Abstract

In this thesis we are interested in dispersive systems posed on periodic graphs. For instance, periodic graphs are used as phenomenological models for more complex physical structures such as photonic crystals, nano-tubes or graphene. We focus on the existence or non-existence of spatially localized and time-periodic solutions, so called breathers, of nonlinear Klein-Gordon equations posed on necklace graphs.

This thesis is divided into three parts. In the first part we consider a discrete nonlinear Klein-Gordon system on a discrete necklace graph with additional localized potential. We improve existing dispersive estimates up to a temporal decay rate of $(1+t)^{-\frac{3}{2}}$ w.r.t. the ℓ^∞-norm for small symmetric initial conditions. The proof requires suitable integral representations of the linear semigroup and van der Corput's Lemma. Although anti-symmetric initial conditions correspond to eigenstates we are now able to prove asymptotic stability of the zero state for small localized initial data. The energy loss only occurs due to a nonlinear coupling into the absolutely continuous spectrum. This leads to a weaker temporal decay rate for small localized initial data in the nonlinear problem as compared to the temporal decay rate in the linear problem.

In contrast to the non-existence result of spatially localized and time-periodic solutions in the first part, we show two existence results for breather solutions in nonlinear Klein-Gordon systems on a large class of discrete periodic graphs in the second part of this thesis. The proofs are based on the Theorem of Crandall and Rabinowitz. In order to prove the existence results we request a non-resonance condition and invariance conditions depending on the nonlinearity and on the topological structure of the discrete graph.

Finally, in the last part we prove the convergence of generalized breather solutions on discrete necklace graphs towards breather solutions on the metric necklace graph as the discretization parameter goes to zero. This result is relevant for the numerical computation of breather solutions since discrete necklace graphs can be seen as discretizations of the metric necklace graph. For the proof we use spatial dynamics, bifurcation theory and a center manifold reduction.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit interessieren wir uns für dispersive Systeme, die auf periodischen Graphen gestellt sind. Periodische Graphen werden beispielsweise als phänomenologische Modelle für komplexere physikalische Strukturen wie etwa Photonische Kristalle, Nanoröhren oder Graphen benutzt. Wir fokussieren uns auf die Existenz oder Nicht-Existenz von räumlich lokalisierten und zeitperiodischen Lösungen, sogenannten Breathern, von nichtlinearen Klein-Gordon Gleichungen, die auf Perlenschnur-Graphen gestellt sind.

Diese Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Teil betrachten wir ein diskretes nichtlineares Klein-Gordon System auf einem diskreten Perlenschnur-Graphen mit einem zusätzlichen lokalisierten Potential. Wir verbessern vorhandene dispersive Abschätzungen bis zu einer zeitlichen Abfallrate von $(1+t)^{-\frac{3}{2}}$ bezüglich der ℓ^∞-Norm für kleine symmetrische Anfangsbedingungen. Der Beweis benötigt geeignete Integraldarstellungen der linearen Halbgruppe und van der Corput's Lemma. Obwohl antisymmetrische Anfangsbedingungen zu Eigenfunktionen gehören, sind wir nun in der Lage asymptotische Stabilität der Nulllösung für kleine lokalisierte Anfangsdaten zu beweisen. Der Energieverlust tritt nur aufgrund einer nichtlinearen Kopplung in das absolutstetige Spektrum auf. Dies führt zu einer schwächeren zeitlichen Abfallrate für kleine lokalisierte Anfangsdaten des nichtlinearen Problems im Vergleich zu der zeitlichen Abfallrate des linearen Problems.

Im Kontrast zum Nicht-Existenzresultat von räumlich lokalisierten und zeitperiodischen Lösungen im ersten Teil zeigen wir im zweiten Teil dieser Arbeit zwei Existenzresultate für Breather Lösungen in nichtlinearen Klein-Gordon Systemen für eine große Klasse diskreter periodischer Graphen. Die Beweise basieren auf dem Theorem von Crandall und Rabinowitz. Um die Existenzresultate zu beweisen, fordern wir eine Nicht-Resonanzbedingung und Invarianzbedingungen, die von der Nichtlinearität und der topologischen Struktur des diskreten Graphen abhängen.

Schließlich beweisen wir im letzten Teil die Konvergenz von verallgemeinerten Breather Lösungen auf diskreten Perlenschnur-Graphen gegen Breather Lösungen auf metrischen Perlenschnur-Graphen, während der Diskretisierungsparameter gegen Null geht. Dieses Resultat ist relevant für die numerische Berechnung von Breather Lösungen, da diskrete Perlenschnur-Graphen als Diskretisierungen des metrischen Perlenschnur-Graphen gesehen werden können. Für den Beweis benutzen wir räumliche Dynamik, Bifurkationstheorie und eine Zentrumsmannigfaltigkeitenreduktion.