Abstract

In algebraic geometry, a resolution of singularities is, roughly speaking, a replacement of a local commutative Noetherian ring of infinite global dimension by a local commutative Noetherian ring of finite global dimension. In representation theory, an analogous problem is asking to resolve algebras of infinite global dimension by algebras of finite global dimension. In addition, such resolutions should have nicer properties to help us study the representation theory of algebras of infinite global dimension. This motivates us to take split quasi-hereditary covers as these algebraic analogues of resolutions of singularities and measure their quality using generalisations of dominant dimension and deformation results based on change of rings techniques.

The Schur algebra, $S_R(n,d)$ with $n \geq d$, together with the Schur functor is a classical example of a split quasi-hereditary cover of the group algebra of the symmetric group, RS_d, for every commutative Noetherian ring R. The block algebras of the classical category $\mathcal{O}$, together with their projective-injective module, are split quasi-hereditary covers of subalgebras of coinvariant algebras.

In this thesis, we study split quasi-hereditary covers, and their quality, of some cellular algebras over commutative Noetherian rings. The quality of a split quasi-hereditary cover can be measured by the fully faithfulness of the Schur functor on standard modules and on m-fold extensions of standard modules. Over fields, the dominant dimension controls the quality of the split quasi-hereditary cover of KS_d formed by the Schur algebra $S_K(n,d)$ and the Schur functor. In particular, this quality improves by increasing the characteristic of the ground field. To understand the integral cases, the classical concept of dominant dimension is not useful since in most cases there are no projective-injective modules.

Using relative homological algebra, we develop and study a new concept of dominant dimension, which we call relative dominant dimension, for Noetherian algebras which are projective over the ground ring making this concept suitable for the integral setup. For simplicity, we call Noetherian algebras which are projective over the ground ring just projective Noetherian algebras. While developing the theory of relative dominant dimension, we generalize the Morita-Tachikawa correspondence for projective Noetherian algebras and we prove that computations of relative dominant dimension over projective Noetherian algebras can be reduced to computations of dominant dimension over finite-dimensional algebras over algebraically closed fields. Using relative dominant dimension, concepts like Morita algebras and gendo-symmetric algebras can be defined for Noetherian algebras.

We compute the relative dominant dimension of Schur algebras $S_R(n,d)$ for every commutative Noetherian ring R. Using such computations together with deformation results that involve the spectrum of the ground ring R we determine the quality of the split quasi-hereditary covers of RS_d, $(S_R(n,d), V^{\otimes d})$ formed by the Schur algebra $S_R(n,d)$ and the Schur functor $\operatorname{Hom}_{S_R(n,d)}(V^{\otimes d}, -)\colon S_R(n,d)\text{-mod} \to RS_d\text{-mod}$ for all regular Noetherian rings. Over local commutative regular rings R, the quality of $(S_R(n,d), V^{\otimes d})$ depends only on the relative dominant dimension and on R containing a field or not. For this cover, the quality improves compared with the finite-dimensional case whenever the local commutative Noetherian ring does not contain a field. This theory is also applied to q-Schur algebras and Iwahori-Hecke algebras of the symmetric group.

In full generality, we prove that the quality of a split quasi-hereditary cover of a finite-dimensional algebra B is bounded above by the number of non-isomorphic simple B-modules.

Other split quasi-hereditary algebras that we study in this thesis are deformations of block algebras of the Bernstein-Gelfand-Gelfand category $\mathcal{O}$ of a semi-simple Lie algebra. These deformations provide split quasi-hereditary covers of deformations of subalgebras of coinvariant algebras. We compute the relative dominant dimensions of these block algebras and we determine the quality of these covers. In these deformations, the quality dramatically improves compared with the finite-dimensional case.

Using approximation theory to generalize once more the concept of dominant dimension to relative dominant dimension with respect to direct summands of the characteristic tilting module, we find new split quasi-hereditary covers. In particular, the relative dominant dimension of a characteristic tilting module of $S_R(n,d)$ with respect to $V^{\otimes d}$ is a lower bound of the quality of a split quasi-hereditary cover of the cellular algebra $\mathrm{End}_{S_R(n,d)}(V^{\otimes d})^{op}$, independent of the natural numbers n and d. This split quasi-hereditary cover involves the Ringel dual of the Schur algebra $S_R(n,d)$.

Using this technology for deformations of block algebras of the classical BGG category $\mathcal{O}$ of a semi-simple Lie algebra, we obtain a new proof for Ringel self-duality of the blocks of the classical BGG category $\mathcal{O}$ of a complex semi-simple Lie algebra. Here, the uniqueness of split quasi-hereditary covers of deformations of subalgebras of coinvariant algebras with higher quality is the crucial factor to deduce Ringel self-duality.

Zusammenfassung

Eine Singularität aufzulösen bedeutet in der algebraischen Geometrie, sehr vereinfacht gesagt, einen lokalen kommutativen noetherschen Ring unendlicher globaler Dimension durch einen lokalen kommutativen noetherschen Ring endlicher globaler Dimension zu ersetzen. Ein analoges Problem in der Darstellungstheorie fragt nach Auflösungen von Algebren unendlicher globaler Dimension durch Algebren endlicher globaler Dimension. Zusätzlich soll eine solche Auflösung gute Eigenschaften besitzen, die helfen die Darstellungstheorie der gegebenen Algebren unendlicher globaler Dimension zu untersuchen. Dies motiviert die Wahl (split) quasi-erblicher Decken als algebraische Entsprechungen von Auflösungen von Singularitäten, wobei die Qualität einer Decke mit Hilfe von (verallgemeinerter) dominanter Dimension und durch Deformationen in Verbindung mit *change of rings* Methoden bestimmt werden soll.

Ein klassisches Beispiel einer solchen „Auflösung" ist die Schuralgebra $S_R(n,d)$ mit $n \geq d$, über einem kommutativen noetherschen Ring R, als „Auflösung" der Gruppenalgebra RS_d der symmetrischen Gruppe S_d, wobei der Tensorraum und der Schurfunktor die Darstellungstheorien der beiden Algebren verbinden. Ein anderes Beispiel sind die Algebren zu den Blöcken der klassischen Bernstein-Gelfand-Gelfand Kategorie $\mathcal{O}$ halbeinfacher komplexer Lie-Algebren, die durch die projektiv-injektiven Moduln split quasi-erbliche Decken von Koinvariantenalgebren sind.

Allgemeiner werden in dieser Dissertation split quasi-erbliche Decken, und deren Qualität, von Klassen zellulärer Algebren über kommutativen noetherschen Ringen untersucht. Die Qualität kann gemessen werden durch die Volltreue des Schurfunktors auf Standardmoduln und auf deren m-fachen Erweiterungen in einem möglichst großen Intervall von Graden. Über Körpern kontrolliert die dominante Dimension diese Qualität und die Qualität verbessert sich mit wachsender Charakteristik des Grundkörpers. Um ganzzahlige Situationen zu verstehen ist die klassische dominante Dimension aber nicht geeignet, da meistens projektiv-injektive Moduln fehlen.

Deshalb wird relative homologische Algebra eingesetzt, um ein neues und allgemeineres Konzept – relative dominante Dimension – zu entwickeln, über projektiv-noetherschen Algebren, das heisst, noetherschen Algebren, die projektiv über dem Grundring sind. Damit werden ganzzahlige Situationen erfasst. Während wir diese Theorie entwickeln erweitern wir die Morita-Tachikawa Korrespondenz entsprechend und zeigen, wie die Berechnung der relativen dominanten Dimension zurückgeführt werden kann auf die Berechnung der dominanten Dimension endlich-dimensionaler Algebren über algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern. Über die relative dominante Dimension können auch Konzepte wie Morita-Algebren und gendo-symmetrische Algebren für projektiv-noethersche Algebren definiert werden.

Die relative dominante Dimension der Schuralgebren $S_R(n,d)$ wird über allen kommutativen noetherschen Ringen R berechnet. Die Verbindung solcher Berechnungen mit Deformationsergebnissen bezüglich des Spektrums des Grundrings R erlaubt für alle regulären noetherschen Ringe R die Bestimmung der Qualität der Auflösung der Gruppenalgebra RS_d durch die Schuralgebra $S_R(n,d)$ und den Tensorraum. Über lokalen kom-

mutativen regulären Ringen R hängt diese Qualität nur von der relativen dominanten Dimension ab und davon, ob R einen Körper enthält oder nicht. Wenn R keinen Körper enthält, ist die Qualität der Auflösung besser als im endlich-dimensionalen Fall. Wir wenden die Theorie auch auf q-Schuralgebren und Iwahori-Hecke-Algebren der symmetrischen Gruppen an.

Ganz allgemein wird für endlich-dimensionale Algebren B gezeigt, dass die Qualität jeder split quasi-erblichen Decke von B durch die Anzahl der nichtisomorphen einfachen B-Moduln nach oben beschränkt ist. Andere hier betrachtete split quasi-erbliche Algebren sind Deformationen von Block-Algebren der BGG-Kategorie $\mathcal{O}$ von halbeinfachen komplexen Lie-Algebren. Diese liefern split quasi-erbliche Decken von Deformationen von (Teilalgebren von) Koinvariantenalgebren. Die relative dominante Dimension wird berechnet und die Qualität der Auflösungen bestimmt. Dabei zeigt sich, dass die Qualität im Vergleich zum endlich-dimensionalen Fall dramatisch verbessert wird.

Mit Approximationstheorie kann die dominante Dimension noch ein weiteres Mal verallgemeinert werden zu einer relativen dominanten Dimension bezüglich direkter Summanden des charakteristischen Kippmoduls. Dadurch finden wir neue split quasi-erbliche Decken. Insbesondere ist die relative dominante Dimension des charakteristischen Kippmoduls bezüglich dem Tensorraum eine untere Schranke für die Qualität einer Auflösung des Endomorphismenrings des Tensorraums – unabhängig von n und d. Dabei ist die zur Schuralgebra Ringel-duale Algebra involviert.

Durch eine Anwendung dieser Methoden auf die Deformationen der Block-Algebren der klassischen BGG-Kategorie $\mathcal{O}$ erhalten wir einen neuen Beweis von Soergels Satz, dass diese Blöcke Ringel selbst-dual sind. Hierfür ist die durch den Übergang zur Deformation verbesserte Qualität der Auflösung entscheidend, um Ringelselbstdualität aus der dann vorliegenden Eindeutigkeit einer Auflösung hinreichend hoher Qualität schließen zu können.