# Some constructions of irreducible modules over finite groups

Nora Krauß

## Abstract

We study constructions of irreducible modules for group algebras of finite groups. Inspired by James's submodule theorem for symmetric groups, we introduce James triples $(U, V, N)$ of subgroups of a finite group $G$. To a James triple we associate a subfactor of a permutation module and show that it is either zero or absolutely irreducible.

To overcome certain limitations of this construction we extend the framework to James quadruples $(U, V, N, D)$, which allow a broader class of irreducible modules to be obtained. In particular, if $D = 1$ and $(U, V, N, 1)$ is a James quadruple, then $(U, V, N)$ is a James triple.

We proceed to investigate the representation theory of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, where we construct an alternative generator for the unipotent Specht module associated to a partition of $n$. The construction is ad hoc, and does not rely on James triples or quadruples, despite certain similarities.

In addition, we study Wedderburn embeddings of the group algebras $\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]\,\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, $\mathbb{Z}_{(2)}[\zeta_5]^+\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$. The respective image inside a product of matrix algebras over integral domains is an isomorphic copy of the group algebra. We describe it via congruence conditions on the matrix entries.

Finally, we consider certain cuspidal representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ for $p \geqslant 3$. We formulate a conjecture concerning a construction of a cuspidal representation over a minimal field and support it by computational evidence.

OPUS: https://elib.uni-stuttgart.de/handle/11682/19179

# Konstruktionen einfacher Moduln über endlichen Gruppen

Nora Krauß

## Zusammenfassung

Die Arbeit handelt von Konstruktionen einfacher Moduln für Gruppenalgebren von endlichen Gruppen. Gordon James konstruiert für die symmetrische Gruppe $\mathrm{S}_n$ und einen Körper $K$ alle einfachen $K\mathrm{S}_n$-Moduln als Subfaktoren von Permutationsmoduln. Inspiriert von diesem Mechanismus werden Bedingungen an ein Tripel von Untergruppen einer beliebigen Gruppe $G$ gestellt, die gewährleisten, dass der resultierende $KG$-Modul null oder irreduzibel ist. Es ist allerdings nicht möglich, jeden irreduziblen Modul mit Hilfe eines solchen James-Tripels zu erzeugen. Um die Grenzen der Konstruktion auszuweiten, wird die Methode auf James-Quadrupel verallgemeinert. Aber auch dieser Ansatz liefert nicht alle einfachen Moduln.

Im weiteren Verlauf wird zu einer gegebenen Partition von $n$ ein alternativer Erzeuger für den zugehörigen unipotenten Specht-Modul der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ konstruiert. Dies erfolgt unabhängig von James-Tripeln/Quadrupeln, wenn es auch Ähnlichkeiten gibt.

Desweiteren werden die Gruppenalgebren $\mathbb{Z}\,\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$, $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]\,\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ und $\mathbb{Z}_{(2)}[\zeta_5]^+\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_4)$ mittels ihrer jeweiligen Wedderburn-Einbettung in ein Produkt von Matrixalgebren über Integritätsbereichen beschrieben. Das Bild einer solchen Einbettung ist eine isomorphe Kopie der betrachteten Gruppenalgebra. Es wird eine explizite Beschreibung des jeweiligen Bildes durch Kongruenzen von Matrixeinträgen angegeben.

Schließlich werden bestimmte kuspidale Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ für $p \geqslant 3$ betrachtet. Ausgehend von computergestützten Berechnungen formulieren wir eine Vermutung zur Konstruktion einer kuspidalen Darstellung über einem minimalen Grundkörper.

OPUS: https://elib.uni-stuttgart.de/handle/11682/19179