Universität Stuttgart

Fachbereich Mathematik

Orthogonale Polynomlösungen von Differenzengleichungen vierter Ordnung

Peter A. Lesky

Preprint 2006/002

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Orthogonale Polynomlösungen von Differenzengleichungen vierter Ordnung

Peter A. Lesky

Preprint 2006/002

Fachbereich Mathematik
Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: `preprints@mathematik.uni-stuttgart.de`
WWW: `http://www.mathematik/uni-stuttgart.de/preprints`

ISSN **1613-8309**

Orthogonale Polynomlösungen von Differenzengleichungen vierter Ordnung

von Peter A. Lesky, Stuttgart

Nach den Untersuchungen von Differentialgleichungen vierter Ordnung auf (positiv definite) orthogonale Polynomlösungen durch H.L. Krall ([1], [2]), A.M. Krall ([3], [4]), W.N. Everitt ([5]) und P.A. Lesky ([6], [7]) ist es naheliegend, auch **Differenzengleichungen vierter Ordnung** auf (positiv definite) orthogonale Polynomlösungen zu untersuchen. In [1]-[7] sind folgende Polynomsysteme dargestellt: Hermite, Laguerre, Jacobi, Laguerretyp, Legendretyp, Jacobityp (unendliche Systeme) und Romanovski-Jacobi, Romanovski-Bessel, Romanovski-Pseudojacobi (endliche Systeme, [8]). Die Systeme Hermite, Laguerretyp, Legendretyp und Jacobityp zeichnen sich dadurch aus, daß sie über **dreigliedrige Rekursionen** für die Polynomkoeffizienten entstehen (Hermite und Laguerretyp als symmetrische Polynome). Hier erfolgt eine entsprechende Untersuchung von Differenzengleichungen vierter Ordnung über dreigliedrige Rekursionen für die Polynomkoeffizienten.

1 Polynomlösungen von linearen homogenen Differentialgleichungen vierter Ordnung

Für die Polynomlösungen $y_n(x)$ vom n-ten Grad in x $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ der Differentialgleichung

$$P_4(x)y_n^{(IV)}(x) + P_3(x)y_n^{'''}(x) + P_2(x)y_n^{''}(x) + P_1(x)y_n^{'}(x) = \lambda_n y_n(x) \tag{1.1}$$

zeigt der Ansatz

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^k}{k!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ a_{n,n} \neq 0), \tag{1.2}$$

daß für die Koeffizienten von (1.1) nur Polynome

$$\begin{aligned} &P_4(x) = e_{4,0} + e_{4,1}x + e_{4,2}x^2 + e_{4,3}x^3 + e_{4,4}x^4, \quad P_3(x) = e_{3,0} + e_{3,1}x + e_{3,2}x^2 + e_{3,3}x^3,\\ &P_2(x) = e_{2,0} + e_{2,1}x + e_{2,2}x^2, \qquad\qquad\qquad\qquad P_1(x) = e_{1,0} + e_{1,1}x \end{aligned} \tag{1.3}$$

in Frage kommen. Nach dem Einsetzen von (1.2) in (1.1) liefert der Koeffizientenvergleich bei $\dfrac{x^n}{n!}$ die **Eigenwerte**

$$\lambda_n = n\left\{e_{1,1} + (n-1)\,e_{2,2} + (n-1)(n-2)\,e_{3,3} + (n-1)(n-2)(n-3)\,e_{4,4}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.4}$$

Der Koeffizientenvergleich bei $\dfrac{x^k}{k!}$ liefert

$$\begin{aligned} &(k-n)\,e_{1,1}a_{n,k} + e_{1,0}a_{n,k+1} + (k-n)(k+n-1)\,e_{2,2}a_{n,k} + k\,e_{2,1}a_{n,k+1} + e_{2,0}a_{n,k+2} +\\ &+(k-n)\left[k^2 + kn + n^2 - 3(k+n) + 2\right]\,e_{3,3}a_{n,k} + k(k-1)\,e_{3,2}a_{n,k+1} + k\,e_{3,1}a_{n,k+2} +\\ &+e_{3,0}a_{n,k+3} + (k-n)\left[k^3 + k^2n + kn^2 + n^3 - 6(k^2 + kn + n^2) + 11(k+n) - 6\right]\cdot\\ &\cdot\, e_{4,4}a_{n,k} + k(k-1)(k-2)\,e_{4,3}a_{n,k+1} + k(k-1)\,e_{4,2}a_{n,k+2} + k\,e_{4,1}a_{n,k+3} + e_{4,0}a_{n,k+4}\\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wird (1.5) noch folgendermaßen umgeordnet:

$$\begin{aligned}
&a_{n,k}(k-n)\left\{e_{1,1}+(k+n-1)\,e_{2,2}+[k^2+kn+n^2-3(k+n)+2]\;e_{3,3}+\right.\\
&\left.+\,[k^3+k^2n+kn^2+n^3-6(k^2+kn+n^2)+11(k+n)-6]\;e_{4,4}\right\}+\\
&+a_{n,k+1}\left\{e_{1,0}+k\,e_{2,1}+k(k-1)\,e_{3,2}+k(k-1)(k-2)\,e_{4,3}\right\}+\\
&+a_{n,k+2}\left\{e_{2,0}+k\,e_{3,1}+k(k-1)\,e_{4,2}\right\}+a_{n,k+3}\left\{e_{3,0}+k\,e_{4,1}\right\}+a_{n,k+4}e_{4,0}=0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$(k=n,n-1,\ldots,1,0;a_{n,n}\neq 0,a_{n,n+1}=a_{n,n+2}=a_{n,n+3}=a_{n,n+4}=0)$.

Die folgenden vier Fälle entstehen mit der Dreigliedrigkeit von (1.6):

Hermite: $e_{4,0}=1\,;\; e_{4,1}=e_{4,2}=e_{4,3}=e_{4,4}=0\,;\; e_{3,1}=2\varepsilon\,(\varepsilon\in\mathbb{R}\setminus\{0\})\,;$
$e_{3,0}=e_{3,2}=e_{3,3}=0\,;\; e_{2,0}=2\varepsilon\tau\;(\tau\in\mathbb{R}),\; e_{2,2}=4\varepsilon^2\,;\; e_{2,1}=0\,;$
$e_{1,1}=4\varepsilon^2\,(\tau-1)\,;\; e_{1,0}$ (symmetrisch).

Laguerretyp: $e_{4,2}=1\,;\; e_{4,0}=e_{4,1}=e_{4,3}=e_{4,4}=0\,;\; e_{3,1}=4,\; e_{3,2}=2\,;$
$e_{3,0}=e_{3,3}=0\,;\; e_{2,1}=\upsilon+4\,(\upsilon\in\mathbb{R}),\; e_{2,2}=1\,;\; e_{2,0}=0\,;\; e_{1,0}=\upsilon-2,\; e_{1,1}=\upsilon.$

Legendretyp: $e_{4,0}=1,\; e_{4,2}=-2,\; e_{4,4}=1\,;\; e_{4,1}=e_{4,3}=0\,;\; e_{3,1}=-8,\; e_{3,3}=8\,;$
$e_{3,0}=e_{3,2}=0\,;\; e_{2,0}=-4(t+3)\;(t\in\mathbb{R}),\; e_{2,2}=4(t+3)\,;\; e_{2,1}=0\,;$
$e_{1,1}=8t\,;\; e_{1,0}=0$ (symmetrisch).

Jacobityp: $e_{4,2}=1,\; e_{4,3}=-2,\; e_{4,4}=1\,;\; e_{4,0}=e_{4,1}=0\,;$
$e_{3,1}=4,\; e_{3,2}=-2(r+4)\;(r\in\mathbb{R}),\; e_{3,3}=2(r+2)\,;\; e_{3,0}=0\,;$
$e_{2,1}=-r(f+4)\;(f\in\mathbb{R}),\; e_{2,2}=r(r+f+3)\,;\; e_{2,0}=0\,;$
$e_{1,0}=r(2-f),\; e_{1,1}=r(rf-2).$

Bei den Systemen Laguerre, Jacobi, Romanovski-Jacobi, Romanovski-Bessel und Romanovski-Pseudojacobi bleiben in (1.6) fünfgliedrige Koeffizientenrekursionen bestehen.

2 Polynomlösungen von linearen homogenen Differenzengleichungen vierter Ordnung

Für die Polynomlösungen $y_n(x)$ vom n-ten Grad in $x\;(n=0,1,2,\ldots)$ der Differenzengleichung*

$$Q_4(x)\Delta^4 y_n(x)+Q_3(x)\Delta^3 y_n(x)+Q_2(x)\Delta^2 y_n(x)+Q_1(x)\Delta y_n(x)=\mu_n y_n(x+2) \tag{2.1}$$

$\left(\Delta y_n(x)=y_n(x+1)-y_n(x)\,;\;\Delta^j y_n(x)=\Delta\left(\Delta^{j-1}y_n(x)\right)\right)$ zeigt der Ansatz ([8])

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k}\qquad (n=0,1,2,\ldots\,;\; b_{n,n}\neq 0), \tag{2.2}$$

*Das „Störglied“ $\mu_n y_n(x+2)$ wird im Hinblick auf die Orthogonalität verwendet.

daß für die Koeffizienten von (2.1) nur Polynome

$$Q_4(x) = f_{4,0} + f_{4,1}x + f_{4,2}x^2 + f_{4,3}x^3 + f_{4,4}x^4, \quad Q_3(x) = f_{3,0} + f_{3,1}x + f_{3,2}x^2 + f_{3,3}x^3,$$
$$Q_2(x) = f_{2,0} + f_{2,1}x + f_{2,2}x^2, \qquad Q_1(x) = f_{1,0} + f_{1,1}x \tag{2.3}$$

in Frage kommen. Vor dem Einsetzen von (2.2) in (2.1) erfolgen für die Polynome (2.3) noch gewisse Vorbereitungen:

$$\begin{aligned}
x\binom{x+k-2}{k-r} &= (k-r+1)\binom{x+k-2}{k-r+1} + (2-r)\binom{x+k-2}{k-r} \\
&\qquad (r = 1,2,3,4)\,; \\
x^2\binom{x+k-2}{k-s} &= (k-s+2)(k-s+1)\binom{x+k-2}{k-s+2} + (k-s+1)(5-2s)\cdot \\
&\quad \cdot\binom{x+k-2}{k-s+1} + (s-2)^2\binom{x+k-2}{k-s} \qquad (s = 2,3,4)\,; \\
x^3\binom{x+k-2}{k-t} &= (k-t+3)(k-t+2)(k-t+1)\binom{x+k-2}{k-t+3} + 3(k-t+2)\cdot \\
&\quad \cdot(k-t+1)(3-t)\binom{x+k-2}{k-t+2} + (k-t+1)\Big[3(3-t)(2-t)+1\Big]\binom{x+k-2}{k-t+1} + \\
&\quad + (2-t)^3\binom{x+k-2}{k-t} \qquad (t = 3,4)\,; \\
x^4\binom{x+k-2}{k-4} &= k(k-1)(k-2)(k-3)\binom{x+k-2}{k} - 2(k-1)(k-2)(k-3)\cdot \\
&\quad \cdot\binom{x+k-2}{k-1} + 7(k-2)(k-3)\binom{x+k-2}{k-2} - 15(k-3)\binom{x+k-2}{k-3} + \\
&\quad + 16\binom{x+k-2}{k-4}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ferner beachte man $y_n(x+2) = \Delta^2 y_n(x) + 2\Delta y_n(x) + y_n(x)$, so daß mit dem Ansatz (2.2)

$$y_n(x+2) = \sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2} + 2\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k} \tag{2.5}$$

entsteht. Nach dem Einsetzen von (2.2) in (2.1) und Koeffizientenvergleich bei $\binom{x+n-2}{n}$ ergeben sich die **Eigenwerte**

$$\mu_n = n\Big[f_{1,1} + (n-1)f_{2,2} + (n-1)(n-2)f_{3,3} + (n-1)(n-2)(n-3)f_{4,4}\Big] \quad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{2.6}$$

Zum Aufbau der (zunächst fünfgliedrigen) Rekursion werden die vier Summanden von (2.1) untersucht, wobei auch das Störglied Verwendung findet:

$$
\begin{aligned}
&\Big[f_{1,0}+f_{1,1}x\Big]\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-1} = \\
&=\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-1}\Big[f_{1,0}+f_{1,1}\Big]+\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k}\,k\,f_{1,1}\,; \\
&\Big[f_{2,0}+f_{2,1}x+f_{2,2}x^2\Big]\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}-\mu_n\Bigg[\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}+ \\
&\qquad\qquad +2\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-1}+\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k}\Bigg] = \\
&=\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}\Big[f_{2,0}-\mu_n\Big]+\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-1}\Big[(k-1)f_{2,1}+ \\
&\quad+(k-1)f_{2,2}-2\mu_n\Big]+\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k}\Big[k(k-1)f_{2,2}-\mu_n\Big]\,; \\
&\Big[f_{3,0}+f_{3,1}x+f_{3,2}x^2+f_{3,3}x^3\Big]\sum_{k=3}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-3} = \\
&=\sum_{k=3}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-3}\Big[f_{3,0}-f_{3,1}+f_{3,2}-f_{3,3}\Big]+\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}\Big[(k-2)\cdot \\
&\quad\cdot f_{3,1}-(k-2)f_{3,2}+(k-2)f_{3,3}\Big]+\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-1}(k-1)(k-2)f_{3,2}+ \\
&+\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k}k(k-1)(k-2)f_{3,3}\,; \\
&\Big[f_{4,0}+f_{4,1}x+f_{4,2}x^2+f_{4,3}x^3+f_{4,4}x^4\Big]\sum_{k=4}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-4} = \\
&=\sum_{k=4}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-4}\Big[f_{4,0}-2f_{4,1}+4f_{4,2}-8f_{4,3}+16f_{4,4}\Big]+\sum_{k=3}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-3}\cdot \\
&\cdot\Big[(k-3)f_{4,1}-3(k-3)f_{4,2}+7(k-3)f_{4,3}-15(k-3)f_{4,4}\Big]+\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}\cdot \\
&\cdot\Big[(k-2)(k-3)f_{4,2}-3(k-2)(k-3)f_{4,3}+7(k-2)(k-3)f_{4,4}\Big]+\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\cdot \\
&\cdot\binom{x+k-1}{k-2}\Big[(k-1)(k-2)(k-3)f_{4,3}-2(k-1)(k-2)(k-3)f_{4,4}\Big]+ \\
&\qquad\qquad+\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k}k(k-1)(k-2)(k-3)f_{4,4}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Jetzt ist erkennbar, daß man durch Ausschaltung der Glieder mit dem Faktor $\binom{x+k-2}{k-3}$ und $\binom{x+k-2}{k-4}$ zu einer dreigliedrigen Rekursion gelangen kann. Diese Ausschaltung gelingt durch Erfüllung von

$$
f_{3,0}=f_{3,1}-f_{3,2}+f_{3,3}\,;\ f_{4,0}=2f_{4,1}-4f_{4,2}+8f_{4,3}-16f_{4,4}\,;\ f_{4,1}=3f_{4,2}-7f_{4,3}+15f_{4,4} \tag{2.8}
$$

Außerdem ist noch eine Umformung der verbleibenden Binomialkoeffizienten nötig. Dazu berechnet man

$$\begin{aligned} \binom{x+k-2}{k-1} &= \binom{x+k-1}{k-1} - \binom{x+k-2}{k-2} \;;\; \binom{x+k-2}{k} = \\ &= \binom{x+k}{k} - 2\binom{x+k-1}{k-1} + \binom{x+k-2}{k-2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

und erhält aus (2.7)

$$\begin{aligned}
&\Big[f_{1,0}+f_{1,1}x\Big]\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-1} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k}{k} k\, f_{1,1} + \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-1}{k-1}\cdot \\
&\cdot\Big[f_{1,0}+f_{1,1}-2kf_{1,1}\Big] + \sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}\Big[-f_{1,0}-f_{1,1}+k\,f_{1,1}\Big]\,; \\
&\Big[f_{2,0}+f_{2,1}x+f_{2,2}x^2\Big]\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2} - \mu_n\Bigg[\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2} + 2\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\cdot \\
&\cdot\binom{x+k-2}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k}\Bigg] = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k}{k}\Big[k(k-1)f_{2,2}-\mu_n\Big]+ \\
&+\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-1}{k-1}\Big[f_{2,1}-(2k-1)f_{2,2}\Big](k-1) + \sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}\cdot \\
&\cdot\Big[f_{2,0}-f_{2,1}(k-1)+f_{2,2}(k-1)^2\Big]\,; \\
&\Big[f_{3,0}+f_{3,1}x+f_{3,2}x^2+f_{3,3}x^3\Big]\sum_{k=3}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-3} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k}{k}\cdot \\
&\cdot k(k-1)(k-2)f_{3,3} + \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-1}{k-1}\Big[f_{3,2}-2k\,f_{3,3}\Big](k-1)(k-2)+ \\
&+\sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}\Big[f_{3,1}-k\,f_{3,2}+(k^2-k+1)f_{3,3}\Big](k-2)\,; \\
&\Big[f_{4,0}+f_{4,1}x+f_{4,2}x^2+f_{4,3}x^3+f_{4,4}x^4\Big]\sum_{k=4}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-4} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k}{k}\cdot \\
&\cdot k(k-1)(k-2)(k-3)f_{4,4} + \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-1}{k-1}\Big[f_{4,3}-2(k+1)\,f_{4,4}\Big](k-1)(k-2)\cdot \\
&\cdot(k-3) + \sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k-2}\Big[f_{4,2}-(k+2)\,f_{4,3}+(k^2+k+5)f_{4,4}\Big](k-2)(k-3).
\end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen von $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\binom{x+k-2}{k}$ in die Differenzengleichung (2.1) entsteht insgesamt (man beachte die Erfüllung von (2.8))

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \left(\begin{array}{c} x+k \\ k \end{array} \right) \big\{k\, f_{1,1} + k(k-1)\, f_{2,2} + k(k-1)(k-2)\, f_{3,3} + k(k-1)(k-2) \cdot$$
$$\cdot\, (k-3)\, f_{4,4} - \mu_n\big\} +$$
$$+\sum_{k=1}^{n} b_{n,k} \left(\begin{array}{c} x+k-1 \\ k-1 \end{array} \right) \big\{f_{1,0} + f_{1,1} - 2k\, f_{1,1} + (k-1)\, f_{2,1} - (k-1)(2k-1)\, f_{2,2} +$$
$$+(k-1)(k-2)\, f_{3,2} - 2k(k-1)(k-2)\, f_{3,3} + (k-1)(k-2)(k-3)\, f_{4,3} - 2(k-1)\cdot$$
$$\cdot(k-2)(k-3)(k+1)\, f_{4,4}\big\} +$$
$$+\sum_{k=2}^{n} b_{n,k} \left(\begin{array}{c} x+k-2 \\ k-2 \end{array} \right) \big\{-f_{1,0} - f_{1,1} + k\, f_{1,1} + f_{2,0} - (k-1)\, f_{2,1} + (k-1)^2\, f_{2,2} +$$
$$+(k-2)^2\, f_{3,1} - k(k-2)\, f_{3,2} + (k^2-k+1)(k-2)\, f_{3,3} + (k-2)(k-3)\, f_{4,2} -$$
$$-(k-2)(k-3)(k+2)\, f_{4,3} + (k^2+k+5)(k-2)(k-3)\, f_{4,3}\big\} = 0. \tag{2.10}$$

Der Koeffizientenvergleich bei $\left(\begin{array}{c} x+k \\ k \end{array} \right)$ liefert eine **dreigliedrige Rekursion** für die $b_{n,k}$:

$$\begin{aligned}
&b_{n,k} \big\{k \left[f_{1,1} + (k-1)\, f_{2,2} + (k-1)(k-2)\, f_{3,3} + (k-1](k-2)(k-3)\, f_{4,4}\right] - \\
&-n \left[f_{1,1} + (n-1)\, f_{2,2} + (n-1)(n-2)\, f_{3,3} + (n-1)(n-2)(n-3)\, f_{4,4}\right]\big\} + \\
&+b_{n,k+1} \big\{f_{1,0} + f_{1,1} - 2(k+1)\, f_{1,1} + k\, f_{2,1} - k(2k+1)\, f_{2,2} + (k-1)\, k\, f_{3,2} - \\
&-2(k-1)\, k(k+1)\, f_{3,3} + (k-2)(k-1)\, k\, f_{4,3} - 2(k-2)(k-1)\, k(k+2)\, f_{4,4}\big\} + \\
&+b_{n,k+2} \big\{-f_{1,0} - f_{1,1} + (k+2)\, f_{1,1} + f_{2,0} - (k+1)\, f_{2,1} + (k+1)^2\, f_{2,2} + k^2\, f_{3,1} - \\
&-k(k+2)\, f_{3,2} + (k^2+3k+3)\, k\, f_{3,3} + (k-1)\, k\, f_{4,2} - (k-1)\, k(k+4)\, f_{4,3} + \\
&+(k^2+5k+11)(k-1)\, k\, f_{4,4}\big\} = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$(k = n, n-1, \ldots, 1, 0\,;\; b_{n,n} \neq 0,\; b_{n,n+1} = b_{n,n+2} = 0)$.

3 Orthogonalität für Polynomlösungen von linearen homogenen Differenzengleichungen vierter Ordnung

In der Differenzengleichung (2.1) setzt man zweckmäßig

$$Q_4(x) = \sigma(x+4),\; Q_3(x) = \tau(x+3),\; Q_2(x) = \varphi(x+2),\; Q_1(x) = \psi(x+1) \tag{3.1}$$

und multipliziert mit $w(x+2)$:

$$w(x+2)\sigma(x+4)\Delta^4 y_n(x) + w(x+2)\tau(x+3)\Delta^3 y_n(x) + w(x+2)\varphi(x+2)\Delta^2 y_n(x) +$$
$$+w(x+2)\psi(x+1)\Delta y_n(x) = w(x+2)\, \mu_n y_n(x+2) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.2}$$

Wird w so bestimmt, daß die **selbstadjungierte Form**

$$\Delta^2 \left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\} + \Delta\Big\{ \Big[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2\Big(w(x-1)\sigma(x+1)\Big)\Big] \cdot$$
$$\cdot\, \Delta y_n(x+1)\Big\} = w(x+2)\, \mu_n y_n(x+2) \tag{3.3}$$

aus (3.2) entsteht, dann kann damit die Orthogonalität der Polynomlösungen y_n bezüglich der Gewichtsfunktion w erreicht werden.
Zuerst bringt man die Differenzengleichungen (3.2) und (3.3) zur Übereinstimmung. Unter Verwendung der Produktregeln

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right] = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x), \tag{3.4}$$

$$\Delta^2\left[f(x)g(x)\right] = f(x+2)\Delta^2 g(x) + 2(\Delta f(x+1))\Delta g(x) + g(x)\Delta^2 f(x) \tag{3.5}$$

berechnen wir

$$\begin{aligned}\Delta^2\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\} = w(x+2)\sigma(x+4)\Delta^4 y_n(x) + 2\Big(\Delta\left[w(x+1)\sigma(x+3)\right]\Big)\cdot \\ \cdot\Delta^3 y_n(x) + \Big(\Delta^2\left[w(x)\sigma(x+2)\right]\Big)\Delta^2 y_n(x)\end{aligned}$$

und mit Verwendung von $\Delta y_n(x+1) = \Delta^2 y_n(x) + \Delta y_n(x)$ entsteht

$$\begin{aligned}&\Delta\Big\{\Big[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2(w(x-1)\sigma(x+1))\Big]\Big[\Delta^2 y_n(x) + \Delta y_n(x)\Big]\Big\} = \\ &= \Big[w(x+2)\varphi(x+2) - \Delta^2\left(w(x)\sigma(x+2)\right)\Big]\Big[\Delta^3 y_n(x) + \Delta^2 y_n/x)\Big] + \\ &+ \Big(\Delta\Big[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big]\Big)\Big[\Delta^2 y_n(x) + \Delta y_n(x)\Big] = \\ &= \Big[w(x+2)\varphi(x+2) - \Delta^2\left(w(x)\sigma(x+2)\right)\Big]\Delta^3 y_n(x) + \Big\{w(x+2)\varphi(x+2) - \\ &- \Delta^2\left(w(x)\sigma(x+2)\right) + \Delta\Big[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big]\Big\}\Delta^2 y_n(x) + \\ &+ \Big(\Delta\Big[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big]\Big)\Delta y_n(x).\end{aligned}$$

Beide Ergebnisse werden zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}&\Delta^2\Big\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\Big\} + \\ &\qquad + \Delta\Big\{\Big[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big]\Delta y_n(x+1)\Big\} = \\ &= w(x+2)\sigma(x+4)\Delta^4 y_n(x) + \Big[w(x+2)\varphi(x+2) + w(x+2)\sigma(x+4) - \\ &- w(x)\sigma(x+2)\Big]\Delta^3 y_n(x) + \Big[2w(x+2)\varphi(x+2) - w(x+1)\varphi(x+1) - \\ &- w(x+2)\sigma(x+4) + 3w(x+1)\sigma(x+3) - 3w(x)\sigma(x+2) + w(x-1)\sigma(x+1)\Big]\cdot \\ &\cdot\Delta^2 y_n(x) + \Big[w(x+2)\varphi(x+2) - w(x+1)\varphi(x+1) - w(x+2)\sigma(x+4) - \\ &- 3w(x+1)\sigma(x+3) + 3w(x)\sigma(x+2) + w(x-1)\sigma(x+1)\Big]\Delta y_n(x).\end{aligned}$$

Der Vergleich mit der Differenzengleichung (3.2) führt bei $\Delta^3 y_n(x)$ auf

$$w(x+2)\Big[\varphi(x+2) + \sigma(x+4) - \tau(x+3)\Big] = w(x)\sigma(x+2), \tag{3.6}$$

während der Vergleich bei $\Delta^2 y_n(x)$ auf

$$\Delta\Big[w(x+1)\varphi(x+1)\Big] - \Delta^3\Big[w(x-1)\sigma(x+1)\Big] = 0 \tag{3.7}$$

führt. Somit liefert der Vergleich bei $\Delta y_n(x)$

$$w(x+2)\psi(x+1) = 0. \tag{3.8}$$

An die Stelle der **Pearsonschen Differentialgleichungen** ([6]) treten die Differenzengleichungen (3.6), (3.7) und die Forderung $\psi(x+1) = 0 \quad (f_{1,0} = f_{1,1} = 0)$.
Wird w aus (3.6) und (3.7) bestimmt, dann kann an die Stelle der Differenzengleichung (3.2) mit $\psi(x+1) = 0$ deren selbstadjungierte Form (3.3) treten.
Für die Orthogonalität der Polynomlösungen $y_n(x)$ bezüglich w als **Gewichtsfunktion** multipliziert man die zu n gehörende Differenzengleichung (3.3) mit $y_m(x+2)$ und die zu m gehörende Differenzengleichung (3.3) mit $y_n(x+2) \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ und erhält nach deren Subtraktion

$$\begin{aligned}
&(\mu_n - \mu_m)w(x+2)y_n(x+2)y_m(x+2) = \\
&= \Big(\Delta^2\Big\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\Big\} + \Delta\Big\{\Big[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big]\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Delta y_n(x+1)\Big\}\Big)\, y_m(x+2) - \\
&- \Big(\Delta^2\Big\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_m(x)\Big\} + \Delta\Big\{\Big[w(x+1)\varphi(x+1) - \Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big]\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Delta y_m(x+1)\Big\}\Big)\, y_n(x+2).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Wendet man die partielle Summation

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=A}^{B} f(x+1)\Delta g(x) = \Big[f(x)g(x)\Big]_{x=A}^{B+1} - \sum_{x=A}^{B} g(x)\Delta f(x) \\
&\qquad\qquad (N = B - A \in \mathbb{N};\ A \to -\infty \text{ und } B \to \infty \text{ möglich})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

und die Produktregel (3.4) auf Teile von (3.9) an, so entstehen

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=A}^{B} \left(\Delta^2\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\}\right) y_m(x+2) = \\
&= \Big[\left(\Delta\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\}\right) y_m(x+1)\Big]_{x=A}^{B+1} - \\
&\qquad\qquad - \sum_{x=A}^{B} \left(\Delta\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\}\right) \Delta y_m(x+1) = \\
&= \Big[\left(\Delta\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\}\right) y_m(x+1)\Big]_{x=A}^{B+1} - \\
&- \Big[\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\} \Delta y_m(x)\Big]_{x=A}^{B+1} + \sum_{x=A}^{B} \left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\Delta^2 y_m(x)\right\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

und

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=A}^{B}\Big(\Delta\Big\{\Big[w(x+1)\varphi(x+1)-\Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big]\Delta y_n(x+1)\Big\}\Big)\,y_m(x+2)=\\
&=\Big[\,\{[w(x+1)\varphi(x+1)-\Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)]\,\Delta y_n(x+1)\}\,y_m(x+1)\Big]_{x=A}^{B+1}-\\
&-\sum_{x=A}^{B}\Big\{\Big[w(x+1)\varphi(x+1)-\Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big]\Delta y_n(x+1)\Big\}\,\Delta y_m(x+1).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Hier wird klar, warum im Störglied der Differenzengleichung (2.1) $y_n(x+2)$ verwendet wurde: Zieht man entsprechend (3.9) noch die mit m und n vertauschten Teile ab und summiert von A bis B, dann entfallen bezüglich (3.11) die Summen

$$\sum_{x=A}^{B}\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\Delta^2 y_m(x)\right\}$$

und bezüglich (3.12) die Summen

$$\sum_{x=A}^{B}\left\{\left[w(x+1)\varphi(x+1)-\Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\right]\Delta y_n(x+1)\right\}\Delta y_m(x+1).$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
&(\mu_n-\mu_m)\sum_{x=A}^{B} w(x+2)y_n(x+2)y_m(x+2)=\\
&=\Big[\,(\Delta\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\})\,y_m(x+1)-\\
&-\left\{w(x)\sigma(x+2)\Delta^2 y_n(x)\right\}\Delta y_m(x)+\Big(\{w(x+1)\varphi(x+1)-\\
&\qquad-\Delta^2\left(w(x-1)\sigma(x+1)\right)\Big\}\,\Delta y_n(x+1)\Big)\,y_m(x+1)\Big]_{x=A}^{B+1}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

oder noch in einer anderen Form

$$\begin{aligned}
&(\mu_n-\mu_m)\sum_{x=A}^{B} w(x+2)y_n(x+2)y_m(x+2)=\\
&=\Big[\,\{w(x+1)\varphi(x+1)-w(x-1)\sigma(x+1)\}\,(\Delta y_n(x+1))\,y_m(x+1)+\\
&+w(x)\sigma(x+2)\left\{2\left[\Delta y_n(x)\right]y_m(x+1)+\left[\Delta^2 y_n(x)\right]y_m(x)\right\}+\\
&\qquad+w(x+1)\sigma(x+3)\left[\Delta^3 y_n(x)-\Delta y_n(x+1)\right]y_m(x+1)\Big]_{x=A}^{B+1}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Liegt die Verschiedenheit der Eigenwerte μ_n vor, dann hat man Orthogonalität der Polynomlösungen $y_n(x+2)$ von (2.1) bezüglich $w(x+2)$, wenn rechts vom Gleichheitszeichen in (3.13) bzw. (3.14) für $n\neq m$ null entsteht (wegen $\psi(x+1)=f_{1,0}+f_{1,1}x$ gilt $\mu_0=\mu_1=0$, worauf bei der Orthogonalität geachtet werden muß). Das bedingt gewisse Eigenschaften von φ und σ in den „Randpunkten" A und B. Selbstverständlich sind auch $A\to-\infty$ und $B\to\infty$ möglich, wenn w die erforderlichen Konvergenzeigenschaften erzeugt.

Zur Erreichung der Orthogonalität auf $\{A,\ A{+}1,\ \ldots,\ B{-}1,\ B\}$ müssen $\varphi(x{+}1)$, $\sigma(x+1)$, $\sigma(x+2)$ und $\sigma(x+3)$ so gewählt werden, daß einerseits

$$w(x+1)\varphi(x+1) - w(x-1)\sigma(x+1),\ w(x)\sigma(x+2) \text{ und } w(x+1)\sigma(x+3) \tag{3.15}$$

für $x = A$ und $x = B+1$ ($N = B - A \in \mathbb{N}$; $A \to -\infty$ und $B \to \infty$ möglich) null sind, andererseits die beiden Differenzengleichungen (3.6) und (3.7) und $\psi(x+1) = 0$ gelten.

4 Behandlung eines endlichen Spezialfalles

Es wird der einfachste Fall mit $w(x) = 1$ und Orthogonalität auf $\{0, 1, \ldots, N\}$ ($A = 0$, $B = N$) behandelt. Zunächst wählt man σ derart, daß $\sigma(x+3)$ und $\sigma(x+2)$ für $x = 0$ und $x = N+1$ null werden:

$$\begin{aligned}
&\sigma(x+4) = (x+1)(x+2)(x-N)(x-N+1) = \\
&\qquad = x^4 + 2(2-N)x^3 + (N^2 - 7N + 5)x^2 + (3N^2 - 7N + 2)x + 2N(N-1)\,; \\
&\sigma(x+3) = x(x+1)(x-N-1)(x-N) = \\
&\qquad = x^4 - 2Nx^3 + (N^2 - N - 1)x^2 + N(N+1)x\,; \\
&\sigma(x+2) = (x-1)x(x-N-2)(x-N-1) = \\
&\qquad = x^4 - 2(2+N)x^3 + (N^2 + 5N + 5)x^2 - x(N+1)(N+2)\,; \\
&\sigma(x+1) = (x-2)(x-1)(x-N-3)(x-N-2) = \\
&= x^4 - 2(4+N)x^3 + (N^2 + 11N + 23)x^2 - (3N^2 + 19N + 28)x + 2(N+2)(N+3).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Damit liegen die Koeffizienten von $Q_4(x)$ aus (2.3) fest:

$$f_{4,0} = 2N(N-1),\ f_{4,1} = (N-2)(3N-1),\ f_{4,2} = N^2 - 7N + 5,\ f_{4,3} = 2(2-N),\ f_{4,4} = 1. \tag{4.2}$$

Mit diesen Koeffizienten sind die zweite und dritte Bedingung aus (2.8) erfüllt:

$$\begin{aligned}
&f_{4,0} - 2f_{4,1} + 4f_{4,2} - 8f_{4,3} + 16f_{4,4} = \\
&\qquad = 2N^2 - 2N - 6N^2 + 14N - 4 + 4N^2 - 28N + 20 - 32 + 16N + 16 = 0, \\
&f_{4,1} - 3f_{4,2} + 7f_{4,3} - 15f_{4,4} = \\
&\qquad = 3N^2 - 7N + 2 - 3N^2 + 21N - 15 + 28 - 14N - 15 = 0.
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt berechnen wir $\sigma(1) = 2(N+2)(N+3)$ und $\sigma(N+2) = 2(N-1)N$, setzen $\varphi(x+1) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ und haben $\varphi(1) = \gamma$ und $\varphi(N+2) = \alpha(N+1)^2 + \beta(N+1) + \gamma$. Im Sinne von (3.15) müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\varphi(1) - \sigma(1) =)\quad & \gamma - 2(N+2)(N+3) = 0 \\
(\varphi(N+2) - \sigma(N+2) =)\quad & \alpha(N+1)^2 + \beta(N+1) + \gamma - 2(N-1)N = 0
\end{aligned}$$

gelten; daraus folgen $\gamma = 2(N+2)(N+3)$ und $\alpha(N+1)+\beta = -12$.
Ferner muß die Differenzengleichung (3.7) erfüllt werden. Dazu berechnen wir $\Delta\varphi(x+1) = 2\alpha x+\alpha+\beta$ und $\Delta^3\sigma(x+1) = 12(2x-N-1)$ und haben für (3.7)

$$\big(\Delta\varphi(x+1) - \Delta^3\sigma(x+1) =\big) \quad (2\alpha-24)x+\alpha+\beta+12(N+1) = 0.$$

Das liefert $\alpha = 12$ und $\beta = -12(N+2)$ (im Einklang mit $\alpha(N+1)+\beta = -12$), so daß sich

$$\varphi(x+1) = 12x^2-12(N+2)x+2(N+2)(N+3) \text{ und } \varphi(x+2) = 12x^2-12Nx+2N(N-1) \tag{4.3}$$

ergeben. Damit liegen die Koeffizienten von $Q_2(x)$ aus (2.3) fest:

$$f_{2,0} = 2N(N-1),\ f_{2,1} = -12N,\ f_{2,2} = 12. \tag{4.4}$$

Es bleibt die Erfüllung der Differenzengleichung (3.6), wobei $\tau(x+3)$ festgelegt wird:

$$\tau(x+3) = \varphi(x+2)+\sigma(x+4)-\sigma(x+2) = 8x^3-12(N-1)x^2+4(N^2-4N+1)x+4N(N-1). \tag{4.5}$$

Damit liegen die Koeffizienten von $Q_3(x)$ aus (2.3) fest:

$$f_{3,0} = 4N(N-1),\ f_{3,1} = 4(N^2-4N+1),\ f_{3,2} = -12(N-1),\ f_{3,3} = 8. \tag{4.6}$$

Mit diesen Koeffizienten ist die erste Bedingung aus (2.8) erfüllt:

$$f_{3,0}-f_{3,1}+f_{3,2}-f_{3,3} = 4N^2-4N-4N^2+16N-4-12N+12-8 = 0.$$

Wegen $\psi(x+1) = 0$ liegen noch $f_{1,0} = f_{1,1} = 0$ fest.
Damit liegt folgende Differenzengleichung vierter Ordnung vor:

$$\begin{aligned}&\Big[2N(N-1)+(N-2)(3N-1)x+(N^2-7N+5)x^2-2(N-2)x^3+x^4\Big]\Delta^4 y_n(x)+\\ &+\Big[4N(N-1)+4(N^2-4N+1)x-12(N-1)x^2+8x^3\Big]\Delta^3 y_n(x)+\\ &+\Big[2N(N-1)-12Nx+12x^2\Big]\Delta^2 y_n(x) =\\ &= \mu_n y_n(x+2) \quad \text{mit } \mu_n = (n-1)n(n+1)(n+2) \quad (n = 0,1,2,\ldots).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Die dreigliedrige Rekursion (2.11) erhält folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}&b_{n,k}\Big\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(n-1)n(n+1)(n+2)\Big\}-\\ &-b_{n,k+1}2k(k+1)(k+2)(N+k+2)+\\ &\qquad\qquad +b_{n,k+2}(k+1)(k+2)(N+k+2)(N+k+3) = 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

$(k = n, n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1,\ 0\,;\ b_{n,n} \neq 0,\ b_{n,n+1} = b_{n,n+2} = 0)$.

Zur Berechnung der $b_{n,k}$ ist noch folgende Umformung der Rekursion zweckmäßig:

$$(n-k)(n-k+1)\Big[n(n+1)+(k-1)(k+2)\Big]\,b_{n,k}+(k+1)(k+2)(N+k+2)\cdot \\ \cdot\Big[2k\,b_{n,k+1}-(N+k+3)\,b_{n,k+2}\Big]=0 \tag{4.9}$$

$(k=n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1,\ 0\,;\ b_{n,n}\neq 0,\ b_{n,n+1}=b_{n,n+2}=0)$. Man findet damit

$$b_{n,n-1}=-\frac{N+n+1}{2}b_{n,n}$$

und

$$b_{n,k}=(-1)^{n-k}\,\frac{(n-1)(n-2)\ldots(k+1)(N+n+1)(N+n)\ldots(N+k+2)}{2(n-k)!(2n-1)(2n-2)\ldots(n+k+1)}b_{n,n} \tag{4.10}$$

$(k=n-2,\ n-3,\ \ldots,\ 1,\ 0)$, so daß folgende Lösungspolynome von (4.7) entstehen:

$$y_n(x)=\left\{\binom{x+n-2}{n}+\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^j\binom{N+n+1}{j}\binom{n-1}{j-1}}{2\binom{2n-1}{j-1}}\binom{x+n-2-j}{n-j}\right\}b_{n,n} \tag{4.11}$$

$(n=1,\ 2,\ \ldots)$ und $y_0(x)=1$; diese werden mit $b_{n,n}=n!$ monisch.

Wir geben die (monischen) Polynome $y_n(x)$ und $y_n(x+2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ an:

$$y_1(x)=x-\frac{N+4}{2}, \qquad y_1(x+2)=x-\frac{N}{2}\,;$$
$$y_2(x)=x^2-(N+4)x+\frac{(N+3)(N+8)}{6}, \qquad y_2(x+2)=x^2-Nx+\frac{(N-1)N}{6}\,;$$
$$y_3(x)=x^3-\frac{3}{2}(N+4)x^2+\frac{1}{10}(6N^2+57N+122)x-\frac{1}{20}(N+3)(N+4)(N+14),$$
$$y_3(x+2)=x^3-\frac{3}{2}Nx^2+\frac{1}{10}(6N^2-3N+2)x-\frac{1}{20}(N^3-3N^2+2N)\,;$$
$$y_4(x)=x^4-2(N+4)x^3-\frac{1}{7}(9N^2-81N+173)N^2- \\ -\frac{1}{7}(2N^3+33N^2+161N+244)x+\frac{1}{70}(N+3)(N+4)(N+5)(N+22),$$
$$y_4(x+2)=x^4-2Nx^3+\frac{1}{7}(9N^2-3N+5)x^2-\frac{N}{7}(2N^2-3N+5)x+ \\ +\frac{N}{70}(N^3-6N^2+11N-6).$$

Man beachte, daß im konstanten Glied von $y_n(x+2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ nur Potenzen von N vorkommen.

Die (monischen) Lösungspolynome (4.11) betrachten wir im Hinblick auf die Orthogonalität in der Form

$$y_n(x+2) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,k}(x+2)^k \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ;\ \alpha_{n,n} = 1). \tag{4.12}$$

Zur Berechnung der **dreigliedrigen Rekursion**[**]

$$\begin{aligned} y_0(x+2) = 1,\ y_1(x+2) = x+2-c_0,\ y_{n+1}(x+2) = \\ = (x+2-c_n)y_n(x+2) - d_n y_{n-1}(x+2) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \end{aligned} \tag{4.13}$$

setzt man (4.12) in (4.13) ein und erhält durch Koeffizientenvergleich bei $(x+2)^n$ und $(x+2)^{n-1}$

$$\begin{aligned} c_0 = -\alpha_{1,0}\ ;\ c_n = \alpha_{n,n-1} - \alpha_{n+1,n}\ ;\ d_n = \alpha_{n,n-2} - \alpha_{n+1,n-1} - c\alpha_{n,n-1} \\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ;\ \alpha_{1,-1} = 0). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Zur Aufstellung der Rekursion genügen also $\alpha_{n,n-1}$ und $\alpha_{n,n-2}$. In diesem Sinne werden die entsprechenden Koeffizienten aus (4.11) berechnet:

$$\begin{aligned} \binom{x+n}{n} n! = (x+n)(x+n-1)\ldots(x+1) = \\ = x^n + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}x^{n-2} + \ldots\ ; \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j \binom{N+n+1}{j}\binom{n-1}{j-1}}{2\binom{2n-1}{j-1}} \binom{x+n-j}{n-j} n! = \\ &= -\frac{n(N+n+1)}{2}x^{n-1} - \frac{n^2(n-1)(N+n+1)}{4}x^{n-2} - \ldots + \\ &\qquad + \frac{n(n-1)^2(N+n)(N+n+1)}{4(2n-1)}x^{n-2} + \ldots\ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Damit entstehen

$$\alpha_{n,n-1} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(N+n+1)}{2} = -\frac{nN}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ;\ \alpha_{1,1} = 1)$$

und

$$c_0 = -\alpha_{1,0} = \frac{N}{2},\ c_n = \alpha_{n,n-1} - \alpha_{n+1,n} = -\frac{nN}{2} + \frac{(n+1)N}{2} = \frac{N}{2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{4.17}$$

[**]Analog wie in [8] kann die Existenz einer dreigliedrigen Rekursion gezeigt werden.

Ferner ergibt sich

$$\alpha_{n,n-2} = \frac{n(n-1)}{24(2n-1)}\Big\{6(n-1)N^2 - 6N + (n-2)(n+1)\Big\} \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\, ;\, \alpha_{1,-1} = 0)$$

zur Berechnung von

$$\begin{aligned}
&d_n = \alpha_{n,n-2} - \alpha_{n+1,n-1} - c_n\alpha_{n,n-1} = -\frac{n}{4(4n^2-1)}\Big\{(n-1)^2(2n+1)N^2 - \\
&-(n-1)(2n+1)N + \frac{1}{6}(n-2)(n^2-1)(2n+1) - n(n+1)(2n-1)N^2 + \\
&+(n+1)(2n-1)N - \frac{1}{6}(n^2-1)(n+2)(2n-1)\Big\} + \frac{nN^2}{4} = \\
&= \frac{n}{4(4n^2-1)}\Big\{(-4n^2+n+1)N^2 + 2nN - n(n^2-1)\Big\} + \frac{nN^2}{4} = \\
&= -\frac{nN^2}{4} + \frac{n^2(N+1-n)(N+1+n)}{4} + \frac{nN^2}{4} = \frac{n^2(N+1-n)(N+1+n)}{4(4n^2-1)} \\
&\qquad\qquad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Nun wird die mit dem Satz von Favard zusammenhängende Theorie für positiv definite (endliche) Orthogonalsysteme herangezogen ([8]).
Man erkennt, daß die d_n für $n = 1,\, 2,\, \ldots,\, N$ positiv sind, während $d_{N+1} = 0$ ist, so daß nur ein endliches positiv definites Orthogonalsystem mit $N+1$ Polynomen entstehen kann.
Für die (positiven) Normierungsfaktoren $\sigma_n = d_0 d_1 \ldots d_n$ mit $d_0 = = \sum_{x=0}^{N} y_0(x) = N+1$ ergibt sich

$$\sigma_n = \binom{N+1+n}{2n+1}\frac{(2n+1)!}{4^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4k^2-1} \quad (n = 1,\, 2,\, \ldots,\, N\, ;\, \sigma_0 = N+1)\, ; \tag{4.19}$$

also hat man für die Polynomlösungen $y_n(x+2)$ von (4.7) die **Orthogonalitätsrelation**

$$\sum_{x=0}^{N} 1 \cdot y_n(x+2)\cdot y_m(x+2) = \\
= \begin{cases} 0 \quad \text{für } n \neq m, \\ \binom{N+1+n}{2n+1}\dfrac{(2n+1)!}{4^n}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{4k^2-1} \quad \text{für } n = m\ (\neq 0)\ , \\ N+1 \quad \text{für} \quad n = m\ (=0) \end{cases} \tag{4.20}$$

$(n, m = 0,\, 1,\, \ldots,\, N)$.

Literatur

[1] **Krall, H.L.:** Certain differential equations for Tschebyscheff polynomials, *Duke Math. J. 4* (1938), *705-718.*

[2] **Krall, H.L.:** On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation, *The Pennsylv. State Coll. Bull. 34* (1940), *3-24.*

[3] **Krall, A.M.:** Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sec. A. 87* (1981), *271-288.*

[4] **Krall, A.M.:** Hilbert Space, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials, *Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin* (2002).

[5] **Everitt, W.N., Littlejohn, L.L.:** Differentialoperators and the Legendre type polynomials *Diff. Int. Equations 1* (1988), *97-116.*

[6] **Lesky, P.A.:** Eigenwertprobleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung für die kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynome, *Sb. Öst. Akad. Wiss. math. nat. Kl. Abt.II 206* (1997), *127-139.*

[7] **Lesky, P.A.:** Eigenwertprobleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung für die Orthogonalpolynome vom Laguerretyp, Legendretyp und Jacobityp, *Sb. Öst. Akad. Wiss. math. nat. Kl. Abt.II 207* (1998), *23-34.*

[8] **Lesky, P.A.:** Eine Charakterisierung der klassischen kontinuierlichen-, diskreten- und q - Orthogonalpolynome, *Shaker Verlag, Aachen* (2005), *322 S.*

Adresse des Autors: Peter A. Lesky, G. Hauptmannstr. 4, A 6020 Innsbruck
oder: Universität Stuttgart/Mathematik,
Pfaffenwaldring 57, D 70569 Stuttgart.
E-Mail: pa.lesky @ mathematik.uni-stuttgart.de

Erschienene Preprints ab Nummer 2004/001

Komplette Liste: `http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/preprints`

2004/001 *Walk, H.:* Strong Laws of Large Numbers by Elementary Tauberian Arguments.

2004/002 *Hesse, C.H., Meister, A.:* Optimal Iterative Density Deconvolution: Upper and Lower Bounds.

2004/003 *Meister, A.:* On the effect of misspecifying the error density in a deconvolution problem.

2004/004 *Meister, A.:* Deconvolution Density Estimation with a Testing Procedure for the Error Distribution.

2004/005 *Efendiev, M.A., Wendland, W.L.:* On the degree of quasiruled Fredholm maps and nonlinear Riemann-Hilbert problems.

2004/006 *Dippon, J., Walk, H.:* An elementary analytical proof of Blackwell's renewal theorem.

2004/007 *Mielke, A., Zelik, S.:* Infinite-dimensional hyperbolic sets and spatio-temporal chaos in reaction-diffusion systems in $\mathbb{R}^n$.

2004/008 *Exner, P., Linde, H., Weidl T.:* Lieb-Thirring inequalities for geometrically induced bound states.

2004/009 *Ekholm, T., Kovarik, H.:* Stability of the magnetic Schrödinger operator in a waveguide.

2004/010 *Dillen, F., Kühnel, W.:* Total curvature of complete submanifolds of Euclidean space.

2004/011 *Afendikov, A.L., Mielke, A.:* Dynamical properties of spatially non-decaying 2D Navier-Stokes flows with Kolmogorov forcing in an infinite strip.

2004/012 *Pöschel, J.:* Hill's potentials in weighted Sobolev spaces and their spectral gaps.

2004/013 *Dippon, J., Walk, H.:* Simplified analytical proof of Blackwell's renewal theorem.

2004/014 *Kühnel, W.:* Tight embeddings of simply connected 4-manifolds.

2004/015 *Kühnel, W., Steller, M.:* On closed Weingarten surfaces.

2004/016 *Leitner, F.:* On pseudo-Hermitian Einstein spaces.

2004/017 *Förster, C., Östensson, J.:* Lieb-Thirring Inequalities for Higher Order Differential Operators.

2005/001 *Mielke, A.; Schmid, F.:* Vortex pinning in super-conductivity as a rate-independent model

2005/002 *Kimmerle, W.; Luca, F., Raggi-Cárdenas, A.G.:* Irreducible Components of the Burnside Ring

2005/003 *Höfert, C.; Kimmerle, W.:* On Torsion Units of Integral Group Rings of Groups of Small Order

2005/004 *Röhrl, N.:* A Least Squares Functional for Solving Inverse Sturm-Liouville Problems

2005/005 *Borisov, D.; Ekholm, T; Kovarik, H.:* Spectrum of the Magnetic Schrödinger Operator in a Waveguide with Combined Boundary Conditions

2005/006 *Zelik, S.:* Spatially nondecaying solutions of 2D Navier-Stokes equation in a strip

2005/007 *Meister, A.:* Deconvolving compactly supported densities

2005/008 *Förster, C., Weidl, T.:* Trapped modes for an elastic strip with perturbation of the material properties

2006/001 *Dippon, J., Schiemert, D.:* Stochastic differential equations driven by Gaussian processes with dependent increments

2006/002 *Lesky, P.A.:* Orthogonale Polynomlösungen von Differenzengleichungen vierter Ordnung