Universität Stuttgart

Fachbereich Mathematik

Charakterisierung der Symmetrischen Gruppen durch ihre komplexe Gruppenalgebra

Matthias Nagl

Preprint 2011/007

Universität Stuttgart

Fachbereich Mathematik

Charakterisierung der Symmetrischen Gruppen durch ihre komplexe Gruppenalgebra

Matthias Nagl

Preprint 2011/007

Fachbereich Mathematik
Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: preprints@mathematik.uni-stuttgart.de
WWW: http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/preprints

ISSN **1613-8309**

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.
LaTeX-Style: Winfried Geis, Thomas Merkle

Abstract

It is shown that finite symmetric groups S_n are determined by their complex group algebra, i.e. if G is a finite group with $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}S_n$ then it follows that $G \cong S_n$.

1 Introduction

Let G be a finite group whose complex group algebra is isomorphic to that one of the symmetric group S_n. It is shown that G is isomorphic to S_n.

The question whether a finite group is determined up to isomorphism by its group algebras over all fields has been raised by R.Brauer in his famous lectures on modern mathematics 1963 [3, Problem 2*]. It is well known that in general the answer is negative [4]. But a finite simple group may be determined solely by its complex group algebra.

A significant sketch of the proof that the complex group algebra of a finite simple group G determines G up to isomorphism provided G is a sporadic simple group or G is isomorphic to an alternating group A_n has been given in [12]. For the case of alternating groups a complete proof has been worked out in the author's Diplomarbeit [15].

Tong Viet obtained as well the result for the symmetric groups (cf. arXiv:1103.3939v1 [math.GR]). As will become transparent this preprint demonstrates that the author obtained the result on the symmetric groups independently to Tong Viet. Indeed the proof given differs from that one of Tong Viet. The author notes that he announced (including the main steps for a proof) the result for the symmetric groups in his talk on the DFG - Schwerpunktsworkshop at the RWTH Aachen March 2010. Finally it is noted that the complex group algebra also determines a finite simple group of Lie type defined over a prime field up to isomorphism. This was announced by the author already at the Darstellungstheorietage in Kaiserslautern 2009 (as well again at the workshop in Aachen mentioned above).

2 Hauptsatz

Satz 2.1 *Sei G eine symmetrische Gruppe S_n, H eine Gruppe mit $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}H$. Dann folgt $G \cong H$.*

Bevor wir mit dem Beweis beginnen benötigen wir noch einige grundlegende Resultate und Begriffe.

Definition 2.2 *Eine* **Partition** A von $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als $A = a_1, \ldots, a_s$ mit

- $a_1 + \ldots + a_s = n$
- $a_1 \geq \ldots \geq a_s \geq 1$

Alternativ als $a_1, \ldots, a_n$ mit $a_i = 0$ für $i > s$.

Es sei außerdem

$$|A| = a_1 + \ldots + a_s$$

die **Ordnung** von A und

$$||A|| = a_2 + \ldots + a_s$$

das **Gewicht** von A.

Definition 2.3 (Partition) *Sei $D = a_2, \ldots, a_n$, dann nennt man Partitionen A mit $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ vom* **Typ**D.

Definition 2.4 *Sei $D = d_1, \ldots, d_n$ eine Partition von $k \in \mathbb{N}$, dann ist für $n \geq k + d_1$ die Partition* n/D definiert als $n/D = n - k, d_1, \ldots, d_k$.

Satz 2.5

$$\delta(A) = \frac{n!}{\mathrm{H(A)}} \quad \textit{(Haken-Formel)}$$

$$\delta(A) = \sum_{B:A} \delta(B) \quad \textit{(Branching-Law)}$$

Definition 2.6 *Sei $D = d_1, \ldots, d_k$ eine Partition von k und $n \geq k + d_1$,dann ist die Funktion φ_D definiert via:*

$$\varphi_D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \delta(n/D)$$

Definition 2.7 (n-minimal) *Sei P eine endliche Menge von Partitionen. Man sagt dass P zu minimalen Graden von S_n führt, oder kurz P ist n-minimal wenn Folgendes gilt:*
Ist A eine primäre Partition von n, so dass $A \neq n/D$ für alle D aus P, dann ist $\delta(A) > \delta(P, n)$.

Definition 2.8 (Stabilität) *Ein Paar von reellen Polynomen P, Q heißt* **stabil** bei $N \in \mathbb{N}$, wenn für $x \geq N$ gilt: $(Q - P)(x) \neq 0$.
Entsprechend heißt eine Menge S von Polynomen stabil bei N, wenn je zwei Elemente von S stabil bei N sind.
Im weiteren sein zu Partitionen C und D die Bezeichnung $C \sqsubset D$ äquivalent zu $\varphi_C \sqsubset \varphi_D$.

Satz 2.9 ([17],Main Theorem 1) *Sei $k \geq 0$ und P_k die Menge der Partitionen D mit $|D| \leq k$. Sei $\gamma_k = \delta(P_k)$ und sei B_k definiert als: $B_0 = 1$, $B_1 = 7$, $B_2 = 9$, $B_3 = 15$, $B_4 = 22$, $B_k = 1 + (k+1)(\gamma_k + 1)$ für $k \geq 5$.*
Dann gilt:

1. *P_k ist n-minimal für $n \geq B_k$*
2. *B_k ist die kleinste natürliche Zahl N, für die P_k für $n \geq N$ noch n-minimal ist.*
3. *P_k ist stabil bei B_k. Dabei ist die Stabilität von einer Menge von Partitionen so zu verstehen ist, dass die zugehörige Menge von Polynomen stabil ist.*

Mit dieser Aussage erhalten wir eine Liste der kleinsten, irreduziblen Charaktergrade der symmetrischen Gruppe. Die Anzahl der Charaktere in der Liste hängt von der Größe von n ab und ist stets gegeben durch die Partitionen $(n - k, *)$.

Satz 2.10 ([15],Proposition 2; [12], Proposition 2.3) *Seien: $d_0 = 1$,*
$d_1 = n - 1$,
$d_2 = \frac{1}{2}n(n-3)$,
$d_3 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,
$d_4 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-5)$,
$d_5 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$,
$d_6 = \frac{1}{3}n(n-2)(n-4)$,
$d_7 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-7)$,
$d_8 = \frac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.
Dann gilt:

- *Für $7 \leq n \leq 9$, sind d_0, d_1 die Grade der zwei kleinsten, irreduziblen Darstellungen der A_n.*
- *Für $10 \leq n \leq 14$, sind d_0, d_1, d_2, d_3 die Grade der vier kleinsten, irreduziblen Darstellungen der A_n.*
- *Für $15 \leq n \leq 21$, sind $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ die Grade der sieben kleinsten, irreduziblen Darstellungen der A_n.*
- *Für $22 \leq n$, sind $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8$ die Grade der neun kleinsten, irreduziblen Darstellungen der A_n.*

Außerdem existiert zu jedem der Grade genau eine irreduzible Darstellung der A_n.

Ein Beweis findet sich in [15] die Argumente sind Verallgemeinerungen des obigen Satzes 2.9 von Rasala

Lemma 2.11 (Clifford, [7], Ch. V, 17.3) *Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Sei weiter $\chi \in Irr\, G$ ein irreduzibler Charakter von G. Dann gilt $\chi_N(1) = e\gamma(1)$ mit $\gamma \in Irr\, N$ und $e \mid |G : N|$.*

Zentral für den Beweis des Hauptsatzes ist die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von A. Balog, C. Bessenrodt, J. B. Olsson und K. Ono ([1] Thm 2.4).

Satz 2.12 *Sei $G \cong S_n$, $n \geq 5$ und $\chi \in Irr(S_n)$. Sei weiter $\chi(1) = 2p^a$ mit p ungerade prim sowie $a \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\chi(1) = n - 1$, oder es handelt sich um einen der folgenden Fälle:*

- $n = 5$ *mit* $\lambda = (3, 1, 1)$ *und* $f_\lambda = 6$
- $n = 6$ *mit* $\lambda = (3, 1, 1, 1)$ *oder* $\lambda = (4, 1, 1)$ *und* $f_\lambda = 10$
- $n = 7$ *mit* $\lambda = (2, 2, 1, 1, 1)$, $\lambda = (2, 2, 2, 1)$, $\lambda = (4, 3)$ *oder* $\lambda = (5, 2)$ *und* $f_\lambda = 14$
- $n = 8$ *mit* $\lambda = (2, 2, 2, 2)$ *oder* $\lambda = (4, 4)$ *und* $f_\lambda = 14$
- $n = 9$ *mit* $\lambda = (3, 2, 2, 1, 1)$ *oder* $\lambda = (5, 3, 1)$ *und* $f_\lambda = 162$
- $n = 12$ *mit* $\lambda = (2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ *oder* $\lambda = (10, 2)$ *und* $f_\lambda = 54$

Der Beweis findet sich im nächsten Abschnitt.
Der Beweis des Hauptsatzes 2.1 gliedert sich in 5 Schritte.

1. $H/H' \cong C_2$
2. H' ist perfekt
3. Sei $\chi \in Irr\, H'$ dann folgt $\chi(1) \in cd\, S_n$ oder $2\chi(1) \in cd\, S_n$
4. $H' \cong A_n$
5. $H \cong S_n$

Beweis Schritt 1.

Da S_n genau 2 irreduzible Charaktere vom Grad 2 hat, gilt dies auch für H. Damit ist H nicht perfekt und hat ein abelsches Bild. Dieses Bild kann nur Ordnung 2 haben. Also gilt $H/H' \cong C_2$.

Schritt 2.

Sei $\chi \in Irr\, H'$ ein nicht trivialer irreduzibler Charakter vom Grad 1.
Da H keine irreduziblen Charaktere vom Grad 2 besitzt und $|H : H'| = 2$ ist, folgt, dass $\chi_{H'}^H$ die Summe zweier nicht trivialer irreduzibler Charakter vom Grad 1 von H ist, wobei einer der beiden Charaktere eingeschränkt auf H' χ ergeben muss. Dies ist nicht möglich, da sämtlich Charaktere vom Grad 1 von H eingeschränkt auf H' trivial sind.
Damit ist der einzige Charakter vom Grad 1 in H' der triviale und H' somit perfekt.

Schritt 3.

Es gilt $H' \lhd H$. Damit müssen nach Clifford alle Charaktergrade von H' von der Form $\frac{\chi(1)}{q}$ mit $\chi(1) \in cd\, H$ und $q \mid |H : H'|$ sein.
Wegen $|H : H'| = 2$ folgt damit die Behauptung.

Schritt 4.

Da H' perfekt ist, existiert ein einfaches, nicht abelsches Bild Q von H'.
Für Q kommt also eine alternierende, sporadische oder eine endliche, einfache Gruppe vom Lie-Typ in Frage.
Betrachten wir diese Fälle im Einzelnen.

a)
Sei Q eine alternierende Gruppe A_m
Da $|Q| \mid |H'| \mid |H| = |S_n|$ gilt, muss aus Ordnungsgründen $m \leq n$ sein.
Weiter ist Q ein Bild von H' und damit muss $cd\, Q \subseteq cd\, H'$ gelten.
Der kleinste, nicht triviale Charaktergrad von S_n ist nach Satz 2.12 $n-1$.
Nach 3) ist der kleinste Charaktergrad von H' damit entweder $n-1$ oder $\frac{n-1}{2}$.
Der kleinste nicht triviale Charaktergrad von Q ist nach Satz 2.10 $m-1$.
Angenommen der kleinste Grad von H' wäre $n-1$, dann folgt $m-1 \geq n-1$.
Da $|Q|$ aber $|H'|$ teilt, muss $m \leq n$ gelte. Es folgt also $m = n$ und damit aus Ordnungsgründen $H' \cong Q \cong A_n$.
Sei der kleinste, nicht triviale Grad von Q also $\frac{n-1}{2}$.
Für den nächst größeren Grad aus $cd\, H'$ kommen nach 2.9 und 3) für $n \geq 9$ entweder $\frac{1}{2}n(n-3)$ oder $\frac{1}{4}n(n-3)$ in Frage.
In beiden Fällen ist der Grad wegen $m \leq n$ sicherlich größer als $m-1$.
Damit müsste dann aber $m - 1 = \frac{n-1}{2}$ und damit $m = \frac{n+1}{2}$ gelten.
Nach Lemma 2.10 hat dann der zweitkleinste nicht triviale Charakter von $Q \cong A_m$ den Grad $\frac{1}{2}(\frac{n+1}{2})\frac{n-5}{2}$.
Da die Menge der Charaktergrade von Q Teilmenge der Charaktergrade von H' ist, darf dieser Grad nicht zwischen $m-1$ und $\frac{1}{4}n(n-3)$ liegen.
$\Rightarrow \frac{1}{8}(n+1)(n-5) \geq \frac{1}{4}(n)(n-3)$
$\Leftrightarrow n^2 - 4n - 5 \geq 2n^2 - 6n$
$\Leftrightarrow 0 \geq n^2 - 2n + 5$
Da dies offensichtlich ein Widerspruch zu $n \geq 1$ ist, tritt der Fall nicht auf.
Für die Fälle $n \leq 9$ betrachtet man einfach die Menge der möglichen Charaktere, die von S_n kommen können, und vergleicht diese mit denen der alternierenden Gruppen für $m < n$ und findet immer einen Charaktergrad in den alternierenden Gruppen, der nicht in $cd(H')$ liegt.
Damit ist der Fall $Q \cong H' \cong A_n$ die einzige Möglichkeit für Q, eine alternierende Gruppe zu sein.

b) Sei Q eine endliche, einfache Gruppe vom Lie-Typ.
Bekanntermaßen hat Q dann mit dem Steinbergcharakter mindestens einen Charakter mit Grad p^a, p Primzahl, $a \in \mathbb{N}$.
Damit ein solcher Grad in H' auftreten kann, müsste ein Grad der Form p^a bzw. $2p^a$ in H und damit auch in S_n existieren.
Nach [1] hat S_n für $n > 9$ genau dann einen Charaktergrad der Ordnung p^a, wenn $n - 1 = p^a$ gilt (vgl. Satz 3.3). Da $n-1$ der minimale nicht triviale Charaktergrad ist, müsste der Steinbergcharakter der minimale Charakter von Q sein. Diesen Fall gibt es aber nicht (vql. [20] und [13]).
Bleibt also noch die Möglichkeit, dass der Charakter den Grad $2p^a$ hat. Nach Satz 2.12 gilt dann aber bis auf wenig kleinere Ausnahmen $n - 1 = 2p^a$ und der Steinberg Charakter wäre wieder der minimale Charakter, was, wie oben beschrieben, nicht möglich ist.
Man überprüft nun noch leicht, dass weder die Ausnahmen aus [1] noch die aus Satz 2.12 einen möglichen Kandidaten liefern.

c) Sei Q eine sporadische Gruppe.
Diesen Fall überprüft man leicht mit Hilfe eines Computers. Für jede sporadische Gruppe S beginnt man mit der kleinsten symmetrischen Gruppe S_n, deren Ordnung größer oder gleich der von S ist. Nun vergleicht man die ersten Grade der symmetrischen Gruppe und den halbierten Grad mit dem minimalen Grad von S. Liegt dieser echt zwischen zwei dieser Grade bricht der Algorithmus ab, da die Gruppe kein Kandidat ist. Stimmt der minimale Grad von S mit einem der Grade überein nimmt man den zweit kleinsten Grad von S usw. Nun folgt die nächstgrößere symmetrische Gruppe, solange bis der kleinste Grad von S echt kleiner als der von S_n ist.

Schritt 5.

Es ist nun also $H' = A_n$, damit muss $H \subseteq Aut(A_n)$ gelten.
Beachte der Fall $A_n \times C_2$ kann nicht auftreten, da $|\,Irr(A_n)| > \frac{1}{2}|\,Irr(S_n)||$.
Daraus folgt aber bis auf den Fall $n = 6$, dass $H \cong S_n$ gilt.
Eine direkte Inspektion der Charaktertafeln zeigt den Fall S_6.

3 Beweis von Satz 2.12

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass es bis auf wenige Ausnahmen in der symmetrischen Gruppe keine irreduziblen Charaktere χ gibt, deren Grad die Form $\chi(1) = 2p^a$ mit p prim hat.
Der Beweis lehnt sich stark an die Arbeit [1] von Balog, Bessenrodt, Olsson und Ono über Primpotenz-Grade der symmetrischen Gruppe an.
Es genügt, den Beweis aus [1] an den Stellen zu verändern, an denen verwendet wird, dass es sich um einen Charakter von Primpotenz-Grad handelt. Dies soll im Folgenden geschehen.
Zunächst wollen wir aber noch die Beweisschritte aus [1] betrachten.
Die Idee der Arbeit besteht darin zu zeigen, dass Primpotenz-Grade nur dann auftreten wenn die zum Grad gehörige Partition bis auf einen kleinen Teil einer Hakenpartition entspricht.
Zunächst wird also ausgeschlossen, dass eine Partition in Form eines Haken einen Primpotenz-Grad beschreibt, der nicht durch die vorhergesagten abgedeckt ist.
Da der Grad einer Hakenpartition durch einen Binomialkoeffizienten beschrieben wird lässt sich dies über entsprechende Resultate für Binomialkoeffizienten zeigen.
Damit kann im Weiteren davon ausgegangen werden, dass es sich bei der gesuchten Partition nicht um eine solche Hakenpartition handelt.
Nun zeigen die Autoren über einige technische Lemmata, dass man unter dieser Annahme Serien von natürlichen Zahlen konstruieren kann, die alle als Hakenlängen der ersten Spalte auftauchen müssen.
Die Beweise für die Lemmata und Propositionen lassen sich wie unten gezeigt auf Grade der Form $2p^a$ erweitern.
Mit diesen Schritten wird dann die folgende Proposition bewiesen.

Proposition 3.1 ([1],Proposition 2.11) *Sei λ eine Partition von n. Seien weiter $s_1 < s_2 < \ldots < s_r \leq n$ und $t_1 < t_2 < \ldots < t_r \leq n$ Folgen natürlich Zahlen die, die nachfolgenden Bedingungen erfüllen.*

- *$s_i < t_i$ für alle i*
- *s_1 und t_1 sind Primzahlen $> \frac{n}{2}$*
- *Für $1 \leq i \leq r-1$ beinhalten s_{i+1} und t_{i+1} Primfaktoren die größer als $2n - s_i - t_i$ sind*

Dann sind $s_1, \ldots, s_r$ und $t_1, \ldots, t_r$ Hakenlängen der ersten Spalte von λ.

Eine solche Serie lässt sich dann verwenden um eine obere Schranke für den Grad eines solchen Charakters zu erhalten. Genauer zeigen die Autoren die folgende Proposition.

Proposition 3.2 ([1],Proposition 4.1) *Sei λ eine Partition von n und $c = n - h_1$. Sei weiter p eine Primzahl und l die natürlich Zahl mit $p^l \leq n \leq p^{l+1}$ und f_λ der zur Partition λ gehörende Grad.*
Dann gilt

$$\nu_p(f_\lambda) \leq \nu_p((2c+2)!) + 2l$$

und insbesondere auch

$$(f_\lambda)_p \leq n^2((2c+2)!)_p$$

Findet man also eine Serie von Zahle wie in 3.1, die nahe an n endet, so erhält man mit 3.2 eine gute obere Schranke für die größe des Charakters.
Mit eingen Zahlentheoretischen Argumenten zeigen die Autoren nun, dass sich für $n > 3,0610^8$ Serien konstruieren lassen, die zu $n - h_1 = c \leq 225$ führen. Außerdem wird gezeigt, dass sich im Falle $43 \leq n \leq 9,2510^8$ nachrechnen lässt, dass es Serien der Gestalt gibt, dass $n - h_1 = c \leq 4$ gilt.
Mit den erhaltenen Schranken lassen sich nun die Resultate von Rasala aus [17] über die minimalen Grade der S_n verwenden um zu zeigen, dass der gesuchte Charaktergrad in einer Liste dieser minimalen Grade liegen muss.
Dies führt aber zum Widerspruch, da diese Grade in allen Fällen die nicht von Satz 3.3 abgedeckt werden, mehr als einen ungeraden Primteiler enthalten.
Die fälle für $n < 43$ werden dann direkt anhand der Charkatergrade geprüft.
Will man Satz 3.3 auf Grade der Form $2p^a$ erweitern, so muss man lediglich die Beweise und Abschätzungen aus [1] anpassen, sofern diese verwenden, dass f_λ eine Primpotenz ist. Prüft man dann noch die kleinen Fälle erhält man das gewünschte Ergebnis.

Satz 3.3 ([1],Theorem 2.4) *Sei λ eine Partition von n. Dann gilt $f_\lambda = p^a$ für eine Primzahl p und $a \geq 1$ genau dann wenn $n = p^a + 1$, $\lambda = (p^a, 1)$ oder $\lambda = (2, 1^{p^a - 1})$, und $f_\lambda = p^a$ oder es handelt sich um einen der foglenden Fälle:*

- $n = 4$, $\lambda = (2^2)$, $f_\lambda = 2$
- $n = 5$, $\lambda = (2^2, 1)$ *oder* $\lambda = (3, 2)$, $f_\lambda = 5$
- $n = 6$, $\lambda = (4, 2)$ *oder* $\lambda = (2^2, 1^2)$, $f_\lambda = 9$
- $n = 6$, $\lambda = (3^2)$ *oder* $\lambda = (2^3)$, $f_\lambda = 5$
- $n = 6$, $\lambda = (3, 2, 1)$, $f_\lambda = 16$
- $n = 8$, $\lambda = (5, 2, 1)$ *oder* $\lambda = (3, 2, 1^3)$, $f_\lambda = 64$
- $n = 9$, $\lambda = (7, 2)$ *oder* $\lambda = (2^2, 1^5)$, $f_\lambda = 27$

Im Beweis von Satz 2.12 sollen nur die Teile gezeigt werden, die verändert werden müssen wenn man die Annahme $f_\lambda = p^a$ auf $f_\lambda = 2p^a$ ändert.
Zuerst werden Proposition 2.2 und 2.9 sowie Lemma 2.11 von [1] auf Grade der Form $2p^a$ verallgemeinert. Anschließend müssen in Abschnitt 4 noch die beiden Abschätzungen gegenüber den minimalen Graden und die Überprüfung der minimalen Grade auf die Form $2p^a$ angepasst werden. Danach bleiben nur noch die Fälle $n \leq 45$, die man leicht mit Hilfe eines GAP-Programms überprüft.

Beweis Der Beweis von Satz 2.12 teilt sich in die folgenden Schritte:

1. Verallgemeinerung von Proposition 2.2 aus [1]
2. Verallgemeinerung von Proposition 2.9 aus [1]
3. Verallgemeinerung von Lemma 2.11 aus [1]

4. Verallgemeinerung der Abschätzungen in Abschnitt 4 aus [1]
5. Überprüfung der minimalen Grade
6. Direkte Überprüfung der verbleibenden kleinen Fälle.

Schritt 1.

Proposition 3.4 *Eine Partition $\lambda = (n-k, 1^k)$ hat genau dann die Form $2p^a$ mit p ungerade, prim, wenn $\lambda \in \{(n-1,1)(2,1^{n-2}),(3,1,1),(3,1,1,1),(4,1,1)\}$.*

Beweis OBdA können wir $k \leq \frac{n-1}{2}$ annehmen, da wir sonst die duale Partition betrachten können, die den selben Grad liefert.
Es gilt $f_\lambda = \frac{n!}{k!(n-(k+1))!n} = \frac{(n-1)\dots(n-k)}{k!}$.
Da sich im Zähler k aufeinander folgende natürliche Zahlen befinden kann man diese als $N_0 = \{n_i : n_i \in \{(n-1),\dots,(n-k)\}\}$ so anordnen, dass $n_i \equiv i \, mod \, k$ mit $i \in \{0,\dots,k-1\}$ gilt. Entfernt man nun n_0 erhält man eine Menge N_1.
Es gilt $n_i = i + lk = i + l + l(k-1)$ und damit gilt $n_0 \, mod(k-1) = n_{k-1} \, mod(k-1)$. Man erhält modulo $k-1$ also wieder $k-1$ aufeinander folgende Zahlen in N_1. Entfernt man nun wieder wie oben das entsprechende Element, kann man auf diese Weise wegen $k \leq \frac{n-1}{2}$ jedem Term $n-j$ genau ein $i \in \{1,\dots k\}$ zuordnen, das $n-j$ teilt. Weiter gilt wegen $k \leq \frac{n-1}{2}$ und $n-k \geq \frac{n+1}{2}$ aber, dass i ein echter Teiler von $n-j$ ist. Als Ergebnis bleibt also $f_\lambda = \frac{(n-1)\dots(n-k)}{k!} = \prod_{l=1}^{k} m_l$ mit $m_l \geq 2$ und m_l teilt $n-i$ für ein i. Betrachten wir nun erst den Fall $k \geq 3$. Wegen $ggT(n-1,n-3) \in \{1,2\}$ und $ggT(n,n-1) = 1$ für alle n, muss $n-1$ gerade sein. Ansonsten würde das Produkt mindestens zwei verschiedene ungerade Primzahlen enthalten. Da 2 aber nur in erster Potenz im Produkt auftreten darf, muss entweder $n-1$ oder $n-3$ beim Teilen nur ungerade Primzahlen liefern. In beiden Fällen handelt es sich aber um Primzahlen, die nicht in $n-2$ vorkommen. Damit enthält das Produkt aber wieder zwei unterschiedliche ungerade Primzahlen.
Sei also $k = 2$ es gilt $f_\lambda = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ weiter gilt $ggT(n-1,n-2) = 1$ und damit muss entweder $n-1 = 4$ oder $n-2 = 4$ gelten, was zusammen mit $k = 1$ und $n = 2p^a+1$ zu den obigen Ausnahmen führt.

Sei im Weiteren $f_\lambda = 2p^a$ mit p ungerade, prim. Sei f_λ weiter keine Haken-Partition und $f_\lambda \geq n+1$.

Schritt 2.

Proposition 3.5 *Sei q eine Primzahl mit $n - m_1 \leq q \leq n$, dann sind*

$$q, 2q, \dots, \left[\frac{n}{q}\right] q$$

Hakenlängen der ersten Spalte von λ.

Beweis Sei $w = \left[\frac{n}{q}\right]$, $n = wq + r$, $0 \leq r \leq q$. Laut Annahme gilt $(w-1)q \leq (w-1)q + r = n - q \leq m_1$. Da m_1 der Vielfachheit von 1 in λ entspricht sind die Zahlen $1, 2, \dots, m_1$ alle Hakenlängen der ersten Spalte. Insbesondere sind damit $q, 2q, \dots, (w-1)q$ Hakenlängen der ersten Spalte. Gilt $wq \leq m_1$ bleibt nichts zu zeigen. Sei also $m_1 < wq$. Es gibt höchstens w Haken, deren Länge durch q teilbar ist (vgl. [16] Proposition 3.6). Wenn nur die obigen $(w-1)$ Haken in der ersten Spalte durch q teilbar sind, so gilt $q \,|\, f_\lambda$, da $\prod_{i=1}^{w}(iq) \,|\, n!$. Nach Voraussetzung gilt dann $f_\lambda = 2(wq)_q$. Damit gilt dann $f_\lambda \,|\, wq \leq 2n$ und somit $f_\lambda \leq 2n < \frac{1}{2}n(n-3)$ für $n \geq 8$. Sei h_{ij} der zusätzliche Haken mit durch q teilbarer Länge. Da $\lambda \neq (1^n)$ ist $m_1 \leq h_2$. Sei $h_2 > m_1$, dann folgt $h_{ij} + h_{21} > q + m_1 \geq n$.

Mit Korollar 2.8 aus [1] folgt dann $j = 1$. Sei $h_2 = m$, dann gilt $\lambda = (n - m_1, 1^{m_1})$ und mit $m_1 < wq$ muss ein durch q teilbarer Haken in der ersten Spalte sein. Da aber $n - m_1 \leq q$ gilt muss es sich um den $(1, 1)-$Haken handeln. Und somit gilt $h_{11} = wq$.

Schritt 3.

Lemma 3.6 *Sei q eine Primzahl mit $\frac{n}{2} < q \leq n$, dann hat λ mit $f_\lambda = 2p^a$ einen Haken der Länge q.*

Beweis Angenommen, λ hätte keinen Haken der Länge q, dann folgt mit der Hakenformel $q \mid f_\lambda$ und wegen $q^2 \nmid n!$ nach Voraussetzung $f_\lambda = 2q$. Nun gilt aber $n - 1 < 2q \leq 2n < \frac{1}{2}n(n-3)$ für $n \geq 8$ was nach Satz 2.9 nicht möglich ist. Und damit hat λ einen Haken der Länge q.

Schritt 4.

Mit Hilfe von Proposition 3.2 zeigen die Autoren der Arbeit,
wie sich der $p-$Anteil einer möglichen Partition in Abhängigkeit der Länge des längsten Hakens abschätzen lässt. Um diese Proposition in unserem Fall für $2p^a$ zu verwenden genügt es also die Abschätzung zu verdoppeln.
Um also zu zeigen, dass sich der gesuchte Charkatergrad in der Liste der minimalen Grade befindet zeigen wir

$$512n^2 \leq \frac{1}{5!}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-9)$$

für $43 \leq n \leq 9,7 \times 10^8$ und

$$2^{449}n^2 \leq \frac{\mu(1)}{18!}\prod_{i=1}^{1} 8(n - \mu_i - 18 + i)$$

für $n > 9,7 \times 10^8$
Da die erste Abschätzung erst für $n \geq 45$ gilt müssen im Anschluss alle Fälle bis $n = 45$ betrachtet werden.
Von der Richtigkeit der zweiten Abschätzung überzeugt man sich leicht.
Somit bleibt noch zu zeigen, dass es für $925000000 \leq n \leq 970000000$ in den Termen $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ stets einen Primteiler q gibt, so dass mit p_1 und p_2 als größte Primzahlen kleiner n die Gleichung $p_1 + p_2 + q > 2n$ erfüllt ist. Diese Fälle müssen betrachtet werden, da in der Orginalarbeit die Abschätzung $2^{448}n^2 \leq \frac{\mu(1)}{18!}\prod_{i=1}^{1} 8(n - \mu_i - 18 + i)$ schon für $n > 9,25 \times 10^8$ gilt. Dies überprüft man leicht mit Hilfe eines entsprechenden Programms in GAP.
Somit kann $n - h_1 = c = 4$ in Proposition 3.2 für $43 \leq n \leq 9,7 \times 10^8$ angenommen werden und wir haben die Fälle für $n > 45$ behnadelt.

Schritt 5.

Für $k = 2$ und $k = 3$ überprüft man leicht, dass es in den Formeln für die minimalen Grade bis auf die obigen Ausnahmen Terme gibt, die zu mehr als einer ungeraden Primzahl führen.
Für die restlichen Fälle betrachtet man die ersten aufeinander folgenden Terme. Für $k \geq 4$ gibt es hiervon mindestens zwei. Man geht nun wie folgt vor:
Gibt es nur zwei aufeinander folgende Terme n_i, so ist deren größter gemeinsamer Teiler 1, es dürfen also beim Teilen nur eine 2 und eine Primzahl aus einem der beiden Terme übrig bleiben.

Damit muss aber $n_2 \leq 2H(D)$ gelten, wenn $H(D)$ das Produkt der Hakenlängen der oberen k Haken bezeichnet.
Gibt es drei aufeinanderfolgende Terme, so muss $n_2 n_3 \leq 2H(D)$ gelten. Bei vier Termen kann als größter gemeinsamer Teiler maximal 3 auftreten und somit muss $n_2 n_3 n_4 \leq 6H(D)$ gelten.
Weiter sieht man leicht anhand der möglichen Diagramme in k, dass es für $n \geq 7$ immer mindestens 3 und für $n \geq 10$ mindestens 4 aufeinanderfolgende Terme gibt.
Mit diesen Informationen, ist es nun leicht zu überprüfen, dass für $n \geq 45$ keiner der Grade mit $4 \leq k \leq 5$ die Form $f_\lambda = 2p^a$ hat. Die selbe Überprüfung für $n \geq 9,25 \times 10^8$ und $6 \leq k \leq 18$ liefert auch keine weiteren möglichen Grade der passenden Form.

Schritt 6.

Die kleinsten Grade überprüft man leicht z.B. mit Hilfe von GAP und erhält die oben beschriebenen Ausnahmefälle.

Literatur

[1] A. Balog, C. Bessenrodt, J. B. Olsson and K. Ono: Prime Power Degree Representations of the Symmetric and Alternating Groups, J. London Math. Soc..2001, 64: 344-356

[2] C. Bessenrodt, H. Weber: On p-blocks of symmetric and alternating groups with all irreducible Brauer characters of prime power degree, J. Algebra 320 (2008) 2405-2421

[3] R. Brauer: Representations of finite groups. Lectures on modern mathematics, Vol.I, 133-175, Wiley, New York, 1963. Reproduced in Vol.II of: Richard Brauer: collected papers. MIT press, Cambridge MA, 1980.

[4] E. Dade: Deux groups finis distincts ayant la meme algebre de group sur tout corps, Math. Z. 119 (1971), 345-348.

[5] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*; 2008,(`http://www.gap-system.org`).

[6] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, and G. Pfeiffer: CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras. Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput., 7 (1996), pages 175-210.

[7] B. Huppert: Endliche Gruppen I, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 134, Springer 1967.

[8] B. Huppert: Finite Groups II, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 242, Springer 1982.

[9] B. Huppert: Finite Groups III, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 243, Springer 1982.

[10] J. E. Humphreys: The Steinberg Representation, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 16(1987), 247-263.

[11] C. Jansen, The minimal degrees of faithful representations of the sporadic simple groups and their covering groups, LMS J. Comput. Math. 8 (2005), 122 - 144.

[12] W. Kimmerle: Group rings of finite simple groups, Resenhas IME-USP, vol. 5(2002), 261-278.

[13] Frank Lübeck: Smallest degrees of representations of exceptional groups of Lie typ, Comm. in Algebra 29(2001), 2147-2169

[14] G. Malle, A. E. Zalesskii: Prime power degree representations of quasi-simple groups, Archiv der Mathematik, Volume 77, Number 6 Dezember 2001, 461-468.

[15] M. Nagl: Über das Isomorphieproblem von Gruppenalgebren endlicher einfacher Gruppen. Diplomarbeit, Universität Stuttgart 2008.

[16] J. B. Olsson: Combinatorics and representations of finite groups, Vorlesungen aus dem FB Mathematik der Univ. Essen, Heft 20, 1993

[17] R. Rasala: On the minimal degrees of characters of S_n, J.Algebra 45, (1977) 132-181

[18] W. Specht: Darstellungstheorie der alternierenden Gruppe, Mathematische Zeitschrift 43, (1938) 553-572

[19] R. Steinberg: Prime power representations of finite linear groups II, C. J. Math. , 9 (1957) p 347-351

[20] P. H. Tiep, A. E. Zalesskii: Minimal characters of the finite classical groups,Comm. in Algebra, 24(1996), 2093-2167

Matthias Nagl
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart
Germany
E-Mail: Matthias.Nagl@mathematik.uni-stuttgart.de

Erschienene Preprints ab Nummer 2007/001

Komplette Liste: `http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/preprints`

2011/007 *Nagl, M.:* Charakterisierung der Symmetrischen Gruppen durch ihre komplexe Gruppenalgebra

2011/006 *Solanes, G.; Teufel, E.:* Horo-tightness and total (absolute) curvatures in hyperbolic spaces

2011/005 *Ginoux, N.; Semmelmann, U.:* Imaginary Kählerian Killing spinors I

2011/004 *Scherer, C.W.; Köse, I.E.:* Control Synthesis using Dynamic D-Scales: Part II — Gain-Scheduled Control

2011/003 *Scherer, C.W.; Köse, I.E.:* Control Synthesis using Dynamic D-Scales: Part I — Robust Control

2011/002 *Alexandrov, B.; Semmelmann, U.:* Deformations of nearly parallel G_2-structures

2011/001 *Geisinger, L.; Weidl, T.:* Sharp spectral estimates in domains of infinite volume

2010/018 *Kimmerle, W.; Konovalov, A.:* On integral-like units of modular group rings

2010/017 *Gauduchon, P.; Moroianu, A.; Semmelmann, U.:* Almost complex structures on quaternion-Kähler manifolds and inner symmetric spaces

2010/016 *Moroianu, A.; Semmelmann,U.:* Clifford structures on Riemannian manifolds

2010/015 *Grafarend, E.W.; Kühnel, W.:* A minimal atlas for the rotation group $SO(3)$

2010/014 *Weidl, T.:* Semiclassical Spectral Bounds and Beyond

2010/013 *Stroppel, M.:* Early explicit examples of non-desarguesian plane geometries

2010/012 *Effenberger, F.:* Stacked polytopes and tight triangulations of manifolds

2010/011 *Györfi, L.; Walk, H.:* Empirical portfolio selection strategies with proportional transaction costs

2010/010 *Kohler, M.; Krzyżak, A.; Walk, H.:* Estimation of the essential supremum of a regression function

2010/009 *Geisinger, L.; Laptev, A.; Weidl, T.:* Geometrical Versions of improved Berezin-Li-Yau Inequalities

2010/008 *Poppitz, S.; Stroppel, M.:* Polarities of Schellhammer Planes

2010/007 *Grundhöfer, T.; Krinn, B.; Stroppel, M.:* Non-existence of isomorphisms between certain unitals

2010/006 *Höllig, K.; Hörner, J.; Hoffacker, A.:* Finite Element Analysis with B-Splines: Weighted and Isogeometric Methods

2010/005 *Kaltenbacher, B.; Walk, H.:* On convergence of local averaging regression function estimates for the regularization of inverse problems

2010/004 *Kühnel, W.; Solanes, G.:* Tight surfaces with boundary

2010/003 *Kohler, M; Walk, H.:* On optimal exercising of American options in discrete time for stationary and ergodic data

2010/002 *Gulde, M.; Stroppel, M.:* Stabilizers of Subspaces under Similitudes of the Klein Quadric, and Automorphisms of Heisenberg Algebras

2010/001 *Leitner, F.:* Examples of almost Einstein structures on products and in cohomogeneity one

2009/008 *Griesemer, M.; Zenk, H.:* On the atomic photoeffect in non-relativistic QED

2009/007 *Griesemer, M.; Moeller, J.S.:* Bounds on the minimal energy of translation invariant n-polaron systems

2009/006 *Demirel, S.; Harrell II, E.M.:* On semiclassical and universal inequalities for eigenvalues of quantum graphs

2009/005 *Bächle, A, Kimmerle, W.:* Torsion subgroups in integral group rings of finite groups

2009/004 *Geisinger, L.; Weidl, T.:* Universal bounds for traces of the Dirichlet Laplace operator

2009/003 *Walk, H.:* Strong laws of large numbers and nonparametric estimation

2009/002 *Leitner, F.:* The collapsing sphere product of Poincaré-Einstein spaces

2009/001 *Brehm, U.; Kühnel, W.:* Lattice triangulations of E^3 and of the 3-torus

2008/006 *Kohler, M.; Krzyżak, A.; Walk, H.:* Upper bounds for Bermudan options on Markovian data using nonparametric regression and a reduced number of nested Monte Carlo steps

2008/005 *Kaltenbacher, B.; Schöpfer, F.; Schuster, T.:* Iterative methods for nonlinear ill-posed problems in Banach spaces: convergence and applications to parameter identification problems

2008/004 *Leitner, F.:* Conformally closed Poincaré-Einstein metrics with intersecting scale singularities

2008/003 *Effenberger, F.; Kühnel, W.:* Hamiltonian submanifolds of regular polytope

2008/002 *Hertweck, M.; Hofert, C.R.; Kimmerle, W.:* Finite groups of units and their composition factors in the integral group rings of the groups $PSL(2, q)$

2008/001 *Kovarik, H.; Vugalter, S.; Weidl, T.:* Two dimensional Berezin-Li-Yau inequalities with a correction term

2007/006 *Weidl, T.:* Improved Berezin-Li-Yau inequalities with a remainder term

2007/005 *Frank, R.L.; Loss, M.; Weidl, T.:* Polya's conjecture in the presence of a constant magnetic field

2007/004 *Ekholm, T.; Frank, R.L.; Kovarik, H.:* Eigenvalue estimates for Schrödinger operators on metric trees

2007/003 *Lesky, P.H.; Racke, R.:* Elastic and electro-magnetic waves in infinite waveguides

2007/002 *Teufel, E.:* Spherical transforms and Radon transforms in Moebius geometry

2007/001 *Meister, A.:* Deconvolution from Fourier-oscillating error densities under decay and smoothness restrictions