Zusammenfassung

Amplitudengleichungen können zur Beschreibung approximativer Lösungen partieller Differentialgleichungen genutzt werden. Sie können auftauchen im Zusammenhang von Modulationen exakter (möglicherweise distributioneller) Lösungen partieller Differentialgleichungen, als bestimmende Gleichungen eines Ansatzes oder als (formale) bestimmende Gleichungen einer asymptotischen Entwicklung. Deshalb erscheinen Amplitudengleichungen in einer Vielzahl von Zusammenhängen in den Ingenieurswissenschaften, der Physik oder auch der Mathematik nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, da sie in der Regel einfacher zu verstehen sind als nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Die zentrale Frage ist immer, welcher Zusammenhang zwischen einer Lösung der Amplitudengleichung und einer Lösung des ursprünglichen Problems besteht. Oder anders formuliert, ob das Verhalten der Lösung der Amplitudengleichung im ursprünglichen Problem wiedergefunden werden kann.

Die stärkste Formulierung dieser Frage lautet: „Ist es richtig, dass die Lösung der Amplitudengleichung eine Lösung des ursprünglichen Problems für lange Zeit approximiert und dass die Approximation stabil bezüglich einer Störung der Anfangsdaten ist?“ In den letzten Jahrzehnten wurde diese Frage für viele sehr unterschiedliche Gleichungen und Gleichungssysteme untersucht und in etlichen Fällen bejaht. Jedoch gab es auch Beispiele, bei denen eine formal korrekt hergeleitete Amplitudengleichung das Verhalten einer Lösung einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung nicht für lange Zeit korrekt beschreiben konnte. Einschränkend muss man hierzu anmerken, dass Gegenbeispiele im Wesentlichen für den Fall periodischer Randbedingungen bewiesen wurden.

In dieser Arbeit wird diese Frage im Falle vierer verschiedener semilinearer Originalgleichungen nachgegangen. Die ersten beiden Gleichungen im Kapitel 2 werden ähnlich zu Boussinesq-Gleichungen aus der Theorie der Wasserwellen sein, die anderen beiden sind die Ginsburg-Landau-Gleichung in Kapitel 3 und eine nichtlinear gekoppelte Ginsburg-Landau-Gleichung in Kapitel 4. Die Amplitudengleichungen werden eine „Dreiwelleninteraktionsgleichung“, eine „Vierwelleninteraktionsgleichung“, die Korteweg-de Vries-Gleichung und eine Gleichung in Form einer Erhaltungsgleichung sein, die als „Whithams Gleichung“ bezeichnet werden wird.

Für diese Systeme und Amplitudengleichungen wird die vorige Fragestellung betrachtet werden. In Kapitel 2 wird der Fokus auf einem Gegenbeispiel ohne periodische Randbedingungen liegen, während in den Kapiteln 3 und 4 der Fokus auf dem Beweis der Korrektheit der Approximation liegen wird.

Da alle betrachteten Problemstellungen semilinearer Natur sind und das Hauptinteresse an Lösungen in Unterräumen des Hilbertraums L^2 liegen wird, werden Energieabschätzungen eine zentrale Rolle für die Abschätzung der Fehler zwischen approximativer Lösung und echter Lösung sowie für die Frage der Stabilität der Lösung spielen.

Summary

Amplitude equations can be used to describe approximate solutions to partial differential equations (PDEs). They can be the outcome of a (formal) asymptotic expansion, appear as modulation equations of exact solutions to PDEs, possibly in the sense of distributions, or they can be derived as governing equations of an ansatz. Amplitude equations can be found in many different contexts in physics, are common tools of engineers, and used in mathematics to study nonlinear PDEs, since they can often be easier understood than the nonlinear PDE. An essential question is the relation between the solution to the amplitude equation and a solution to the original problem. We can rephrase this statement and ask whether the behaviour of the solution to the amplitude equation can be recovered in solutions to the original problem.

The strongest form of this question is as follows. Is it true that the solution to the amplitude equation is an approximate solution to the original problem for large times and is this still true under perturbations of the initial data? This issue has been investigated for many different equations and systems of equations in the last decades. In many cases it turned out that the foregoing statement is true, but in some cases it turned out wrong. There are examples where a formally correctly derived amplitude equation has solutions that do not closely follow solutions to the original nonlinear PDE for large times. However, these examples usually require periodic boundary conditions, which is clearly not the most general or most natural setting.

In this thesis we will investigate this issue for four different semilinear problems. The first two equations, which will be treated in Chapter 2, are inspired by Boussinesq's equations for the water waves problem in shallow water. The other two are the Ginzburg-Landau equation that will be considered in Chapter 3 and in Chapter 4 we will consider a nonlinearly coupled Ginzburg-Landau equation.

We will study amplitude equations of different kinds. In Chapter 2 we will use the four-wave interaction and three-wave interaction equations as amplitude equations whereas in Chapter 3 the KdV equation will be the amplitude equation and in Chapter 4 we will see a sort of conservation law, called ‘Whitham’s equation’, playing the role of the amplitude equation.

The focus of the investigation will be on the construction of a counterexample without periodic boundary conditions in Chapter 2, i.e. we will investigate arguments why the strongest formulation of the question might in general be wrong in a situation without periodic boundary conditions. On the other hand we will prove in Chapters 3 and 4 that solutions to the amplitude equations considered in those chapters really approximate true solutions to the original problem if the initial data are close.

Since all problems are of semilinear nature and the focus will be on solutions to the original problems in subspaces of the Hilbert space L^2, we will exploit energy estimates to control the error between an approximate solution and a true solution and for some stability arguments.