Pi Day im Computermuseum

Teil 2

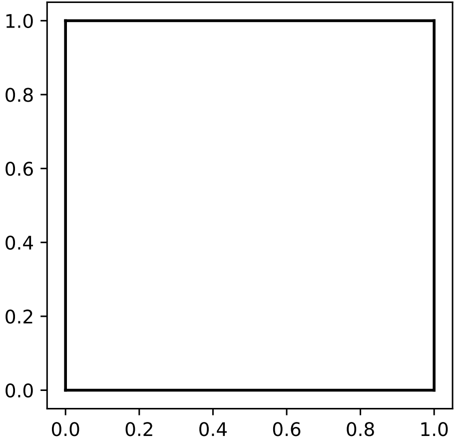
Jan Köllner

3-14-2024

Universität Stuttgart
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung (IADM)

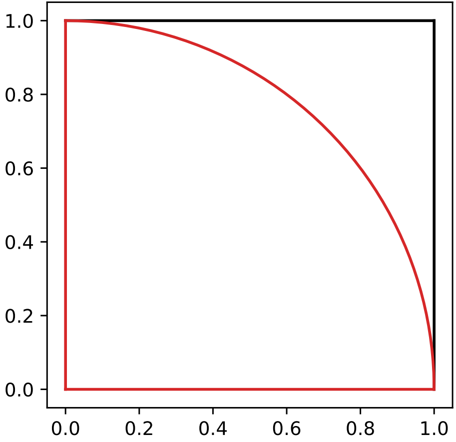
Eine einfache Idee

- Wir beginnen mit einem Quadrat der Seitenlänge 1:



Eine einfache Idee

- Wir beginnen mit einem Quadrat der Seitenlänge 1 und markieren einen Viertelkreis:
- Das Quadrat hat den Flächeninhalt 1, der Anteil der Kreisfläche beträgt $\pi/4$.



Eine einfache Idee

- Wähle *zufällig* einen Punkt (x, y) aus dem Einheitsquadrat. Falls

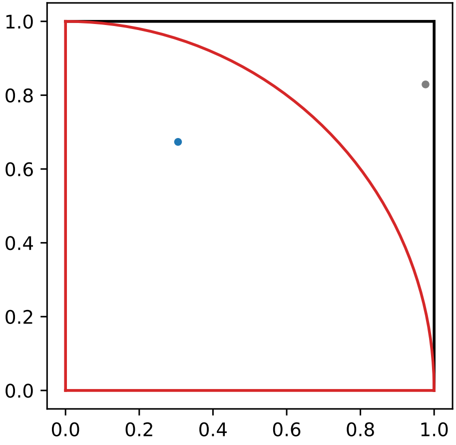
$$\sqrt{x^2 + y^2} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 < 1$$

  so liegt der Punkt im Viertelkreis, andernfalls außerhalb (Kreisrand spielt hier keine Rolle).

- Zähle alle Punkte die im Viertelkreis liegen. Der Flächenanteil des Viertelkreis am Quadrat beträgt gerade $\pi/4$, also ist

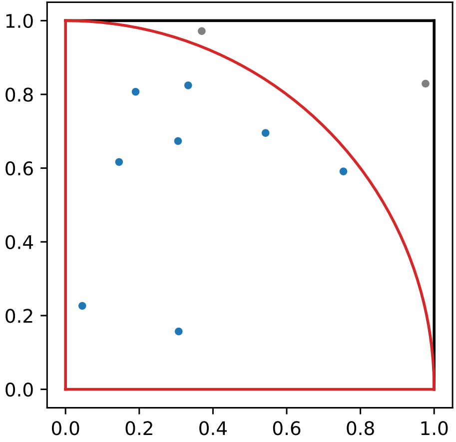
$$4 \cdot \frac{\text{Anzahl Punkte im Kreis}}{\text{Anzahl aller gezogenen Punkte}}$$

  bei *hinreichend großer* Anzahl an Punkten ein *guter* Schätzwert für π.

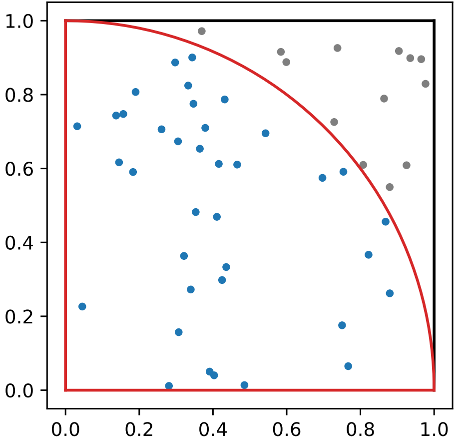


Eine einfache Idee

N	k	$N - k$	$\pi_{\text{est}} = 4 \cdot \frac{k}{N}$	$\lvert \pi - \pi_{\text{est}} \rvert$
10	8	2	3.200	0.058

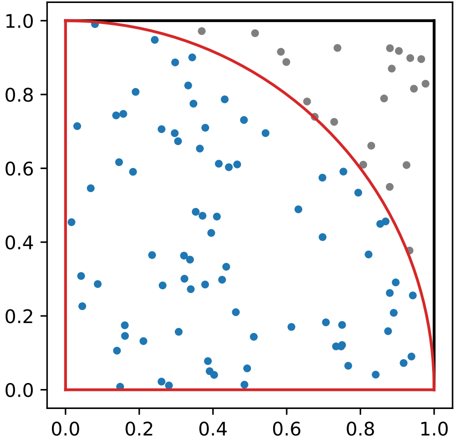


N	k	$N-k$	$\pi_{\text{est}} = 4 \cdot \frac{k}{N}$	$\lvert\pi - \pi_{\text{est}}\rvert$
10	8	2	3.200	0.058
50	37	13	2.960	0.182



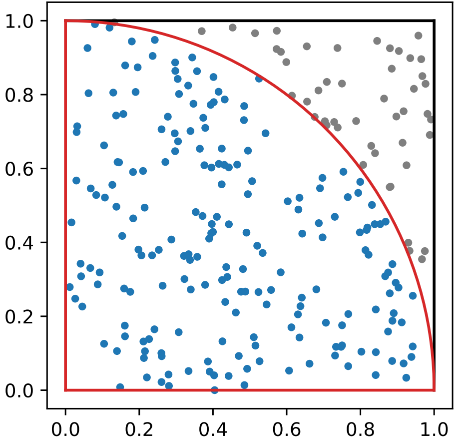
Eine einfache Idee

N	k	$N-k$	$\pi_{\text{est}} = 4 \cdot \frac{k}{N}$	$\lvert\pi - \pi_{\text{est}}\rvert$
10	8	2	3.200	0.058
50	37	13	2.960	0.182
100	79	21	3.160	0.018



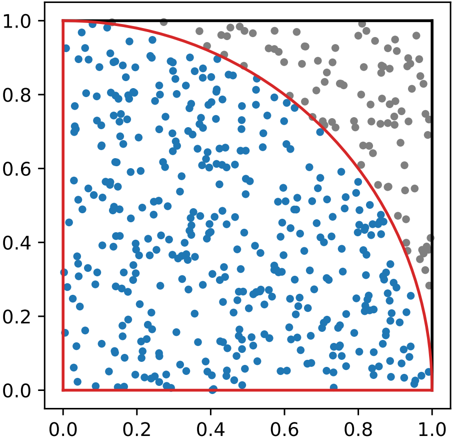
Eine einfache Idee

N	k	$N-k$	$\pi_{\text{est}} = 4 \cdot \frac{k}{N}$	$\lvert \pi - \pi_{\text{est}} \rvert$
10	8	2	3.200	0.058
50	37	13	2.960	0.182
100	79	21	3.160	0.018
250	202	48	3.232	0.090



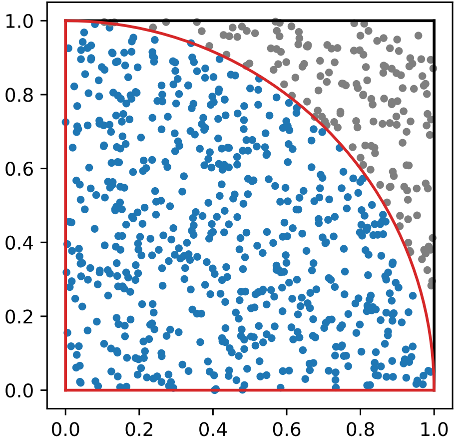
Eine einfache Idee

N	k	$N-k$	$\pi_{\text{est}} = 4 \cdot \frac{k}{N}$	$\lvert\pi - \pi_{\text{est}}\rvert$
10	8	2	3.200	0.058
50	37	13	2.960	0.182
100	79	21	3.160	0.018
250	202	48	3.232	0.090
500	402	98	3.216	0.074



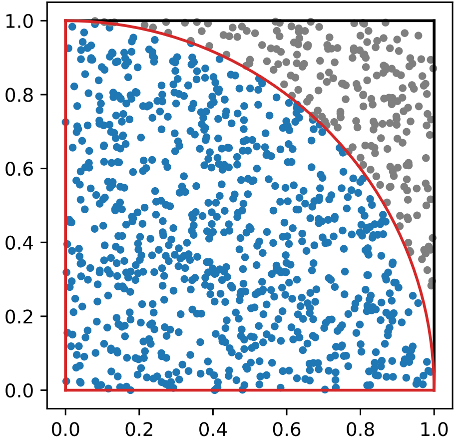
Eine einfache Idee

N	k	$N-k$	$\pi_{\text{est}} = 4 \cdot \frac{k}{N}$	$\lvert \pi - \pi_{\text{est}} \rvert$
10	8	2	3.200	0.058
50	37	13	2.960	0.182
100	79	21	3.160	0.018
250	202	48	3.232	0.090
500	402	98	3.216	0.074
750	591	159	3.152	0.010



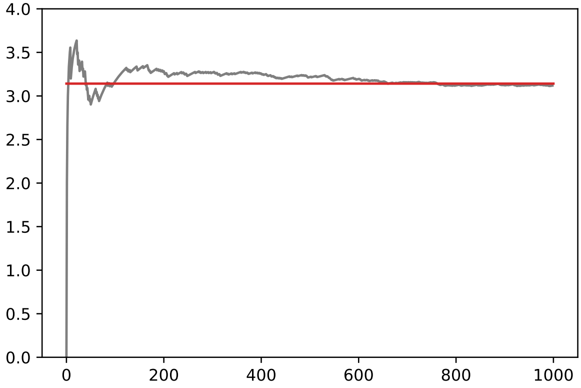
Eine einfache Idee

N	k	$N-k$	$\pi_{\text{est}} = 4 \cdot \frac{k}{N}$	$\lvert \pi - \pi_{\text{est}} \rvert$
10	8	2	3.200	0.058
50	37	13	2.960	0.182
100	79	21	3.160	0.018
250	202	48	3.232	0.090
500	402	98	3.216	0.074
750	591	159	3.152	0.010
1000	780	220	3.120	0.022



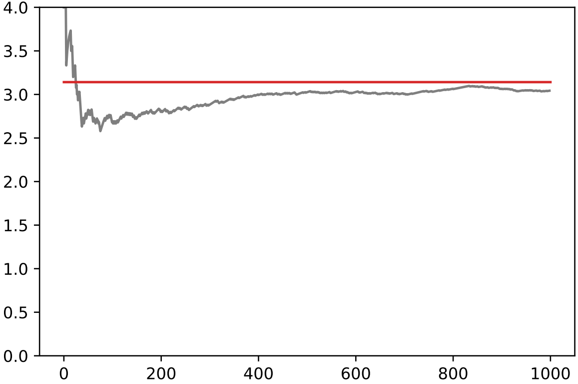
Wiederholungen des Experiments

- Obiges Experiment



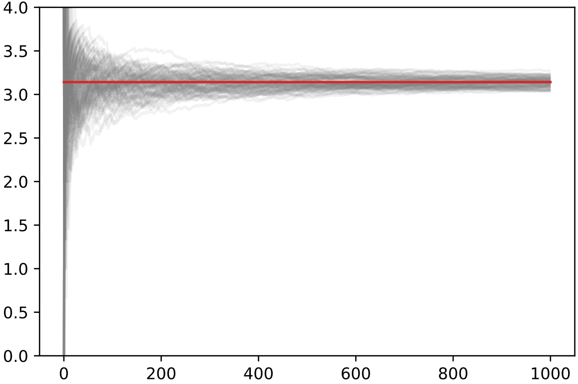
Wiederholungen des Experiments

- Das selbe Experiment nochmal



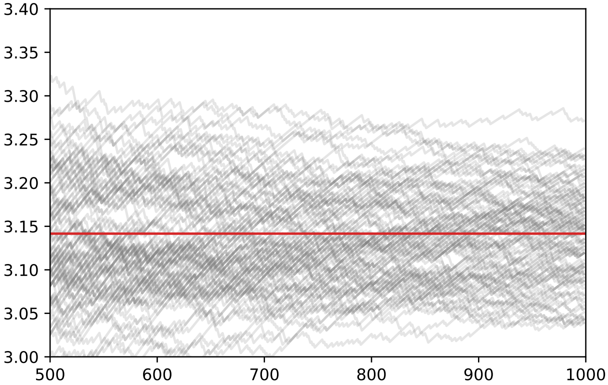
Wiederholungen des Experiments

- 100 Wiederholungen des Experiments



Wiederholungen des Experiments

- 100 Wiederholungen des Experiments
- In 58 Fällen war die erste Nachkommastelle korrekt, in 10 Fällen zusätzlich die Zweite.



Sicherheiten?

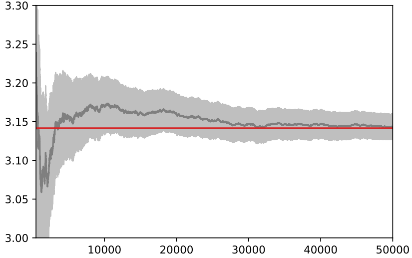
- Das Zufallsexperiment ist ein Bernoulli-Prozess mit Wahrscheinlichkeit $p = \pi/4$ ähnlich wie beim Münzwurf.
- Konfidenzintervall für den Schätzwert π_{est}:

$$\text{Err.} = 1.96 \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{\pi_{\text{est}}/4 \cdot (1 - \pi_{\text{est}}/4)}{N}}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0.95 liegt der tatsächliche Wert von π im Intervall

$$[\pi_{\text{est}} - \text{Err.}, \pi_{\text{est}} + \text{Err.}]$$

- Die Intervallbreite nimmt mit $1/\sqrt{N}$ ab.



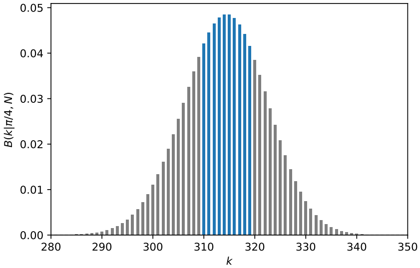
Sicherheiten?

- Das Zufallsexperiment ist ein Bernoulli-Prozess mit Wahrscheinlichkeit $p = \pi/4$ ähnlich wie beim Münzwurf mit Verteilungsfunktion

$$B(k|\pi/4, N) = \binom{N}{k} \left(\frac{\pi}{4}\right)^k \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^{N-k}$$

  für $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ und N der Anzahl der gezogenen Punkte.

- Für z.B. $N = 400$, dann ist in den Fällen $k \in \{310, 311, \ldots, 319\}$ die erste Nachkommastelle von π korrekt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist



$$P(310 \leq k \leq 319) = \sum_{k=310}^{319} B(k|\pi/4, 400) \approx 0.46$$

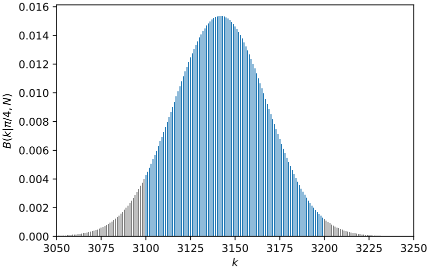
Sicherheiten?

- Für $N = 400$:

$$P(310 \leq k \leq 319) \approx 0.46$$

- Für $N = 4000$:

$$P(3100 \leq k \leq 3199) \approx 0.93$$



Sicherheiten?

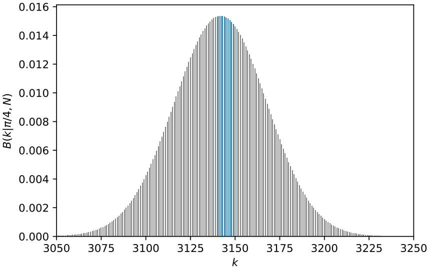
- Für $N = 400$:

$$P(310 \leq k \leq 319) \approx 0.46$$

- Für $N = 4000$:

$$P(3100 \leq k \leq 3199) \approx 0.93$$

$$P(3140 \leq k \leq 3149) \approx 0.15$$

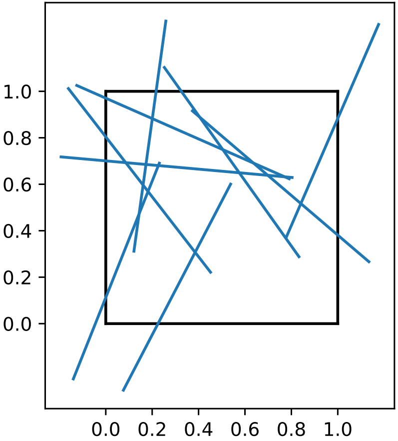


Bessere Idee

- Lasse Nadeln der Länge 1 zufällig auf das Quadrat mit Seitenlänge 1 fallen, dann ist der Quotient

$$\frac{\text{Anzahl } \textbf{aller} \text{ Schnittpunkte}}{\text{Anzahl Nadeln}}$$

ein *besserer* Schätzwert an $\pi/4$.



Literatur

[1] Jürgen Lehn and Helmut Wegmann, *Einführung in die Statistik*, Teubner Studienbücher Mathematik. [Teubner Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1985 (German). MR0795214

[2] August Schmid and Jörg Stark, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Mathematisches Unterrichtswerk: Themenhefte Mathematik [für die Oberstufe], vol. 1, Klett, Stuttgart, 1985 (Deutsch).

[3] Arthur Engel, *Exploring mathematics with your computer*, New Mathematical Library, vol. 35, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1993. With 1 IBM-PC floppy disk (3.5 inch; DD). MR1217250