

Abstract

Einstein metrics originally arose in the context of General Relativity when considering the field equations of gravitation in a vacuum, but have since been noted by Riemannian geometers to be excellent objects of study. This is because the Einstein condition – i.e. the constancy of Ricci curvature – is an ideal intermediate condition between the very restrictive setting of constant sectional curvature on the one hand, only allowing for spherical, Euclidean and hyperbolic geometry, and the very lax condition of constant scalar curvature on the other hand, being achievable by conformal transformations from any given Riemannian metric.

It is possible to characterize Einstein metrics as the critical points of the Einstein–Hilbert functional S restricted to metrics of a fixed volume. This raises the question of what the critical point type for a given Einstein metric g is. As it stands, this question is swiftly answered: it turns out that g is always a saddle point. Only after restricting to the subset of constant scalar curvature metrics, g may (or may not) turn out to be *stable*, i.e. a local maximum of S . The second variation of S at g allows in any case for a finite coindex and nullity. The behavior of S is, at least to second order, governed by the spectral properties on an elliptic Laplace-type differential operator on symmetric 2-tensors, called the Lichnerowicz Laplacian.

Closely related to stability is the rigidity problem – that is, whether a given Einstein metric g is isolated in the moduli space $\mathcal{E}$ of Einstein metrics. The null directions of S correspond to infinitesimal perturbations of the metric, and it is a priori not clear whether a given such perturbation is in fact integrable, that is, tangent to a proper curve in $\mathcal{E}$.

Both problems are particularly interesting in the presence of symmetry, for example on a homogeneous space. The Einstein equation, being an elliptic partial differential equation, reduces for invariant metrics on homogeneous spaces to a polynomial equation. Likewise, the homogeneous structure allows reducing many analytic problems to problems in representation theory, owing to the applicability of harmonic analysis. The Lichnerowicz Laplacian, an invariant differential operator, may be analyzed in the Fourier image, opening the door to an algebraic treatment of the stability problem on homogeneous spaces.

The rigidity problem for homogeneous Einstein metrics is tied to the Finiteness Conjecture which states that there are essentially only finitely many solutions of the invariant

Einstein equations on any compact homogeneous space. Given an infinitesimal perturbation of the metric, there are polynomial obstructions to integrability which may, in the homogeneous setting, also be tackled using representation-theoretic methods.

The idea of employing harmonic analysis to study the stability and deformability of homogeneous Einstein manifolds was first brought forward by Koiso in the 1980s, who settled the stability question for most of the irreducible symmetric spaces of compact type. He left open a few gaps which were only recently closed, partially by the results of the current thesis and partially by Semmelmann–Weingart.

The symmetric setting is particularly nice since the Licherowicz Laplacian coincides with a natural representation-theoretic object called the Casimir operator. This fails to hold if the space under consideration is not symmetric. However, for the much broader class of normal homogeneous spaces, Casimir operators are still readily available. As a first expedition into the non-symmetric world, the current thesis studies homogeneous Gray manifolds, that is, strict nearly Kähler manifolds in dimension six. Here, the Lichnerowicz Laplacian is still more or less explicitly related to a Casimir operator. The coindex of S as well as the rigidity are completely determined for the known list of homogeneous Gray manifolds.

For other normal homogeneous Einstein manifolds such an explicit relation has not been available. At the heart of the current work lies a new explicit formula for the Lichnerowicz Laplacian in terms of various Casimir operators, which is of course considerably more complicated than in the symmetric setting. This is subsequently used to systematically analyze the stability of normal homogeneous spaces – in particular, using an estimation-based approach and with computer aid we obtain explicit results for many normal homogeneous spaces with simple transitive group, these having previously been classified by Wang, Wolf and Ziller.

An interesting member of the class of normal homogeneous spaces is the generalized Wallach space $E_7/PSO(8)$. As one of the few generalized Wallach spaces that have been observed by E. Lauret, J. Lauret and Will to be invariantly stable in a more restrictive sense, the current thesis shows its stability by analyzing a certain curvature operator. This is notable not only because it provides the first known example of a non-symmetric stable Einstein metric of positive scalar curvature, but also because the curvature term and the Lichnerowicz Laplacian are much more elusive than in the symmetric case: calculating their eigenvalues is in general very difficult, forcing us to resort to estimates that are not always sharp.

Zusammenfassung

Der Begriff der Einstein-Metrik stammt ursprünglich aus der Allgemeinen Relativitätstheorie und bezeichnet dort eine Lösung der Feldgleichungen der Gravitation im Vakuum. Seitdem erwiesen sich Einstein-Metriken auch im Kontext der Riemannschen Geometrie als exzellente Studienobjekte. Dies rührt daher, dass die Einstein-Bedingung – also die Eigenschaft konstanter Ricci-Krümmung – einen idealen Mittelweg bildet zwischen der sehr starren Bedingung konstanter Schnittkrümmung, welche im Wesentlichen zur sphärischen, euklidischen oder hyperbolischen Geometrie führt, und der eher lockeren Bedingung konstanter Skalarkrümmung, von welcher jede beliebige Riemannsche Metrik nur eine konforme Transformation entfernt ist.

Einstein-Metriken können als kritische Punkte des Einstein–Hilbert-Funktional S , eingeschränkt auf Metriken festen Volumens, charakterisiert werden. Dies wirft die Frage auf, was für eine gegebene Einstein-Metrik g der Typ des kritischen Punktes ist. Die so gestellte Frage lässt sich leicht beantworten: wie sich herausstellt, ist g stets ein Sattelpunkt. Schränken wir S jedoch auf die Teilmenge der Metriken konstanter Skalarkrümmung ein, dann kann es passieren, dass g ein lokales Maximum ist. In jedem Falle lässt die zweite Variation von S an der Stelle g nur endlichen Koindex und Nullität zu. Das Verhalten von S ist zumindest zur zweiten Ordnung durch die spektralen Eigenschaften eines gewissen elliptischen Differentialoperators vom Laplace-Typ auf symmetrischen 2-Tensoren bestimmt, dem sogenannten Lichnerowicz–Laplace-Operator.

Eng verwoben mit der Stabilität ist das Problem der Starrheit – das heißt, ob eine gegebene Einstein-Metrik g im Modulraum $\mathcal{E}$ der Einstein-Metriken isoliert ist. Die Nullrichtungen von S entsprechen infinitesimalen Störungen der Metrik und es ist a priori nicht klar, ob eine solche Störung integrierbar ist, also ob man sie als tangential zur einer echten Kurve in $\mathcal{E}$ verstehen kann.

Beide Probleme sind von besonderem Interesse, wenn Symmetrien ins Spiel kommen, wie zum Beispiel auf homogenen Räumen. Die Einstein-Gleichung, welche ja eine elliptische partielle Differentialgleichung ist, reduziert sich für invariante Metriken auf homogenen Räumen auf eine polynomielle Gleichung. Ähnlich erlaubt die homogene Struktur, viele analytische Probleme auf darstellungstheoretische Probleme herunterzubrechen, was letztlich der Anwendbarkeit harmonischer Analysis zu verdanken ist. Der Lichnerowicz–Laplace-Operator kann als invarianter Differentialoperator im Fourier-Bild analysiert wer-

den, was Tür und Tor zu einer algebraischen Betrachtung des Stabilitätsproblems für homogene Räume öffnet.

Das Starrheitsproblem für homogene Einstein-Mannigfaltigkeiten hängt überdies mit der Endlichkeitsvermutung zusammen, welche besagt, dass es auf jedem kompakten homogenen Raum im Wesentlichen höchstens endlich viele Lösungen der invarianten Einstein-Gleichungen gibt. Zu jeder infinitesimalen Deformation der Metrik gibt es polynomielle Obstruktionen gegen die Integrabilität, welche im homogenen Fall auch mit darstellungstheoretischen Methoden untersucht werden können.

Die Idee, harmonische Analysis zur Untersuchung der Stabilität und Starrheit homogener Räume einzusetzen, wurde erstmalig von Koiso in den 1980er-Jahren vorgebracht, welcher die Stabilitätsfrage für die meisten irreduziblen symmetrischen Räume kompakten Typs klärte. Er ließ allerdings ein paar Lücken, welche erst vor Kurzem geschlossen werden konnten – teils durch diese Dissertation, teils durch die Ergebnisse von Semmelmann–Weingart.

Der symmetrische Fall ist besonders angenehm, da der Lichnerowicz–Laplace-Operator dort mit einem natürlichen darstellungstheoretischen Objekt zusammenfällt – dem Casimir-Operator. Dies gilt nicht mehr, wenn der Raum nicht symmetrisch ist. Für die größere Klasse von normalen homogenen Räumen bieten sich Casimir-Operatoren jedoch immer noch an. Als erste Expedition in die nicht-symmetrische Welt untersucht die vorliegende Dissertation homogene Gray-Mannigfaltigkeiten, das heißt, strikte *nearly-Kähler*-Mannigfaltigkeiten in Dimension sechs. Der Lichnerowicz–Laplace-Operator steht hier immer noch mehr oder weniger explizit in Relation mit einem Casimir-Operator. Der Koindex von S sowie die Starrheit werden für die bekannte Liste homogener Gray-Mannigfaltigkeiten vollständig bestimmt.

Eine entsprechend explizite Relation gab es für allgemeine normale homogene Einstein-Mannigfaltigkeiten bisher nicht. Das Herzstück dieser Arbeit bildet eine neue Formel, welche den Lichnerowicz–Laplace-Operator durch verschiedene Casimir-Operatoren ausdrückt. Diese ist natürlich deutlich komplizierter als im symmetrischen Fall. Im Weiteren wird diese genutzt, um systematisch die Stabilität normaler homogener Räume zu analysieren – insbesondere erhalten wir durch einen auf Abschätzungen basierenden Ansatz und mit Computerunterstützung explizite Ergebnisse für viele normal homogene Räume mit einfacher transitiver Gruppe. Letztere wurden zuvor von Wang, Wolf und Ziller klassifiziert.

Ein interessanter normaler homogener Raum ist der verallgemeinerte Wallach-Raum $E_7/PSO(8)$. Er ist einer der wenigen verallgemeinerten Wallach-Räume, die von E. Lauret, J. Lauret und Will als stabil in einem restriktiveren, invarianten Sinne identifiziert wurden. In der vorliegenden Dissertation zeigen wir seine Stabilität, indem ein gewisser Krümmungsoperator analysiert wird. Dies ist aus zwei Gründen bemerkenswert: erstens,

weil damit das erste bekannte Beispiel einer nicht-symmetrischen stabilen Einstein-Metrik positiver Skalarkrümmung gefunden ist, und zweitens, weil der Krümmungsterm und der Lichnerowicz–Laplace-Operator sich einer einfachen Behandlung wie im symmetrischen Fall entziehen: die Berechnung ihrer Eigenwerte ist im Allgemeinen schwierig, was uns dazu zwingt, Abschätzungen einzusetzen, die nicht immer scharf sein müssen.