

Abstract

We consider the functor from the stable module category to the homotopy category constructed by Kato. This functor gives an equivalence between the stable module category and a full subcategory \mathcal{L} of the unbounded homotopy category of projective modules. Moreover, the functor induces a correspondence between distinguished triangles in the homotopy category and perfect exact sequences in the module category.

In general, the stable module category and the category \mathcal{L} are not triangulated. We provide a description of a triangulated hull of \mathcal{L} inside the homotopy category and discuss its Grothendieck group. We also construct a larger subcategory which is shown to be characteristic inside the homotopy category under suitable assumptions. Both subcategories coincide with \mathcal{L} if and only if the algebra is self-injective. Furthermore, stable equivalence of Morita type are shown to preserve both subcategories.

Another focus is put on the relationship between stable equivalences and perfect exact sequences. On the one hand, we give sufficient conditions for a stable equivalence to preserve perfect exact sequences up to projective direct summands. A stable equivalence which preserves perfect exact sequences in this way is shown to induce a triangulated equivalence between the categories of stable Gorenstein-projective modules. On the other hand, given a stable equivalence that is induced by an exact functor, we provide various sufficient conditions under which the equivalence is a stable equivalence of Morita type. In particular, stable equivalences of Morita type arise from equivalences that are given by tensoring with an arbitrary bimodule on the level of the category \mathcal{L} .

Finally, we give a description of all algebras that can be obtained by deleting or inserting nodes via stable equivalences constructed by Koenig and Liu.

Zusammenfassung

Wir betrachten den Funktor von der stabilen Modulkategorie in die Homotopiekategorie, der von Kato konstruiert wurde. Hierdurch ergibt sich eine Äquivalenz zwischen der stabilen Modulkategorie und einer vollen Teilkategorie \mathcal{L} der unbeschränkten Homotopiekategorie von projektiven Moduln. Der Funktor induziert außerdem eine Korrespondenz zwischen den ausgezeichneten Dreiecken in der Homotopiekategorie und den perfekt exakten Sequenzen in der Modulkategorie.

Die stabile Modulkategorie und die Kategorie \mathcal{L} sind im Allgemeinen nicht trianguliert. Wir geben eine Beschreibung einer triangulierten Hülle von \mathcal{L} innerhalb der Homotopiekategorie an und untersuchen ihre Grothendieck Gruppe. Weiterhin konstruieren wir eine größere Teilkategorie, die unter geeigneten Annahmen eine charakteristische Teilkategorie der Homotopiekategorie ist. Beide Teilkategorien stimmen genau dann mit der Kategorie \mathcal{L} überein, wenn die Algebra selbstinjektiv ist. Zusätzlich zeigen wir, dass stabile Äquivalenzen vom Morita Typ beide Teilkategorien erhalten.

Ein weiterer Schwerpunkt wird auf den Zusammenhang zwischen stabilen Äquivalenzen und perfekt exakten Sequenzen gelegt. Zum Einen werden hinreichende Bedingungen angegeben, unter welchen eine stabile Äquivalenz perfekt exakte Sequenzen, bis auf projektive direkte Summanden, erhält. Es wird gezeigt, dass eine stabile Äquivalenz, die perfekt exakte Sequenzen in diesem Sinne erhält, eine triangulierte Äquivalenz zwischen den Kategorien der stabilen Gorenstein-projektiven Moduln induziert. Zum Anderen betrachten wir stabile Äquivalenzen, die von einem exakten Funktor induziert werden. Wir geben verschiedene hinreichende Bedingungen an, unter welchen solche Äquivalenzen eine stabile Äquivalenz vom Morita Typ sind. Insbesondere führen Äquivalenzen auf der Ebene der Kategorie \mathcal{L} , welche durch ein Tensorprodukt mit einem beliebigen Bimodul gegeben sind, zu stabilen Äquivalenzen vom Morita Typ.

Schließlich konstruieren wir alle Algebren, die durch das Streichen oder Einsetzen von Knoten entstehen können. Dies benutzt die Beschreibung solcher stabiler Äquivalenzen von Koenig und Liu.