

Randomization and Companion Algorithms in Stochastic Approximation with Semimartingales

Timo Pfrommer

August 14, 2018

Abstract

Methods of stochastic approximations are used for the recursive estimation of parameters of an unknown function which can only be observed with noise. These parameters are for example roots or extreme points. For root-finding the Robbins-Monro algorithm

$$Z_{n+1} = Z_n - a_n Y_n(Z_n) \quad \text{with} \quad Y_n(z) = f(z) - M_n,$$

and $a_n > 0$ is very common. In order to estimate extrema of multivariate functions $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ the Kiefer-Wolfowitz recursion

$$Z_{n+1} = Z_n - a_n Y_n(Z_n)$$

with

$$Y_n(z) = \frac{1}{2c_n} \left\{ (f(z + c_n e_i) - M_{n,i}^+) - (f(z - c_n e_i) - M_{n,i}^-) \right\}_{i \in \{1, \dots, d\}},$$

$a_n > 0$, $c_n > 0$, is widely used. Here only $Y_n(Z_n)$ is observable, but not its individual components. Moreover at each iteration step of the Kiefer-Wolfowitz recursion $2d$ observations are required. In order to reduce the number of observations, randomized stochastic approximation algorithms were introduced, such as

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{a_n}{2c_n} D_n^{-1} \left\{ (f(z + c_n D_n) - M_n^+) - (f(z - c_n D_n) - M_n^-) \right\}$$

with a d -dimensional random sequence D_n and D_n^{-1} its component-wise inverse. These require only two observations per step. Over the years many extensions of such randomized algorithms were developed. Of a special interest is

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{a_n}{c_n} D_n^{-1} \{f(z + c_n D_n) - M_n^+\}$$

which requires actually only one observation per step, using slightly stronger conditions. However one condition, that all these algorithms have in common, is the assumption of D_n being independent and identically distributed (i.i.d.). This makes an extension of such algorithms to a path-continuous setting impossible. In this thesis a unification of the preceding procedures is presented and extended to a semimartingale setting. For that purpose D_n is no longer assumed to be i.i.d. and thereby more sophisticated methods of proof are to be performed.

The first chapter gives a historical introduction to stochastic approximation in general. Moreover semimartingale settings and randomized algorithms are introduced as well as their benefits. After that, a generic randomized semimartingale algorithm is presented. It does not only establish the theory for not yet investigated time-continuous randomized procedures but also contains all known time-discrete special cases as well as non-discovered ones.

Chapter 2 investigates the almost sure convergence of the generic algorithm. Special cases in a semimartingale, time-continuous and time-discrete setting are derived. It turns out that the presented framework also

offers the possibility to handle deterministic perturbation functions which yield the same a.s. convergence results as the randomization processes. Particular examples of useful randomization are handled as well. The chapter closes with visualization of simulation results.

In the third chapter almost sure convergence rates are derived. Again the rates of the randomized semimartingale setting are shown to hold true in the special cases that were presented in previous chapters. Finally the different perturbation designs are compared by simulations of the empirical L^2 -error.

Based on methods for the estimation of roots or extreme points, the second part of this thesis presents a generalized companion stochastic approximation method of the form

$$\Upsilon_n - \Upsilon_{n-1} = -\tilde{a}_n \Upsilon_{n-1} + \tilde{a}_n \tilde{Y}_n(Z_n), \text{ with } \tilde{a}_n > 0, \tilde{Y}_n(Z_n) = G_n(Z_n) + \frac{k_n}{\tilde{a}_n} M_n(Z_n).$$

Here Z_n is generated by a leading algorithm, like the Robbins-Monro or the Kiefer-Wolfowitz procedure and $\tilde{Y}_n(Z_n)$ stands for the noisy observation at Z_n of the parameter of interest. The individual components of $\tilde{Y}_n(Z_n)$, namely the value of the estimator $G_n(Z_n)$, as well as its measuring error $M_n(Z_n)$, are not observable. Companion algorithms can be interpreted as a solution process of a generalized semimartingale stochastic integral equation of the form

$$\Upsilon_t = \Upsilon_0 + \int_0^t \tilde{a}_s (G_s - \Upsilon_{s-}) dR_s + \int_0^t k_s M(ds, \Upsilon_{s-}).$$

The asymptotic behaviour of this process $\Upsilon = (\Upsilon_t)_{t \geq 0}$ is discussed. The discussion is based on the work of Mokkadem and Pelletier where two companion-type algorithms for the underlying Kiefer-Wolfowitz algorithm were presented, but only in a time-discrete setting.

The first chapter of the thesis' second part gives a technical motivation for the time-discrete companion algorithms of Mokkadem and Pelletier, that apply to the Kiefer-Wolfowitz algorithm.

In the sixth chapter, a general semimartingale-type companion algorithm is presented. This generalizes the ideas of Mokkadem and Pelletier in two ways. On one hand, it presents a companion to an arbitrary stochastic approximation algorithm, and not only to the Kiefer-Wolfowitz algorithm. For example companion algorithms for the Robbins-Monro procedure but also new companions for the Kiefer-Wolfowitz procedure can be derived. On the other hand, the algorithm is presented in a semimartingale framework. It turns out, that it includes time-discrete as well as time-continuous settings. We show consistency of the general semimartingale-type companion algorithm and consider special settings in the semimartingale context. Corresponding results in a time-continuous and a time-discrete framework are derived. It unfolds, that the consistency results of Mokkadem and Pelletier are special cases of the time-discrete framework.

The seventh chapter is devoted to the rate of convergence of the general algorithm. We consider special settings of the algorithms of the previous chapter. We point out how the rate of convergence depends on the gain processes $(a_t)_{t \geq 0}$, $(c_t)_{t \geq 0}$, $(\tilde{a}_t)_{t \geq 0}$, $(k_t)_{t \geq 0}$ and the smoothness of f in the leading algorithm. Consequently we discuss settings in which the underlying and the companion algorithm cannot simultaneously converge at an optimal rate. Again, time-continuous and time-discrete settings are established as special cases.

Chapter eight establishes asymptotic normality results. For that purpose an almost L^2 -convergence result of the underlying algorithm is used. In contrast to the Kiefer-Wolfowitz algorithm, there was no such result for the Robbins-Monro algorithm before. After showing this missing almost L^2 -result, we attend to asymptotic normality under parameter settings given in the previous chapters.

Zusammenfassung

Die Methoden der stochastischen Approximation werden zur rekursiven Bestimmung von unbekannten Parametern einer Funktion verwendet, die nur mit Rauschen beobachtet werden kann. Diese Parameter sind beispielsweise Null- oder Extremstellen. Zur Ermittlung von Nullstellen hat sich der Robbins-Monro Algorithmus

$$Z_{n+1} = Z_n - a_n Y_n(Z_n) \quad \text{mit} \quad Y_n(z) = f(z) - M_n,$$

und $a_n > 0$ etabliert. Für die Schätzung von Extremstellen ist das Kiefer-Wolfowitz Verfahren

$$Z_{n+1} = Z_n - a_n Y_n(Z_n)$$

mit

$$Y_n(z) = \frac{1}{2c_n} \left\{ (f(z + c_n e_i) - M_{n,i}^+) - (f(z - c_n e_i) - M_{n,i}^-) \right\}_{i \in \{1, \dots, d\}},$$

$a_n > 0$, $c_n > 0$ weit verbreitet. Hierbei ist nur $Y_n(Z_n)$ beobachtbar, aber nicht seine einzelnen Komponenten. Desweiteren werden für jede Iteration des Kiefer-Wolfowitz Verfahrens $2d$ Beobachtungen benötigt. Um diese Anzahl verringern zu können, wurden randomisierte stochastische Approximationsverfahren eingeführt, wie beispielsweise

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{a_n}{2c_n} D_n^{-1} \left\{ (f(z + c_n D_n) - M_n^+) - (f(z - c_n D_n) - M_n^-) \right\}$$

mit einer d -dimensionalen Zufallsfolge D_n und D_n^{-1} als deren komponentenweiser Inversen. Diese benötigen lediglich zwei Beobachtungen pro Schritt. Mit den Jahren wurden vielerlei solcher randomisierter Algorithmen entwickelt. Von einem speziellen Interesse ist

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{a_n}{c_n} D_n^{-1} \{ f(z + c_n D_n) - M_n^+ \}$$

bei welchem nur eine einzige Beobachtung pro Schritt genügt, auch wenn die Voraussetzungen leicht verschärft werden müssen. Eine Bedingung jedoch, die alle diese Verfahren gemeinsam haben, ist die Eigenschaft, dass die D_n unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.) sind. Dies macht die Erweiterung solcher Algorithmen in einen pfadstetigen Kontext unmöglich. Diese Thesis stellt die Vereinheitlichung der zuvor präsentierten Verfahren vor, welche zudem in einen Semimartingalrahmen erweitert werden. Daher wird D_n nicht mehr als u.i.v. vorausgesetzt und weitergehende Methoden sind anzuwenden, um die Beweise durchführen zu können.

Das erste Kapitel gibt eine historische Einführung in die stochastische Approximation. Desweiteren werden Semimartingal- und Randomisierungsverfahren vorgestellt sowie deren Vorzüge. Anschließend wird ein generischer randomisierter Semimartingalalgorithmus präsentiert. Dieser umfasst nicht nur die Theorie der bisher nicht untersuchten zeitstetigen randomisierten Verfahren, sondern auch alle bekannten zeitdiskreten Spezialfälle und auch noch nicht entdeckte.

Kapitel 2 behandelt die fast sichere Konvergenz des generischen Verfahrens. Spezialfälle sowohl in einem zeitstetigen als auch in einem zeitdiskreten Rahmen werden vorgestellt. Es stellt sich heraus, dass der präsentierte Kontext die Möglichkeit bietet, deterministische Störungsfunktionen zu verwenden, welche die selben fast sicheren Konvergenzresultate liefern wie die Randomisierungsprozesse. Zudem werden spezielle Beispiele von nutzbringender Randomisierung behandelt. Das Kapitel schließt mit der Visualisierung von Simulationsresultaten.

Im dritten Kapitel werden fast sichere Konvergenzraten hergeleitet. Auch hier wird gezeigt, dass die Raten des Semimartingalverfahrens sich auf die in den vorigen Kapiteln vorgestellten Spezialfälle übertragen. Am Ende werden den verschiedenen Designs von Störungen mithilfe der Simulation des empirischen L^2 -Fehlers verglichen.

Begründet auf den Methoden zur Schätzung von Null- oder Extremstellen wird im zweiten Teil der Arbeit ein verallgemeinertes begleitendes stochastisches Approximationsverfahren der Form

$$\Upsilon_n - \Upsilon_{n-1} = -\tilde{a}_n \Upsilon_{n-1} + \tilde{a}_n \tilde{Y}_n(Z_n), \quad \text{mit} \quad \tilde{a}_n > 0, \quad \tilde{Y}_n(Z_n) = G_n(Z_n) + \frac{k_n}{\tilde{a}_n} M_n(Z_n)$$

vorgeschlagen. Hierbei wird Z_n erzeugt durch einen zugrundeliegenden Algorithmus, wie dem Robbins-Monro- oder dem Kiefer-Wolfowitz-Verfahren, und $\tilde{Y}_n(Z_n)$ steht für die verrauschte Beobachtung des zu schätzenden Parameters an der Stelle Z_n . Die einzelnen Komponenten von $\tilde{Y}_n(Z_n)$, also der Wert des Schätzers $G_n(Z_n)$, sowie dessen Messfehler $M_n(Z_n)$, sind nicht getrennt beobachtbar. Begleitende Verfahren können als Lösungsprozess verallgemeinerter semimartingalartiger stochastischer Integralgleichungen der Form

$$\Upsilon_t = \Upsilon_0 + \int_0^t \tilde{a}_s (G_s - \Upsilon_{s-}) dR_s + \int_0^t k_s M(ds, \Upsilon_{s-})$$

interpretiert werden. Neben den bereits erwähnten zeitdiskreten Verfahren sind hier auch zeitkontinuierliche Verfahren enthalten. Es wird das asymptotische Verhalten dieses Lösungsprozesses $\Upsilon = (\Upsilon_t)_{t \geq 0}$ diskutiert. Diese Überlegung fußt auf der Arbeit von Mokkadem und Pelletier, in der Begleitalgorithmen in einem zeitdiskreten Zusammenhang zum zugrundeliegenden Kiefer-Wolfowitz Verfahren vorgestellt wurden.

Das erste Kapitel des zweiten Teils der Arbeit gibt eine heuristische Begründung für die Form des Begleitalgorithmus von Mokkadem und Pelletier. In diesem wird zusätzlich zum Kiefer-Wolfowitz-Algorithmus, welcher die Minimalstelle behandelt, noch der Funktionswert geschätzt.

Im sechsten Kapitel wird ein verallgemeinerter semimartingalartiger Begleitalgorithmus vorgeschlagen. Dieser erweitert die Ideen von Robbins und Monro in zweierlei Hinsicht. Zum einen stellt er einen Begleitalgorithmus für ein beliebiges stochastisches Approximationsverfahren dar, und nicht lediglich zum Kiefer-Wolfowitz-Algorithmus. Beispielsweise werden ein Algorithmus zum Robbins-Monro-Verfahren und ein weiteres Verfahren für den Kiefer-Wolfowitz-Algorithmus hergeleitet. Zum anderen wird der Begleitalgorithmus in einem Semimartingal-Zusammenhang dargestellt. Entsprechende Ergebnisse im zeitdiskreten und im zeitstetigen Kontext ergeben sich als Spezialfälle. Es stellt sich heraus, dass die Resultate von Mokkadem und Pelletier in den zeitdiskreten Ergebnissen enthalten sind.

Das siebte Kapitel widmet sich der Konvergenzgeschwindigkeit des verallgemeinerten Verfahrens. Wir betrachten spezielle Fassungen der Algorithmen des vorigen Kapitels. Es wird untersucht, wie die Konvergenzgeschwindigkeit von den Schrittweitenprozessen $(a_t)_{t \geq 0}$, $(c_t)_{t \geq 0}$, $(\tilde{a}_t)_{t \geq 0}$, $(k_t)_{t \geq 0}$ und von der Glattheit von f im zugrundeliegenden Verfahren abhängt. Somit werden auch Szenarien diskutiert, in denen der führende und der begleitende Algorithmus nicht jeweils mit optimaler Rate konvergieren. Wie zuvor, wird auf zeitdiskrete und zeitstetige Fassungen eingegangen.

In Kapitel acht werden Ergebnisse zur asymptotischen Normalität präsentiert. Hierfür wird ein Resultat zur fast- L^2 -Konvergenzrate des zugrundeliegenden Verfahrens verwendet. Im Gegensatz zum Kiefer-Wolfowitz-Algorithmus liegt ein solches Resultat für den Robbins-Monro-Algorithmus nicht vor und muss zunächst erarbeitet werden. Daraufhin widmen wir uns der asymptotischen Normalität unter den Parametern des vorigen Kapitels.