltheit des resultierenden randomisierten Problems sowie mit der numerischen Simulation der entsprechenden Lösungen.

Zuerst werden geeignete Auswahlkriterien für die Lösung der resultierenden skalaren Erhaltungsgleichungen mit randomisierter unstetiger Flussfunktion eingeführt und die Wohlgestelltheit nachgewiesen. Während die Frage der pfadweisen Existenz und Eindeutigkeit mit Hilfe der zugrundeliegenden deterministischen Probleme und Lösungsansätze beantwortet werden kann, erfordert der Beweis starker Messbarkeit der zufälligen Lösung eine besondere Betrachtung. Standardmethoden für den Nachweis starker Messbarkeit von Lösungen nutzen Ergebnisse zu stetiger Abhängigkeit oder machen sich den deterministischen Existenzbeweis zu Nutze. Diese Verfahren sind bei zufälligen unstetigen Flüssen jedoch nicht anwendbar oder erfordern sehr restriktive Annahmen, wie etwa die *starke Messbarkeit* der Flussfunktion. Allerdings ist eine solche Annahme bei allgemeinen Flussfunktionen mit zufälliger Position der Unstetigkeiten unerreichbar und es können bestenfalls *messbare* Flussfunktionen erwartet werden. Um die starke Messbarkeit von zufälligen Lösungen für solche Flussfunktionen, die lediglich messbar sind, nachzuweisen, wird eine neuartige Beweisstrategie vorgestellt.

Darüber hinaus behandelt diese Arbeit die numerische Approximation von Lösungen zu zufälligen Erhaltungsgleichungen mit unstetigen Flüssen. Für diese Simulationen und als Beispiel für die entwickelte Lösungstheorie wird ein *Lévy-artiges Zufallsfeld* in der Flussfunktion verwendet. Dieser Koeffizient wird über einen (kontinuierlichen) Gaußschen Teil und ein Sprungfeld mit räumlichen Unstetigkeiten erzeugt. Mit Hilfe dieser Konstruktion ermöglicht das Lévy-artige Zufallsfeld eine realistischere Modellierung von Heterogenitäten oder Rissen in einem (porösen) Medium als dies mit modernen stetigen Koeffizienten möglich wäre. In numerischen Simulationen wird deutlich, dass Diskretisierungsmethoden, die an die spezielle Form der Stichproben angepasst sind, die Fähigkeit haben, die pfadweisen Lösungen der zufälligen Erhaltungsgleichung mit unstetiger Flussfunktion besser als Standardverfahren anzunähern. Inbesondere wird ein neuartiges *Sprung-adaptiertes Wave-cell meshing Verfahren* eingeführt, das die sampleweise Varianz der Finite-Volumen-Approximation reduziert, indem stehende Wellenprofile berücksichtigt werden, die von den Unstetigkeiten der Flussfunktion verursacht werden. Zur Schätzung der statistischen Momente der Lösung werden diese pfadweisen Approximationen mit einer schnellen und präzisen multilevel Monte Carlo Methode kombiniert.