Zusammenfassung

Wir rechtfertigen die Nichtlineare Schrödinger Approximation für eine Klasse von quasilinearen dispersiven Systemen. Wir erlauben nichttriviale Resonanzen und erlauben dem quasilinearen quadratischen Term ein beliebiges Maß an Regularität zu verlieren, solange er nicht mehr Regularität als der lineare Term des Systems verliert. Dies ist das erste Mal, dass die Nichtlineare Schrödinger Approximation für quasilineare dispersive Systeme gerechtfertigt wird, wo der quasilineare Term mehr als eine Ableitung verlieren darf.
Wir leiten die NLS Gleichung über Multi-Skalen-Analysis und das Zeigen von Residuumsabschätzungen her. Wir rechtfertigen die NLS Approximation auf ihrer natürlichen Zeitskala, indem wir Fehlerabschätzungen beweisen. Für die Fehlerabschätzungen verwenden wir eine abgewandelte Energie, die auf gewissen Normalformtransformationen beruht. Diese Energie wird weiter angepasst um die Schließung der Fehlerabschätzungen zu ermöglichen.
Wir geben zudem ein Beispiel dafür, wie unsere Techniken auf allgemeinere quasilineare dispersive Systeme angewandt werden können, indem wir Fehlerabschätzungen für ein reduziertes System zeigen, welches über das zweidimensionale Wasserwellen-Problem mit endlicher Tiefe und Oberflächenspannung motiviert ist.

Abstract

We derive and justify the nonlinear Schrödinger approximation for a class of quasilinear dispersive systems. We allow nontrivial resonances to happen and set no bound on the amount of regularity the quadratic quasilinear term is allowed to lose, apart from not losing more regularity than the linear term of the system does. This is the first time the nonlinear Schrödinger approximation is justified for quasilinear dispersive systems, where the quasilinear term is allowed to lose more than one derivative.
We rigorously derive the NLS equation via multiple scaling analysis and showing residual estimates. We justify the NLS approximation on its natural timescale by proving error estimates. For the error estimates we use a modified energy based on some normal form transformations. This energy gets modified even further in order to allow the closing of the error estimates.
We also give an example how our techniques can be applied to more general quasilinear dispersive systems by showing error estimates for a reduced system, which is motivated by the 2D water wave problem with finite depth and surface tension.