

Flow in Heterogeneous Porous Media: Fractures and Uncertainty Quantification

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der Universität
Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Markus Köppel

aus Heidelberg

Hauptberichter:	Prof. Dr. Christian Rohde
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Rainer Helmig
	Prof. Dr. Inga Berre

Tag der mündlichen Prüfung 31. Juli 2018

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation der Universität Stuttgart

2018

D 93

Abstract

This thesis is concerned with the approximation of (multi-phase-)flow in heterogeneous porous media and addresses two different problems commonly encountered in this field. In the first part a novel discrete fracture-matrix model is presented which is based on an alternative coupling approach of linear Darcy flow of single-phase fluids in the fracture as well as in the surrounding matrix domain by using an unknown Lagrange multiplier. This multiplier therefore represents a local fluid exchange between the matrix and the fracture of codimension one assuming the pressure equality at the fracture interface. The model is thus appropriate for domains with fractures of permeability higher than that in the bulk domain. By this means the fracture mesh does not need to be aligned with the matrix mesh. Well-posedness of the continuous problem in primal formulation is shown followed by the discussion of existence, uniqueness and convergence of its discrete counterpart. In particular three different finite element discretizations of the multiplier method are studied. The theoretical findings are analyzed by means of several numerical examples including some benchmark problems to validate the method.

In the second part the hybrid stochastic Galerkin method is applied to quantify uncertainties arising in heterogeneous porous media. The intrusive method extends the concept of the polynomial chaos expansion for a multi-element decomposition of the stochastic space. This results in a partly decoupled deterministic system for the coefficients of the polynomial chaos expansion of the unknowns. Based on the nonlinear fractional flow formulation of two fluid phases the hyperbolic-elliptic system with uncertain heterogeneity interfaces is then discretized sequentially with a central-upwind finite volume scheme for the hyperbolic, along with a mixed finite element method for the elliptic subsystem. The latter partly uses the tensor product structure of the saddle point system and appropriate preconditioning to speed up the computations. By construction the method is well-suited for massively parallel computations of complex flow problems. The power of the method is illustrated by means of several striking examples including their numerical convergence analysis. Moreover we assess the accuracy and the convergence of the approach on a purely hyperbolic flow problem considering uncertain boundary conditions, conceptual model uncertainty and uncertain material properties compared to other non-intrusive methods in the field.

Zusammenfassung

Diese Doktorarbeit befasst sich mit der Approximation von (Mehrphasen-)Strömungen in heterogenen porösen Medien und adressiert zwei verschiedene Probleme, welche oft in diesem Bereich auftreten. Der erste Teil stellt ein neuartiges, diskretes Kluft-Matrix Modell vor, welches auf einem alternativen Kopplungsansatz von linearen Darcy Strömungen einphasiger Fluide in der Kluft sowie im umgebenden Matrixgebiet, unter Verwendung eines unbekanntes Lagrange Multiplikators, basiert. Unter der Annahme der Druckgleichheit auf der Kluftgrenzfläche, stellt dieser Multiplikator daher einen lokalen Fluidaustausch zwischen Matrix und niederdimensionaler Kluft dar. Deshalb ist das Modell geeignet für Gebiete, in welchen die Durchlässigkeit der Kluft jene der Matrix übersteigt. Dadurch muss das Kluftgitter nicht am Matrixgitter ausgerichtet werden. Im Anschluss des Beweises der Wohlgestelltheit des kontinuierlichen Problems in primaler Formulierung, werden Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz des diskreten Pendant diskutiert. Insbesondere werden drei verschiedene Finite Elemente Diskretisierungen der Multiplikatormethode betrachtet. Die theoretischen Erkenntnisse werden anschließend anhand mehrerer numerischer Beispiele, einschließlich einiger Benchmarkprobleme, analysiert, um die Methode zu validieren.

Im zweiten Teil wird die hybride stochastische Galerkin Methode für die Quantifizierung von Unsicherheiten in heterogenen porösen Medien angewendet. Die intrusive Methode erweitert das Konzept der chaotischen Polynomentwicklung um eine Zerlegung des stochastischen Raums in mehrere Elemente. Hierdurch ergibt ein teilweise entkoppeltes deterministisches System für die Koeffizienten der chaotischen Polynomentwicklung der Unbekannten. Basierend auf der nichtlinearen fraktionalen Flussformulierung zweier Fluidphasen, wird das hyperbolisch-elliptische System mit unsicheren Heterogenitätsgrenzflächen anschließend sequenziell mit einem zentral-upwind Finite Volumen Verfahren des hyperbolischen, nebst einer gemischten Finite Elemente Methode des elliptischen Teilsystems diskretisiert. Letztere nutzt dabei teilweise die Tensorproduktstruktur des Sattelpunktsystems sowie eine entsprechende Vorkonditionierung, um die Berechnungen zu beschleunigen. Die Methode ist, per Konstruktion, ideal geeignet für hoch parallele Berechnungen von komplexen Strömungsproblemen. Mehrere einschlägige Beispiele, einschließlich deren numerische Konvergenzanalyse, verdeutlichen die Stärke der Methode. Darüber hinaus wird die Genauigkeit und die Konvergenz des Verfahrens mittels eines rein hyperbolischen Strömungsproblems, unter Berücksichtigung von unsicheren Randbedingungen, unsicherer Modellkonzeption sowie unsicheren Materialparametern, bewertet und mit anderen nicht-intrusiven Methoden auf diesem Gebiet verglichen.