Abstract

This thesis is devoted to the approximation of contact interactions by means of short-range interactions in quantum mechanics. *Contact interactions* are also called *zero-range interactions* or *point interactions* in the literature, and as these terms already suggest, they describe idealized interactions that only appear when the particles involved are in direct contact with each other (i.e. their spatial coordinates coincide exactly). Formally, this corresponds, for example, to the case where the interaction potential V is replaced by a δ-potential. Contact interactions have a long tradition in physics, going back to the early days of quantum mechanics, and can be rigorously described with the help of mathematical methods. The mathematical construction of a Hamilton operator with non-vanishing contact interactions is a challenging issue and, in principle, only possible in $d \leq 3$ dimensions. While the case of a single particle interacting with an external "contact potential" has long been well-understood [1], there are still many open problems in the N-particle case ($N \geq 2$). In the case of $N \geq 2$ particles in $d = 2$ dimensions a physically reasonable Hamiltonian with two-body contact interactions (TMS Hamiltonian) was first constructed by Dell'Antonio, Figari and Teta [3].

In the first (and major) part of this thesis we mathematically justify well-established models with contact interactions in $d \in \{1, 2\}$ that are used to describe short-range two-body interactions among $N \geq 2$ particles. To this end, we consider a suitable class of Schrödinger operators H_ε, $\varepsilon > 0$, with local rescaled two-body potentials. The rescaling in $\varepsilon > 0$ is chosen so that in the limit $\varepsilon \to 0$ the effective range of the two-body interaction tends to zero while at the same time the strength of the interaction at the collision planes diverges at a rate that depends on the dimension d. Our main goal is to prove, irrespective of the underlying symmetry, norm resolvent convergence of H_ε in the limit $\varepsilon \to 0$ and to identify the limit operator H with a TMS Hamiltonian from the literature. Besides the mathematical justification of the underlying physical model, this also provides an alternative way of constructing the Hamiltonian. In analogy to the simpler one-particle case [1], a non-trivial renormalization of the coupling constants in front of the two-body potentials is necessary in $d \geq 2$ dimensions. The restriction that $d \leq 2$ is necessary in a certain sense because in $d = 3$ dimensions two closely related effects, namely the Efimov effect and the Thomas effect, prohibit the norm resolvent convergence of H_ε towards a "non-trivial" semibounded limit operator. First, we show in $d = 1$, and later also in $d = 2$, that H_ε converges, as $\varepsilon \to 0$, in the norm resolvent sense to a self-adjoint operator H, and in $d = 1$ we also obtain an asymptotic estimate for the rate of norm resolvent convergence depending on a mild decay condition for the two-body potentials. A comparable result in $d = 1$ was previously only known for $N \leq 3$ particles [2], and in $d = 2$ we thereby improve a result that was recently obtained in connection with a certain limit in the stochastic heat equation [4]. From the norm resolvent convergence $H_\varepsilon \to H$ as $\varepsilon \to 0$ it follows almost immediately that H fulfills the physical minimum requirements of translational invariance, locality and boundedness from below. In $d = 1$, H can be constructed directly from a closed, semibounded quadratic form, which is a small perturbation of the quadratic form of the free operator. We characterize the domain of H by means of a rigorous version of a well-known jump condition for the derivative of the wave function. In $d = 2$, we show that H can be identified with the TMS Hamiltonian. Both in one and two dimensions, our key to prove norm resolvent convergence is a generalized Konno-Kuroda formula for the resolvent of H_ε.

In the second part of this thesis we examine the weakness of short-range interactions among identical fermions of equal spin in all dimensions $d \leq 3$. In physics, short-range interactions in ultracold Fermi gases are conveniently entirely neglected, i.e. the Hamiltonian H of the system is equated with the kinetic energy operator, which is given by the negative Laplacian $-\Delta$ in

appropriate units. Formally, the approximation $H \approx -\Delta$ is usually justified as follows: The Pauli principle implies that the wave function vanishes when the coordinates of two fermions coincide, and consequently very short-range two-body interactions should be negligible. In the case of pure contact interactions we give a mathematical justification for the identity $H = -\Delta$ in $d \geq 2$. In one dimension, however, we give a counterexample that shows that non-vanishing contact interactions among identical fermions of equal spin do exist. In order to obtain results for short-range interactions of positive range, we again consider suitable Schrödinger operators H_ε, $\varepsilon > 0$, with rescaled two-body potentials, which are now restricted to the subspace of antisymmetric functions. Our second major result provides a criterion that specifies when, from the physical point of view, the approximation $H_\varepsilon \approx -\Delta$ is reasonable for small enough $\varepsilon > 0$ and we obtain an asymptotic estimate for the approximation error in terms of $\varepsilon > 0$. More precisely, it follows from our assumptions that H_ε converges, as $\varepsilon \to 0$, in the norm resolvent sense to $-\Delta$ and we obtain an asymptotic estimate for the rate of norm resolvent convergence. Moreover, our result is optimal in a certain sense: If one condition is only slightly violated, then the spectrum of H_ε fills the whole real line in the limit $\varepsilon \to 0$, which is not compatible with norm resolvent convergence towards the positive operator $-\Delta$.

Zusammenfassung

Diese Dissertation beschäftigt sich mit der Approximation von Kontaktwechselwirkungen durch kurzreichweitige Wechselwirkungen in der Quantenmechanik. *Kontaktwechselwirkungen* werden in der Literatur auch als *nullreichweitige Wechselwirkungen* oder *Punktwechselwirkungen* bezeichnet, und wie diese Bezeichnungen bereits nahelegen, beschreiben sie idealisierte Wechselwirkungen, die nur dann in Erscheinung treten, wenn die beteiligten Teilchen in direktem Kontakt miteinander sind (d.h. ihre Ortskoordinaten sind exakt gleich). Formal entspricht dies zum Beispiel dem Fall, wo das Wechselwirkungspotential V durch ein δ-Potential ersetzt wird. Kontaktwechselwirkungen haben eine lange Tradition in der Physik, die bis zu den Anfängen der Quantenmechanik zurückreicht, und lassen sich rigoros mit Methoden der Mathematik beschreiben. Die mathematische Konstruktion eines Hamilton-Operators mit nichtverschwindenden Kontaktwechselwirkungen ist eine anspruchsvolle Angelegenheit und prinzipiell nur in $d \leq 3$ Dimensionen möglich. Während der Fall eines einzelnen Teilchens in einem externen „Kontaktpotential" seit langem gut verstanden ist [1], gibt es im N-Teilchenfall ($N \geq 2$) noch viele offene Fragen. Im Fall von $N \geq 2$ Teilchen in $d = 2$ Dimensionen wurde ein physikalisch sinnvoller Hamiltonian mit Zweiteilchen-Kontaktwechselwirkungen (TMS Hamiltonian) zuerst von Dell'Antonio, Figari und Teta [3] konstruiert.

Im ersten (und größeren) Teil dieser Dissertation geben wir in $d \in \{1, 2\}$ Dimensionen eine mathematische Rechtfertigung für bewährte Modelle mit Kontaktwechselwirkungen, die zur Beschreibung von kurzreichweitigen Zweiteilchen-Wechselwirkungen zwischen $N \geq 2$ Teilchen verwendet werden. Hierzu betrachten wir eine geeignete Klasse von Schrödinger-Operatoren H_ε, $\varepsilon > 0$, mit lokalen reskalierten Zweiteilchen-Potentialen. Die Reskalierung in $\varepsilon > 0$ ist dabei so gewählt, dass im Limes $\varepsilon \to 0$ die effektive Reichweite der Zweiteilchen-Wechselwirkung gegen Null geht während gleichzeitig die Stärke der Zweiteilchen-Wechselwirkung an den Kollisionsebenen mit einer von der Dimension d abhängigen Rate divergiert. Unser Hauptziel ist es, unabhängig von der zugrundeliegenden Symmetrie, Normresolventenkonvergenz von H_ε im Limes $\varepsilon \to 0$ zu beweisen, und den Grenzoperator H mit einem in der Literatur bereits bekannten TMS Hamiltonian zu identifizieren. Neben der mathematischen Rechtfertigung des zugrundeliegenden physikalischen Modells liefert dies auch einen alternativen Weg zur Konstruktion des Hamiltonians. In Analogie zum einfacheren Einteilchen-Fall [1] ist dabei in $d \geq 2$ Dimensionen eine nichttriviale Renormalisierung der Kopplungskonstanten vor den Zweiteilchen-Potentialen erforderlich. Die Einschränkung $d \leq 2$ ist in gewisser Weise notwendig, da in $d = 3$ Dimensionen zwei eng miteinander verwandte Effekte, nämlich der Efimov-Effekt und der Thomas-Effekt, die Normresolventenkonvergenz von H_ε gegen einen „nichttrivialen", nach unten beschränkten Grenzoperator verbieten. Zunächst zeigen wir in $d = 1$ und später auch in $d = 2$, dass H_ε für $\varepsilon \to 0$ im Normresolventensinn gegen einen selbstadjungierten Operator H konvergiert, wobei wir in $d = 1$ zusätzlich eine asymptotische Abschätzung für die Rate der Normresolventenkonvergenz in Abhängigkeit einer milden Abfallbedingung an die Zweiteilchen-Potentiale bekommen. Ein vergleichbares Resultat in $d = 1$ war vorher nur für $N \leq 3$ Teilchen bekannt [2], und in $d = 2$ verbessern wir damit ein Resultat, das kürzlich im Zusammenhang mit einem gewissen Limes in der stochastischen Wärmeleitungsgleichung erzielt wurde [4]. Aus der Normresolventenkonvergenz $H_\varepsilon \to H$ für $\varepsilon \to 0$ folgt fast unmittelbar, dass H den physikalischen Mindestanforderungen der Translationsinvarianz, Lokalität und Beschränktheit nach unten genügt. In $d = 1$ kann H direkt mittels einer abgeschlossenen, nach unten beschränkten quadratischen Form konstruiert werden, die eine kleine Störung der quadratischen Form des freien Operators ist. Den Definitionsbereich von H charakterisieren wir mittels einer rigorosen Version einer wohlbekannten Sprungbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion. In $d = 2$ zeigen wir, dass H mit dem

TMS Hamiltonian identifiziert werden kann. Sowohl in einer als auch in zwei Dimensionen ist unser Schlüssel zum Beweis von Normresolventenkonvergenz eine verallgemeinerte Konno-Kuroda-Formel für die Resolvente von H_ε.

Im zweiten Teil dieser Arbeit untersuchen wir die Schwäche von kurzreichweitigen Wechselwirkungen zwischen identischen Fermionen gleichen Spins in allen Dimensionen $d \leq 3$. In der Physik werden kurzreichweitige Wechselwirkungen in ultrakalten Fermigasen meist komplett vernachlässigt, d.h. der Hamiltonian H des Systems wird mit dem Operator der kinetischen Energie gleichgesetzt, welcher in geeigneten Einheiten durch den negativen Laplace-Operator $-\Delta$ gegeben ist. Formal wird die Approximation $H \approx -\Delta$ üblicherweise folgendermaßen gerechtfertigt: Das Pauli-Prinzip impliziert, dass die Wellenfunktion verschwindet sobald die Koordinaten zweier Fermionen übereinstimmen, und folglich sollten sehr kurzreichweitige Zweiteilchen-Wechselwirkungen dann vernachlässigbar sein. Im Falle reiner Kontaktwechselwirkungen geben wir in $d \geq 2$ eine mathematische Begründung für die Identität $H = -\Delta$. In einer Dimension zeigen wir dagegen mithilfe eines Gegenbeispiels, dass dann auch nichtverschwindende Kontaktwechselwirkungen zwischen identischen Fermionen mit gleichem Spin existieren. Um auch Aussagen über kurzreichweitige Wechselwirkungen mit positiver Reichweite treffen zu können, betrachten wir wieder geeignete Schrödinger-Operatoren H_ε, $\varepsilon > 0$, mit reskalierten Zweiteilchen-Potentialen, die nun auf den Unterraum der antisymmetrischen Funktionen eingeschränkt sind. Unser zweites Hauptresultat liefert ein Kriterium dafür, wann die Approximation $H_\varepsilon \approx -\Delta$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ physikalisch sinnvoll ist und wir erhalten eine asymptotische Abschätzung für den Approximationsfehler in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$. Genauer folgt aus unseren Annahmen, dass H_ε für $\varepsilon \to 0$ im Normresolventensinn gegen $-\Delta$ konvergiert und wir bekommen eine asymptotische Abschätzung für die Rate der Normresolventenkonvergenz. Darüber hinaus ist unser Resultat in gewisser Weise optimal: Wenn eine Bedingung nur minimal verletzt ist, dann füllt das Spektrum von H_ε im Limes $\varepsilon \to 0$ die ganze reelle Gerade aus, was nicht mit der Normresolventenkonvergenz gegen den positiven Operator $-\Delta$ vereinbar ist.

Bibliography

[1] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden. *Solvable Models in Quantum Mechanics.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second edition, 2005. With an appendix by Pavel Exner.

[2] G. Basti, C. Cacciapuoti, D. Finco, and A. Teta. The three-body problem in dimension one: From short-range to contact interactions. *J. Math. Phys.*, 59(7):072104, 18, 2018.

[3] G.F. Dell'Antonio, R. Figari, and A. Teta. Hamiltonians for systems of N particles interacting through point interactions. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 60(3):253–290, 1994.

[4] Y. Gu, J. Quastel, and L.-C. Tsai. Moments of the 2D SHE at criticality. *Probability and Mathematical Physics*, 2(1):179–219, Mar 2021.