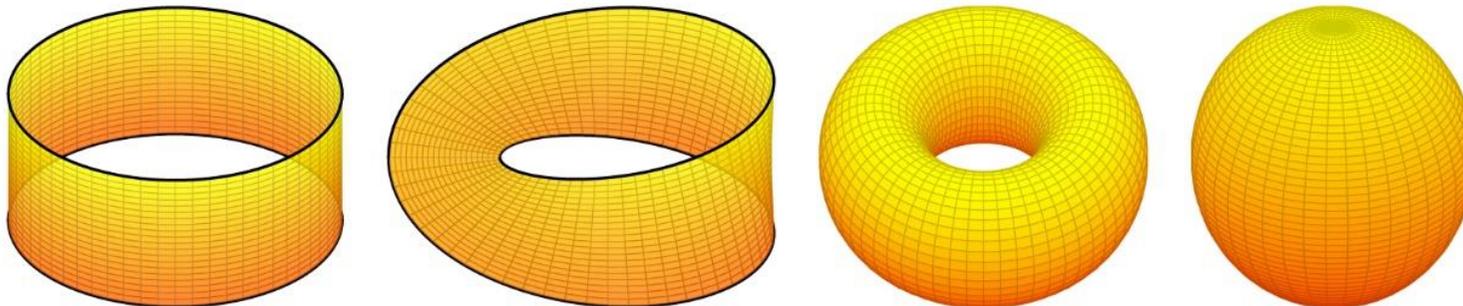


Profillinie Geometrie und Topologie

Juli 2023



Dozentinnen und Dozenten:



Prof. Uwe
Semmelmann



Prof. Michael
Eisermann



Prof. Andreas
Kollross



Priv. Doz. Dr.
Anda Degeratu

Themen

Differentialgeometrie,
Dirac-Operatoren,
Anwendungen der
Darstellungstheorie
kompakter Lie-Gruppen

Themen

Spieltheorie,
Topologie,
Knotentheorie
und 3-dimensionale
Mannigfaltigkeiten

Themen

Wirkungen von Lie-
Gruppen in der
Riemannschen
Geometrie,
homogene und
symmetrische Räume

Themen

Differentialgeometrie - von
der Physik motivierte
geometrische Probleme,
Geometrische Analysis,
Anwendung von PDE,
komplexer und
algebraischer Geometrie

Profillinie
Geometrie
und Topologie

Wissenschaftlicher Hintergrund: Geometrie

In der Geometrie untersucht man Eigenschaften von Räumen (Mannigfaltigkeiten), die in der Umgebung jedes Punktes aussehen wie der euklidische Raum \mathbb{R}^n . Im Unterschied zum \mathbb{R}^n erlaubt man aber eine kompliziertere Topologie und eine interessantere Geometrie (Krümmung).

Ziel ist es, Analysis auf gekrümmten Objekten, z.B. einer Kugeloberfläche, zu ermöglichen. Dafür benötigt man die abstrakte Sprache von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, Tangentialräumen, Vektorfeldern und Differentialformen. Lösungen von partiellen Differentialgleichungen (PDE) können als Schnitte von Vektorbündeln im Kern von Differentialoperatoren (z.B. dem Laplace- oder Dirac-Operator) beschrieben werden.

Die Existenz von Lösungen hängt dann in interessanter Weise von der Geometrie und Topologie der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeiten ab. So entspricht z.B. der Kern des Laplace-Operators auf Differentialformen genau der sogenannten deRham-Kohomologie. Das Studium topologischer Invarianten (z.B. der Euler-Charakteristik) gestattet es, Aussagen zu machen über Lösungen von PDEs und damit über die Existenz geometrischer Strukturen.

Die Motivation für differentialgeometrische Begriffsbildungen kommen oft aus der Physik, z.B. Relativitätstheorie oder der Stringtheorie.

Die Mannigfaltigkeiten und damit die Geometrie werden interessanter durch Zusatzstrukturen, z.B. Symmetrien, abstrakt beschrieben durch Gruppenwirkungen. Hier spielt auch die Darstellungstheorie eine große Rolle. Andere wichtige Zusatzstrukturen sind Tensoren, die gewisse Differentialgleichungen erfüllen, z.B. Einstein-Metriken oder Kähler-Strukturen.

Nach der Vorlesung Topologie werden die Grundlagen der Differentialgeometrie in der Vorlesung "Differentialgeometrie" eingeführt. Die Aspekte von Krümmung werden dann in den Vorlesungen zur Riemannschen Geometrie behandelt. Dafür gibt es verschiedenen Varianten: Homogene Räume, Relativitätstheorie, Differentialoperatoren.



Wissenschaftlicher Hintergrund: Topologie

Die Topologie (griechisch τόπος [tópos] "Ort" und λόγος [lógos] "Lehre") ist wörtlich übersetzt die "Lehre vom Ort" und handelt von der Form und gegenseitigen Lage geometrischer Objekte, wie etwa Kurven und Flächen im Raum. Die obigen Beispiele illustrieren einige geometrische Fragestellungen und erste erfolgreiche Anwendungen.

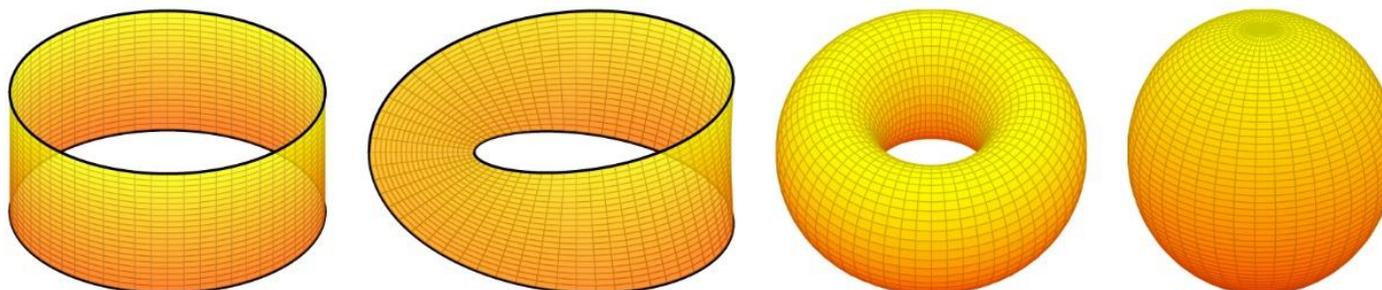
Dank ihrer vielseitig einsetzbaren Begriffe und Methoden ist die Topologie neben Analysis und Algebra eine der Grundstrukturen der modernen Mathematik und liefert Werkzeuge, um eine Vielzahl sehr unterschiedlicher Phänomene zu behandeln. Sie untersucht grundlegende Konzepte wie Konvergenz und Stetigkeit, offene und abgeschlossene Mengen, Zusammenhang und Kompaktheit, lokale vs globale Eigenschaften, Fundamentalgruppen und Überlagerungen, usw. Hierdurch steht sie in enger Wechselwirkung mit der Analysis, der Geometrie und der Algebra. Die Vorlesung vermittelt hierzu die notwendigen Grundlagen.

Als mathematische Disziplin ist die Topologie eine Schöpfung des 20. Jahrhunderts – und damit relativ jung. Sie wurde schnell zum mathematischen Grundwissen, vor allem Dank ihrer spektakulären Erfolge in vielfältigen Anwendungen und Verzweigungen (analytische, geometrische, algebraische Topologie...).

In Einstein's general relativity the structure of space can change but not its topology.

Topology is the property of something that doesn't change when you bend it or stretch it as long as you don't break anything.

Edward Witten



Profillinie
Geometrie
und Topologie

Wahl-Kernmodule und Erweiterungen im Master

Die Profillinie basiert auf den Vorlesungen **Topologie** (SoSe) und **Differentialgeometrie** (WiSe).

In der Vorlesung **Symmetrische Räume** können die Grundlagen der Differentialgeometrie ebenfalls erworben werden. Außerdem wird die Riemannsche Geometrie angesprochen.

Vorlesungsaufbau Geometrie und Topologie

Vertiefung	Geometrie der schwarzen Löcher	Spin-Geometrie und Dirac-Operatoren	Lie-Gruppen-Wirkungen	Kähler Mannigfaltigkeiten	Algebraische Topologie 2	
	Riemannsche Geometrie / weitere Vorlesungen im Wechsel				Algebraische Topologie 1	
	Homogene Räume	Relativitätstheorie	Differentialoperatoren			
Grundlagen	↑	Differentialgeometrie			↑	Geometrische Topologie
	Symmetrische Räume	Topologie				

Wahl-Kern-Module

Mastervorlesungen

Profillinie
Geometrie
und Topologie

Vorlesungen in den kommenden Semestern

WiSe 2023/2024	Geometry of Black Holes	Priv. Doz. Dr. Anda Degeratu
	Differentialgeometrie	Prof. Uwe Semmelmann
SoSe 2024	Topologie	Prof. Uwe Semmelmann
	Neural Networks	Priv. Doz. Dr. Anda Degeratu
WiSe 2024/2025	Kähler Mannigfaltigkeiten	Prof. Uwe Semmelmann
	Differentialgeometrie	Prof. Andreas Kollross

Vertiefung	Geometrie der schwarzen Löcher	Spin-Geometrie und Dirac-Operatoren	Lie-Gruppen-Wirkungen	Kähler Mannigfaltigkeiten	Algebraische Topologie 2
	Riemannsche Geometrie / weitere Vorlesungen im Wechsel				
Grundlagen	Homogene Räume	Relativitätstheorie	Differentialoperatoren	Algebraische Topologie 1	
	Symmetrische Räume	Differentialgeometrie			Geometrische Topologie
		Topologie			

plus vertiefende Seminare



Vorlesung Topologie

jeweils im Sommersemester

Dozenten: Prof. Michael Eisermann / Prof. Uwe Semmelmann

Inhalt der Vorlesung:

Topologie ist qualitative Geometrie, vollkommen konkret und zugleich wunderbar abstrakt. Sie untersucht grundlegende Konzepte wie

- Konvergenz und Stetigkeit,
- Kompaktheit und Zusammenhang,
- Simplicialkomplexe und Mannigfaltigkeiten,
- lokale und globale Eigenschaften,
- Homöomorphismen und Invarianten,
- Fundamentalgruppen und Überlagerungen,
- Fixpunktsätze und vieles mehr.

Voraussetzung:

Grundvorlesungen Analysis und lineare Algebra

Vorlesung Differentialgeometrie

jeweils im Wintersemester

Dozenten: Prof. Uwe Semmelmann / Priv.-Doz. Dr. Anda Degeratu

Inhalt der Vorlesung:

- Studium geometrischer Objekte mit Methoden der Analysis und Topologie
- Einführung fundamentaler Begriffe, wie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen, Tangentialräume, Vektorfelder, Differentialformen
- Diskussion wichtiger Beispielklassen, wie z.B. Sphären, projektive Räume und homogene Räume

Voraussetzung:

Lineare Algebra und Analysis, Topologie (wünschenswert)

Vorlesung Symmetrische Räume

Dozent: Prof. Andreas Kollross

Symmetrische Räume sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die ein besonders hohes Maß an Symmetrie besitzen, sie sind eine Klasse von Beispielen, die für die Differentialgeometrie von zentraler Bedeutung ist. Symmetrische Räume sind dadurch gekennzeichnet, dass es in jedem ihrer Punkte eine Punktspiegelung gibt; der euklidische Raum und Sphären sind elementare Beispiele. Außerdem gehören projektive und hyperbolische Räume und Grassmann-Mannigfaltigkeiten zu dieser Klasse.

Symmetrische Räume sind insbesondere homogen, was eine algebraische Beschreibung ermöglicht. Diese führt zu einem dazu, dass man die symmetrischen Räume klassifizieren kann, d.h. man hat eine vollständige — nicht allzu lange — Liste der Grundbausteine. Zum anderen kann man diesen algebraischen Zugang nutzen, um geometrische Größen wie Krümmungen zu berechnen und explizite Beschreibungen zu erhalten.

Inhalt der Vorlesung:

- Riemannsche Mannigfaltigkeiten,
- Geodätische Parallelverschiebung,
- Krümmung,
- Lie-Gruppen und Lie-Gruppen-Wirkungen,
- homogene und symmetrische Räume,
- algebraische Beschreibung,
- Klassifikation Riemannscher symmetrischer Räume.

Voraussetzung:

Grundvorlesungen über Analysis und lineare Algebra

Vorlesung Riemannsche Geometrie

Inhalt der Vorlesung:

- Studium gekrümmter Mannigfaltigkeiten im Wechselspiel von Geometrie und Topologie
- Ausgangspunkt sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten versehen mit einer Riemannschen Metrik, d.h. einem punktweisen Skalarprodukt auf den Tangentialräumen
- Einführung von verschiedenen Krümmungsbegriffen: Riemannsche Krümmung, Schnitt-, Ricci- und Skalar-Krümmung
- Definition und Anwendungen von Geodätischen und Jakobi-Felder
- Die Vorlesung Riemannsche Geometrie kommt in verschiedenen Varianten: mit Bezug zur Relativitätstheorie, mit dem Schwerpunkt Gruppenwirkungen und homogene Räume oder mit Konzentration auf Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten (insbesondere dem Laplace-Operator)

Voraussetzung:

Lineare Algebra und Analysis, Topologie, Differentialgeometrie

**Für Fragen stehen Ihnen die Dozenten der Profillinie
Geometrie und Topologie gerne zur Verfügung.**

A dark blue circular logo located in the bottom right corner of the page. It contains the text "Profillinie Geometrie und Topologie" in white, sans-serif font, arranged in three lines.

**Profillinie
Geometrie
und Topologie**