

Abstract

This thesis consists of three parts. In the first part we consider multi-component flows through porous media. We introduce a hyperbolic system of partial differential equations which describes such flows, prove the existence of solutions, the convergence in a long-time-large-friction regime to a parabolic limit system, and finally present a new numerical scheme to efficiently simulate flows in this regime.

In the second part we study two-phase flows where both phases are considered compressible. We introduce a Navier–Stokes–Allen–Cahn phase-field model and derive an energy-consistent discontinuous Galerkin scheme for this system. This scheme is used for the simulation of two complex examples, namely drop–wall interactions and multi-scale simulations of coupled porous-medium/free-flow scenarios including drop formation at the interface between the two domains.

In the third part we investigate two-phase flows where one phase is considered incompressible, while the other phase is assumed to be compressible. We introduce an incompressible–compressible Navier–Stokes–Cahn–Hilliard model to describe such flows. Further, we present some analytical results for this system, namely a computable expression for the effective surface tension in the system and a formal proof of the convergence to a (quasi-)incompressible system in the low Mach regime. As a first step towards a discontinuous Galerkin discretization of the system, which is based on Godunov fluxes, we introduce the concept of an artificial equation of state modification, which is examined for a basic single-phase incompressible setting.

Zusammenfassung

Diese Arbeit besteht aus drei Teilen. Der erste Teil befasst sich mit Mehrkomponentenströmungen durch poröse Medien. Wir führen ein System von hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen ein, das diese Art von Strömungen beschreibt. Für dieses System beweisen wir die Existenz von Lösungen. Außerdem beweisen wir den Übergang zu einem parabolischen Grenzsystem in Strömungsregimen, die durch lange Zeiten und große Reibung charakterisiert sind. Zuletzt wird ein neues numerisches Verfahren vorgestellt, das eine effiziente numerische Simulation von Strömungen in diesem asymptotischen Regime erlaubt.

Im zweiten Teil untersuchen wir Zweiphasenströmungen, wobei beide Phasen als kompressibel betrachtet werden. Für deren Beschreibung führen ein Navier–Stokes–Allen–Cahn Phasenfeldmodell ein. Zur Diskretisierung des Modells leiten wir ein energiekonsistentes discontinuous Galerkin Verfahren her. Dieses Verfahren wird zur Simulation zweier komplexer Beispiele benutzt. Zum einen für Tropfen–Wand Interaktionen und zum anderen für Multiskalen Simulationen von gekoppelter Strömung in porösen Medien und freier Strömung. Dabei wird die Bildung von Tropfen an der Grenzfläche zwischen dem porösen Medien Gebiet und dem Gebiet der freien Strömung berücksichtigt.

Der dritte Teil beschäftigt sich mit Zweiphasenströmungen, bei denen eine Phase als kompressibel betrachtet wird, wohingegen die andere Phase als inkompressibel angenommen wird. Zur Beschreibung solcher Strömungen führen wir ein inkompressibles–kompressibles Navier–Stokes–Cahn–Hilliard Modell ein und präsentieren für dieses zwei analytische Resultate. Zum einen ein berechenbarer Ausdruck für die effektive Oberflächenspannung im System und zum anderen ein formaler Beweis der Konvergenz zu einem (quasi-)inkompressiblen Grenzsystem im Regime für kleine Machzahlen. Als ersten Schritt zu einem discontinuous Galerkin Verfahren, welches auf Godunov-Flüssen basiert, stellen wir ein Konzept vor, das auf einer künstlichen Zustandsgleichung basiert. Dieses Konzept wird dann für den einfacheren Fall einer inkompressiblen Einphasenströmung untersucht.