Abstract

This thesis addresses several questions about properties and asymptotic behaviours of eigenvalues of the non-self-adjoint Robin Laplacian $-\Delta_\Omega^\alpha$, that is, of the eigenvalue problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u &= 0 && \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

where Ω is either a bounded (smooth or Lipschitz) domain in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, or a compact quantum graph and α is a parameter. In recent years a large body of literature has developed around these questions in the self-adjoint case, that is, for a real Robin parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, and it is a natural question to ask whether those results can be generalised for $\alpha \in \mathbb{C}$; and this is the question we want to pursue here. According to the vast amount of recent literature, there seems to be a burgeoning interest in the spectral properties of the Robin Laplacian, which is why we want to give a comprehensive overview on this subject. After a brief summary on the results for the self-adjoint Robin Laplacian, presented to gain insight into what to expect for $\alpha \in \mathbb{C}$, we start by proving regularity results on the eigenvalues λ as (meromorphic) functions of α. Besides, we answer the question whether one can find an orthonormal basis (or weaker types of bases) of $L^2(\Omega)$ consisting of Robin eigenfunctions. Our main interests, however, are the localisation of the spectrum as well as the asymptotic behaviour of λ as functions of α as $\alpha \to \infty$ in $\mathbb{C}$. The tools commonly used to study spectral properties of self-adjoint Laplace operators are totally inapplicable as they rely on the variational min-max characterisation of eigenvalues, test-function arguments, and Dirichlet-Neumann bracketing techniques. However, all these techniques become useless if non-self-adjoint operators are considered; and this is the case as soon as $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$. To this end, we use two different approaches in order to study properties of the eigenvalues as well as their asymptotic behaviour as functions of α as $\alpha \to \infty$ in $\mathbb{C}$.

Firstly, we establish trace-type inequalities for functions on smooth and non-smooth domains Ω to prove a localisation theorem for the eigenvalues. This allows us to show

that, for fixed α, the entire spectrum (or more precisely the numerical range of $-\Delta_\Omega^\alpha$) is contained in a parabolic region in $\mathbb{C}$. What is more, this localisation theorem gives us control over both the real and imaginary parts of any eigenvalue in terms of the real and imaginary parts of α, which then implies eigenvalue estimates for Lipschitz domains that are new even in the real case. This approach is further applied to compact quantum graphs, that is, metric graphs on which the Laplace operator acts. To this end, we consider such graphs, where some (or all of the) vertices are equipped with, possibly different, Robin parameters $\alpha_j \in \mathbb{C}$ (also called δ couplings) and on the remaining vertices continuity-Kirchhoff (also called Neumann–Kirchhoff) conditions are imposed.

Secondly, we exploit a duality result for the Dirichlet-to-Neumann operator $M(\lambda)$ which is already known in the self-adjoined case: a number $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue of the Robin Laplacian with parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ if and only if α is an eigenvalue of the Dirichlet-to-Neumann operator with parameter λ. As it turns out, it is often more convenient to study the eigenvalues α of $M(\lambda)$ instead of the eigenvalues λ of $-\Delta_\Omega^\alpha$ and this is the path we take. This approach yields several results for domains and quantum graphs, respectively: on the one hand, we consider explicit examples of domains $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, such as intervals and higher dimensional hyperrectangles and balls. We use explicit calculations in order to obtain a detailed analysis of the problem; we give asymptotic error terms for the eigenvalue asymptotics and we compare their behaviour to what happens in the real case. On the other hand, the same Dirichlet-to-Neumann duality approach applied to quantum graphs not only allows us to prove a dichotomy result on what happens to λ when $\alpha \to \infty$ in certain regimes of the complex plane, but since $M(\lambda)$ can be calculated more or less explicitly, we give an (almost) complete answer to the question of the asymptotic behaviour as the Robin parameters $\alpha_j \to \infty$ in certain regimes.

Zusammenfassung

Diese Dissertation befasst sich mit den spektralen Eigenschaften des nicht-selbstadjungierten Robin Laplace Operators $-\Delta_\Omega^\alpha$, d.h. mit den Eigenwerten des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u &= 0 && \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei ist Ω entweder ein beschränktes (glattes oder Lipschitz) Gebiet im $\mathbb{R}^d$ oder ein kompakter Quantengraph und die Zahl α ist ein Parameter. Insbesondere von Interesse ist dabei das asymptotische Verhalten der Eigenwerte in Abhängigkeit vom Robin-Parameter α. In den letzten Jahren entwickelte sich eine große Anzahl an Artikeln, die sich mit dem Robin-Laplace im selbstadjungierten Fall, d.h. für reelle Robin-Parameter α, beschäftigen. Wir stellen uns die Frage, ob die Resultate auf den Fall $\alpha \in \mathbb{C}$ verallgemeinert und ob neue Erkenntnisse aus dieser Untersuchung gezogen werden können; und dies wollen wir als Anlass nutzen, um einen umfassenden Überblick über das Thema zu geben und dabei neue Resultate zu präsentieren. Um ein Gefühl für das Problem selbst und die Erwartungen für den komplexen Fall zu bekommen, fassen wir zunächst die bekannten Resultate im selbstadjungierten Fall zusammen. Für komplexes α untersuchen wir die Eigenwerte λ in Abhängigkeit vom Parameter α und zeigen, dass es sich dabei um meromorphe Funktionen handelt. Außerdem beantworten wir die Frage, wann man eine Orthonormalbasis des $L^2(\Omega)$ aus Eigenfunktionen finden kann und betrachten im Zuge dessen auch schwächere Basis-Begriffe. Unser Hauptinteresse besteht jedoch zum einen in der Lokalisierung des Spektrums und zum anderen im asymptotischen Verhalten der Eigenkurven λ, wenn α in $\mathbb{C}$ gegen Unendlich strebt. Üblicherweise wird im Kontext selbstadjungierter Operatoren auf Werkzeuge wie die variationelle min-max Charakterisierung von Eigenwerten, Testfunktionsargumente oder das Dirichlet-Neumann-Bracketing zurückgegriffen. All diese Techniken basieren jedoch darauf, dass der zugrundeliegende Operator selbstadjungiert ist. Da dies nicht mehr der Fall ist, sobald $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$ gilt, müssen wir auf alternative Techniken ausweichen und wir

verwenden daher zwei verschiedene Ansätze, um die Eigenschaften von Eigenwerten sowie ihr asymptotisches Verhalten zu untersuchen.

Zunächst stellen wir Spurungleichungen für Funktionen auf glatten und Lipschitz Gebieten auf und beweisen damit ein Lokalisierungstheorem. Dieses besagt, dass für feste Parameter α das gesamte Spektrum (oder genauer, der numerische Wertebereich) innerhalb eines parabolischen Bereichs in $\mathbb{C}$ liegt. Darüberhinaus lässt es uns ebenso den Real- und Imaginärteil von λ mithilfe des Real- und Imaginärteils von α kontrollieren. Dies wiederum liefert Eigenwertabschätzungen auf Lipschitz Gebieten, die selbst im reellen Fall neu sind. Den Ansatz, den numerischen Wertebereich zu untersuchen, wenden wir ebenfalls auf Quantengraphen an. Dabei handelt es sich um metrische Graphen bestehend aus Knoten und Kanten, wobei der Laplace Operator auf letzteren wirkt und die Knoten als Rand des Graphen interpretiert werden können. Zu diesem Zweck betrachten wir Graphen, bei welchen einige (oder alle) Knoten mit (möglicherweise unterschiedlichen) Robin-Parametern $\alpha_j \in \mathbb{C}$ versehen sind. Die restlichen Knoten genügen dabei der Stetigkeits- und Kirchhoff-Bedingung (auch Neumann–Kirchhoff-Bedingung genannt).

Zweitens nutzen wir eine aus dem selbstadjungierten Fall bekannte Dualitätsaussage zwischen dem Robin-Laplace und dem Dirichlet-zu-Neumann Operator $M(\lambda)$. Dieses besagt, dass eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwert des Robin-Laplace mit Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ ist, wenn α ein Eigenwert des Dirichlet-zu-Neumann Operators zum Parameter λ ist: Eine Analyse der Eigenwerte α von $M(\lambda)$ ist oft günstiger als die der Robin Eigenwerte λ. Dieser Ansatz liefert mehrere Resultate, sowohl im Bezug auf Gebiete als auch für Quantengraphen. Einerseits betrachten wir konkrete Modelfälle, wie etwa Intervalle und höherdimensionale Quader und Kugeln. Dabei nutzen wir explizit durchgeführte Berechnungen, um möglichst viele Details und Zusammenhänge herauszuarbeiten; wir geben im Zuge dessen auch asymptotische Fehlerterme der Eigenwertasymptotik(en) an und vergleichen diese erneut mit den Resultaten des selbstadjungierten Problems. Andererseits liefert der selbe Dirichlet-zu-Neumann Ansatz für Quantengraphen ein Dichotomie-Resultat mit Informationen darüber, wie sich λ verhalten kann, wenn α auf eine gewisse Art und Weise gegen Unendlich divergiert. Da sich in diesem Fall $M(\lambda)$ mehr oder minder explizit berechnen lässt, geben wir ebenfalls eine (fast) vollständige Antwort auf die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Eigenwerte auf beliebigen kompakten Quantengraphen, wenn α unter gegebenen Voraussetzungen gegen Unendlich strebt.