Inhomogeneous Fractals as a Martin Boundary

by Stefan Kohl, University of Stuttgart

Zusammenfassung

Wir betrachten in dieser Arbeit inhomogene Fraktale und repräsentieren diese als Martin–Ränder. Die Martin–Rand–Theorie ist ein wichtiger Zugang für Analysis auf Fraktalen, wurde jedoch bisher nur für homogene Fraktale betrachtet. Genauer betrachten wir selbst–ähnliche Fraktale, welche durch iterierte Funktionensysteme (IFSe) generiert werden und führen eine Gewichtsfunktion ein, welche ein selbst–ähnliches Maß auf dem Fraktal erzeugt.

Im ersten Abschnitt definieren wir eine Markovkette auf dem Wortraum, wobei der Wortraum mit dem Fraktal identifiziert werden kann. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markovkette werden dabei an die Gewichtsfunktion angelehnt. Diese können dadurch beliebig klein werden, die bisherigen Resultate für homogene Fraktale sind nicht anwendbar und wir überarbeiten die Martin–Rand–Theorie auf Fraktalen unter diesem neuen Gesichtspunkt. Dazu führen wir drei Bedingungen ein, wobei (B2) von zentraler Bedeutung ist. Dabei können wir beweisen, dass der Martin–Rand unter diesen Bedingungen homöomorph zum Fraktal ist.

Im zweiten Teil untersuchen wir die Bedingung (B2) eingehender. Dabei drehen wir in gewisser Weise die Fragestellung um und untersuchen, wann (B2) erfüllt ist. Dabei erarbeiten wir, dass das Erfüllen von (B2) vom gewählten IFS abhängt, falls wir ein fixiertes Fraktal betrachten. Wir zeigen, dass (B2) nicht durch eine andere, bekannte Bedingung wie „nested“ oder „p.c.f.“ induziert wird. Wir geben zudem ein allgemeines, inhomogenes Beispiel an, welches (B2) erfüllt und IFSe von beliebiger Kardinalität zulässt.

Der letzte Teil der Arbeit ist eher praktischer Natur: Wir entwickeln einen Computeralgorithmus, welcher bestimmt, welche inhomogenen Gewichtsfunktionen auf einem Fraktal (B2) erfüllen. Der Algorithmus berechnet dabei die maximale Anzahl an inhomogenen Gewichten durch zwei unterschiedliche Modi: der konstruktive Algorithmus bestimmt dabei explizit, welche Gewichte frei gewählt werden können. Im Gegensatz dazu berechnet der existenzielle Algorithmus lediglich deren genaue Anzahl mit einer deutlich kürzeren Rechenzeit. Wir wenden abschließend beide Algorithmen auf einige bekannte Fraktale an und beobachten, dass die Anzahl an freien Gewichten sich sehr unterscheidet. Der Vollständigkeit halber ist der komplette Quellcode zum Algorithmus angehängt.

Inhomogeneous Fractals as a Martin Boundary

by Stefan Kohl, University of Stuttgart

Abstract

In this thesis we consider inhomogeneous fractals and represent them as Martin boundaries. The representation of fractals by Martin boundary theory is one of the important tools for analysis on fractals, but has been so far only considered for homogeneous fractals. In particular, we examine self–similar fractals generated by iterated function systems (IFSs), where we can introduce a mass function which generates a self–similar measure on the fractal.

In the first part we introduce a Markov chain on the word space, where the word space can be associated to the fractal. We adapt the transition probabilities of the Markov chain according to the mass function. As a consequence of this, the transition probabilities can get arbitrarily small, hence the results on homogeneous fractals can not be applied, and the Martin boundary theory on fractals has to be revised. We set up three conditions, whereas (B2) is the central condition. We are able to prove that the Martin boundary of the Markov chain is homeomorphic to the weighted fractal under these conditions.

In the second part we take a closer look at Condition (B2). We reverse the condition in some sense and examine, in which cases (B2) can be fulfilled. We elaborate that the fulfillment of (B2) mainly depends on the chosen iterated function system for a fixed fractal. Further we disprove that (B2) can be induced by a well–known property of fractals like “nested” or “p.c.f.”. We give a general example which shows that (B2) is satisfied with inhomogeneous mass function for IFSs with any cardinality.

The last part of the thesis is a more practical work: we develop a computer algorithm which determines for which inhomogeneous mass functions a fractal fulfills (B2). The algorithm computes the maximum number of weights that can be chosen. To this end we give two modes of the algorithm: a constructive way and existential way. The constructive way calculates exactly which weights can be freely chosen, whereas the existential algorithm calculates the exact number only. The benefit of the existential algorithm is a shorter calculating time. We apply the algorithm to some common fractals and observe that the number of free weights varies a lot. For the sake of completeness, the complete source code is appended.