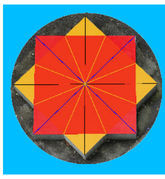
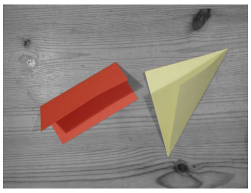
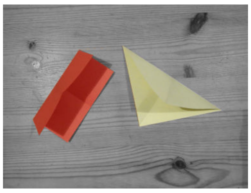


Wie baut man ein Achteck?

Falten

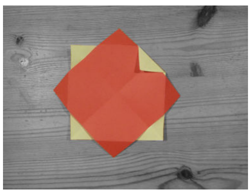
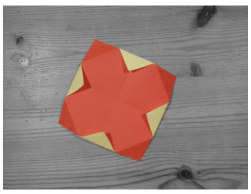
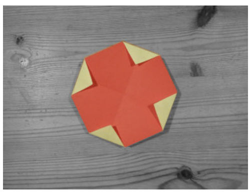
Man beginnt mit zwei gleich großen, quadratischen Stücken Papier. In den Bildern wurde ein rotes und ein gelbes verwendet, um die Beschreibung verständlicher (und das Ergebnis bunter) zu machen.

Wir falten das rote Quadrat entlang beider Mittellinien (die jeweils gegenüberliegende Seitenmitten verbinden). Das gelbe Quadrat falten wir entlang seiner beiden Diagonalen (die jeweils gegenüber liegende Ecken verbinden).

Auf jedem der beiden Quadrate sind dadurch Faltlinien entstanden, die sich jeweils im rechten Winkel kreuzen. Wir legen das rote Quadrat so auf das gelbe, dass die Faltlinien passen.

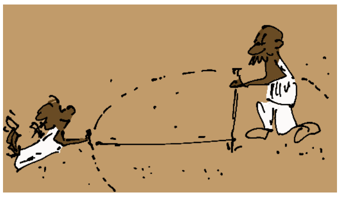
Der Stern, der jetzt vor uns liegt, liegt auch als „Sternstück“ vor einem Nebeneingang zum Gebäude Pfaffenwaldring 7 auf dem Campus Vaihingen.

Jetzt falten wir noch die über das rote Quadrat überstehenden gelben Ecken nach vorn über das rote Quadrat, und dann die überstehenden roten Ecken nach hinten unter das gelbe.

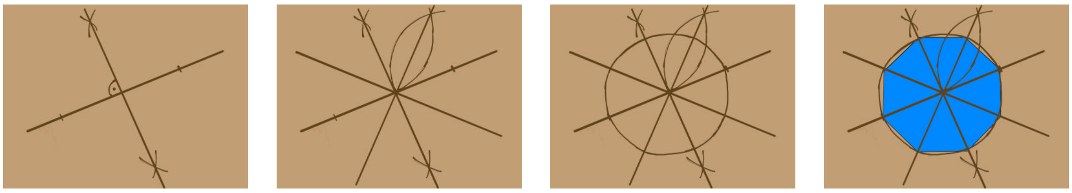
Spuren im Sand

Wie die alten Griechen (und die geringfügig jüngeren Lehrerinnen im Geometrieunterricht) kann man das regelmäßige Achteck auch mit Zirkel und Lineal konstruieren. Auch wenn man wie die alten Griechen geometrische Konstruktionen im Sand zeichnet und keinen Schulzirkel zur Hand hat, muss man auf saubere Kreise nicht verzichten:



Man startet mit einer Geraden, wählt darauf zwei Punkte und konstruiert dann die Mittelsenkrechte zwischen den beiden: mit Zirkel und Lineal schlägt man um beide Punkte je einen Kreis mit demselben Radius und verbindet die beiden (in der ersten Skizze ganz schwach angedeuteten) Schnittpunkte der Kreise. Diese zweite Gerade schneidet die erste im Mittelpunkt zwischen den beiden gewählten Punkten, und steht senkrecht auf der ersten.

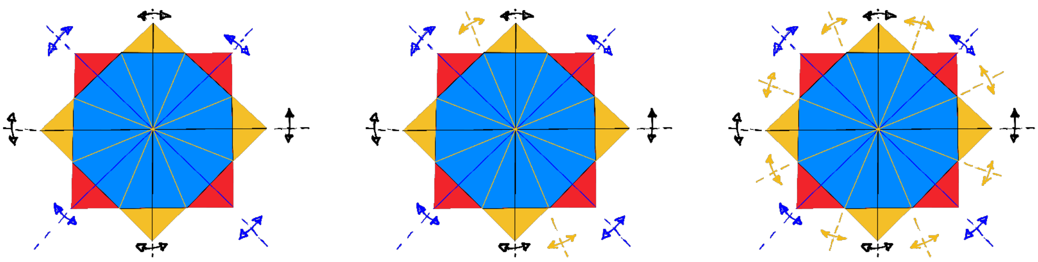
Die jetzt entstandenen rechten Winkel halbieren wir: Dazu verwenden wir zwei Punkte auf den Schenkeln des rechten Winkels im gleichen Abstand zum Mittelpunkt. Um diese neuen Punkte schlagen wir Kreise durch den vorher konstruierten Mittelpunkt. Diese beiden Kreise schneiden sich dann in einem zweiten Punkt auf der gesuchten Winkelhalbierenden, den wir nur noch mit dem Mittelpunkt verbinden müssen.



Schließlich schlagen wir einen Kreis um den Mittelpunkt und markieren die Schnittpunkte dieses Kreises mit unseren vier Geraden: Das sind die acht Ecken des Achtecks.

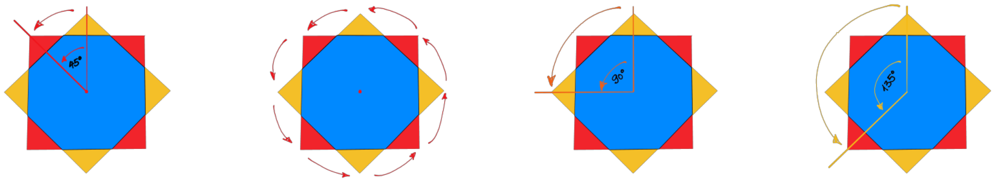
Spiegeln

Sowohl die Konstruktion durch Falten als auch die Konstruktion mit Zirkel und Lineal zeigen, dass es mindestens vier Geraden gibt, zu denen unser Achteck spiegelsymmetrisch ist.
Aber auch an der Verbindungsgerade gegenüberliegender Ecken kann man spiegeln: insgesamt gibt es acht Symmetrieachsen. Jede der vier neuen Spiegelungen vertauscht rot mit gelb.



Drehen

Außer den Spiegelungen lässt das regelmäßige Achteck auch Drehungen zu: Wenn man zum Beispiel um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt des Achtecks dreht, kommt es mit sich selbst wieder genau zur Deckung. Dabei werden rot und gelb vertauscht.



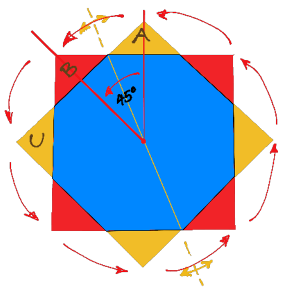
Wenn man die Drehung um 45 Grad mehrfach ausführt, erhält man insgesamt acht verschiedene Drehungen: um 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315 und schließlich 360 Grad gegen den Uhrzeigersinn.

Die letzte Drehung (um 360 Grad) könnte man gerade so gut bleiben lassen (also um 0 Grad drehen). Danach kann man zwar immer weiter noch einmal um Vielfache von 45 Grad weiter drehen – man erhält aber nichts Neues mehr.

Die Drehung um 0 Grad, die gar nichts ändert, mit zu betrachten, ist für Mathematikerinnen so selbstverständlich wie die Null beim Addieren und auf dem Thermometer (und hat auch denselben Sinn beim „Rechnen“ mit diesen Drehungen).

Insgesamt haben wir mit allen Spiegelungen und Drehungen also 16 Symmetrie-Operationen, die unser regelmäßiges Achteck in sich überführen.

Man definiert für diese Operationen eine Multiplikation: das Produkt von zwei solchen Operationen (Spiegelungen oder Drehungen) erhält man, indem man die Operationen nacheinander ausführt. Mit dieser Multiplikation bilden diese Operationen eine Gruppe, also einen Rechenbereich mit einer Multiplikation, für die fast alle gewohnten Rechenregeln gelten.



Das Rechnen mit den Symmetrie-Operationen ist allerdings ein Beispiel dafür, dass es in einer Gruppe auf die Reihenfolge bei der Multiplikation ankommt:

Wenn man zuerst die angedeutete Spiegelung (bei der die mit A und B bezeichneten Felder vertauscht werden) und dann die Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn anwendet, geht A auf B und weiter auf C. Führt man zuerst diese Drehung und dann die Spiegelung aus, geht A auf B und von dort unter der Spiegelung wieder zurück auf A.

M. Stroppel

Die Seite zum Kunstobjekt „Hörsaalobjekte und Sternstück“:

https://opencms.uni-stuttgart.de/fak8/fakultaet/formen-und-kraefte/hoersaalobjekte-und-sternstueck/

Ein Dokument zur rechnerischen Behandlung des regelmäßigen Achtecks:

opencms.uni-stuttgart.de/fak8/fakultaet/.content/media/img_formen_und_kraefte/8-rechnen.pdf