# Abstract

We study PDEs and SPDEs defined by a measure theoretic Laplacian $\Delta_\mu$ with Neumann or Dirichlet boundary conditions, where $\mu$ is a Borel measure on $[0, 1]$. We do not assume that $\mu$ possesses a Lebesgue density, which includes singular measures and especially self-similar measures on Cantor-like sets.

In the first part, we address the question of how to interpret a heat equation defined by $\Delta_\mu$ if the support of $\mu$ is not the whole interval. We show that weak measure convergence implies convergence of the solutions to the corresponding heat equations. This provides an interpretation for the mathematical model of heat diffusion in a rod with gaps in that the heat in this model diffuses approximately like the heat in a rod possessing a strictly positive mass distribution which is small on the gaps of the former rod.

In the second part, we investigate stochastic heat and wave equations, where $\mu$ is a self-similar measure on a Cantor-like set. We prove existence and uniqueness of the mild solution under some Lipschitz and linear growth conditions. Further, we establish Hölder continuity in space and time and determine Hölder exponents. The obtained results generalize the well-known Hölder continuity properties of stochastic heat and wave equations defined by the standard Laplacian.

# Zusammenfassung

Wir untersuchen PDGs und SPDGs, die durch einen maßtheoretischen Laplace-Operator $\Delta_\mu$ mit Neumann- oder Dirichlet-Randbedingungen definiert sind, wobei $\mu$ ein Borelmaß auf $[0, 1]$ ist. Wir stellen nicht die Annahme der Existenz einer Lebesgue-Dichte, was singuläre Maße und insbesondere auch selbstähnliche Maße auf Cantor-ähnlichen Mengen einschließt.

Im ersten Teil befassen wir uns mit der Frage, wie eine durch $\Delta_\mu$ definierte Wärmeleitungsgleichung interpretiert werden kann, wenn der Träger von $\mu$ nicht das gesamte Intervall umfasst. Wir zeigen, dass schwache Maßkonvergenz Konvergenz der Lösungen der zugehörigen Wärmeleitungsgleichungen impliziert. Dies liefert eine Interpretation für das mathematische Model von Wärmeleitung in einem Stab mit Lücken: Die Wärme in diesem Modell diffundiert annähernd wie Wärme in einem lückenlosen Stab, der aber an den Lücken des zuvor betrachteten Stabs hinreichend wenig Masse besitzt.

Im zweiten Teil untersuchen wir stochastische Wärmeleitungs- und Wellengleichungen, wobei $\mu$ ein selbstähnliches Maß auf einer Cantor-ähnlichen Menge ist. Wir beweisen Existenz und Eindeutigkeit der milden Lösung unter der Annahme geeigneter Lipschitz- und linearer Wachstumsbedingungen. Weiterhin weisen wir Hölderstetigkeit in Raum und Zeit nach und bestimmen Hölderexponenten. Die erhaltenen Resultate verallgemeinern die bekannten Hölderstetigkeitseigenschaften von stochastischen Wärmeleitungs- und Wellengleichungen, die durch den Standard-Laplace-Operator definiert sind.