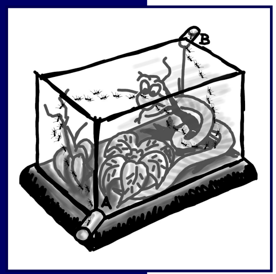
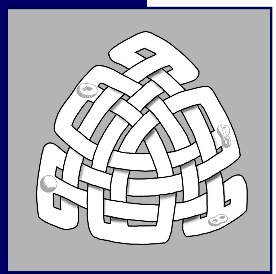
Universität Stuttgart

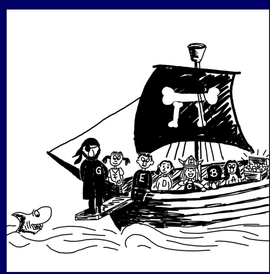
Sieben mathematische Beispielaufgaben

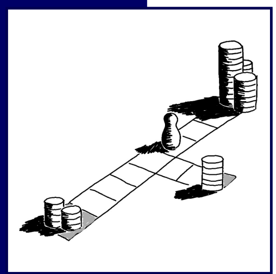
für Studieninteressierte und Schüler:innen der Oberstufe

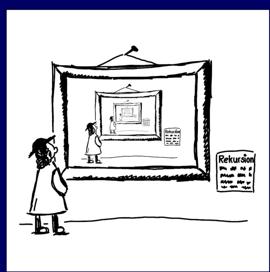


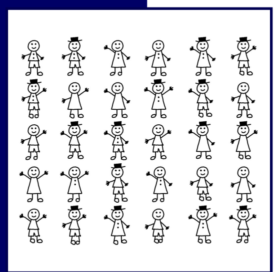


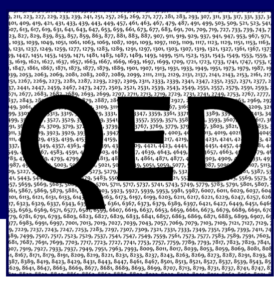
Entwickelt von
Michael Eisermann
Friederike Stoll
Stefan Kohl











mathematik
fakultät 8

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart

www.f08.uni-stuttgart.de/mathematik

Herzlich willkommen!

Sie interessieren sich für Mathematik? Sie überlegen, vielleicht sogar Mathematik zu studieren? Dann gewinnen Sie mit Hilfe unserer sieben Beispielaufgaben einen eigenen Eindruck über konkrete Inhalte und schöne Themen der Mathematik, mit denen Sie sich im Studium intensiver beschäftigen werden. Die Aufgaben sollen Ihnen helfen, einige Ihrer Fragen zu klären:

- Was ist Mathematik überhaupt?
- Was lernt man im Mathematikstudium?
- Was ist an der Universität anders als in der Schule?

Bitte nehmen Sie sich genügend Zeit, gerne auch Stift und Papier, um unsere Beispielaufgaben zur Mathematik zu lösen. Einige Fragen sind leichter, andere kniffliger. Wenn Sie merken, dass Ihnen die Themen gefallen, Sie viele Aufgaben mit Vergnügen lösen können oder unsere ausführlichen Lösungen nachvollziehen wollen, dann gratulieren wir: ein gutes Zeichen, dass das Studienfach zu Ihnen passt! Sie werden mit Mathematik, so hoffen wir, viel Freude und Erfolg haben.

Dieses Heftchen präsentiert nur die Aufgaben. Zu jeder Aufgabe finden Sie eine Lösung und ausführliche Erläuterungen unter
www.f08.uni-stuttgart.de/mathematik/studieninteressierte/beispielaufgaben-mathematik.

Wir wünschen Ihnen viel Vergnügen!

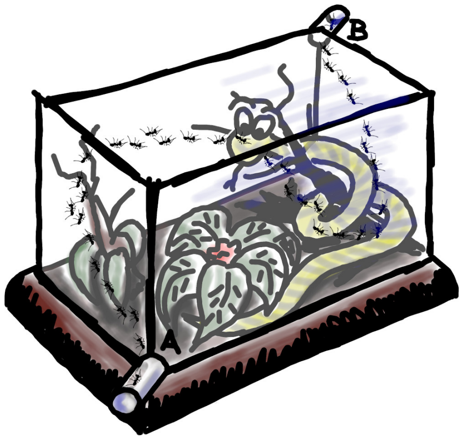
Michael Eisermann
Friederike Stoll
Stefan Kohl

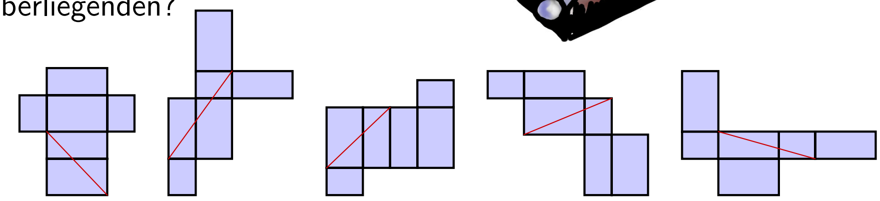
Inhaltsverzeichnis

Beispielaufgabe zur Studienwahl

Mathe macht's kurz: die Ameisenstraße

Ameisen sind dafür bekannt, dass sie ihre Wege optimieren. In einem quaderförmigen Terrarium beobachten Sie eine Ameisenstraße, die auf den Wänden von einer Ecke A (Eingang) zur diagonal gegenüberliegenden Ecke B (Ausgang) verläuft. Wir interessieren uns für kürzeste Wege. Das Terrarium hat innen die Kantenlängen $p = 45$cm, $q = 60$cm, $r = 100$cm. Die Ameisen können auf allen sechs Seiten des Quaders umherlaufen. Welche der folgenden Graphiken sind korrekte Netze der Quaderfläche? Welche der eingezeichneten Wege führen von einer Ecke zur diagonal gegenüberliegenden?





alles korrekt	☐	☐	☐	☐	☐
korrektes Netz, falscher Weg	☐	☐	☐	☐	☐
falsches Netz	☐	☐	☐	☐	☐

Welche Länge L haben die kürzesten Ameisenstraßen von A nach B? [ ] cm

Wie lautet die allgemeine Formel für L mit beliebigen Kantenlängen $p \le q \le r$?

☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ ☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+pqr}$ ☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+pq}$

☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+2pq}$ ☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+2pq+2qr}$ ☐ $\sqrt{p^2+q^2+r^2+2qr}$

Welche Länge K hat der kürzeste Weg von A nach B für eine fliegende Ameise? [ ] cm

Wir betrachten eine Quaderfläche Q mit Kantenlängen $0 < p < q < r$.
Wie viele kürzeste Wege gibt es von A nach B in Q? [ ]

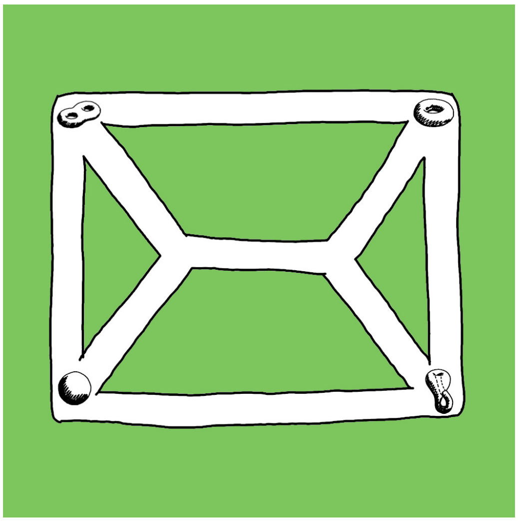
Ameisen finden ihre Wege nicht durch globale vorausschauende Planung, sondern optimieren nur lokal. Sie finden kleine Abkürzungen durch Versuch und Irrtum. Es gibt auf der Quaderfläche mehrere Wege, die lokal minimal sind, sich also lokal durch kleine Veränderungen nicht abkürzen lassen.

Sie können das selbst ausprobieren, indem Sie eine Schnur um einen Karton straff von A nach B spannen. Wie viele lokal minimale Wege gibt es in Q von A nach B? [ ]

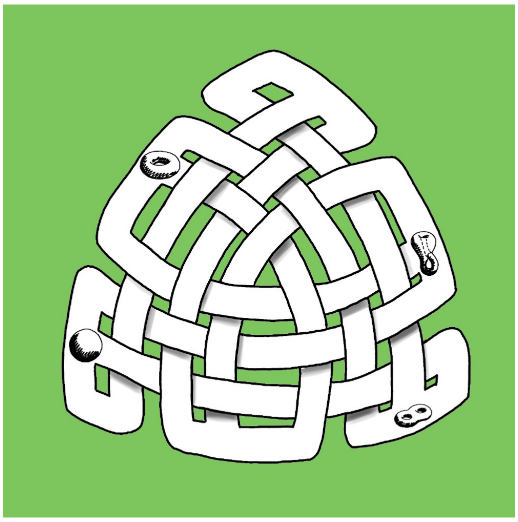
Universität Stuttgart

Beispielaufgabe zur Studienwahl

Mathematische Schatzsuche: der Blick für das Wesentliche



Labyrinth 1



Labyrinth 2

Sammeln Sie in beiden Labyrinthen alle vier mathematischen Schätze! Laufen Sie dazu einen geschlossenen Weg, das heißt hören Sie dort auf, wo Sie angefangen haben. An jeder Stelle dürfen Sie höchstens einmal vorbeikommen, außer natürlich am Anfangs- und Endpunkt.

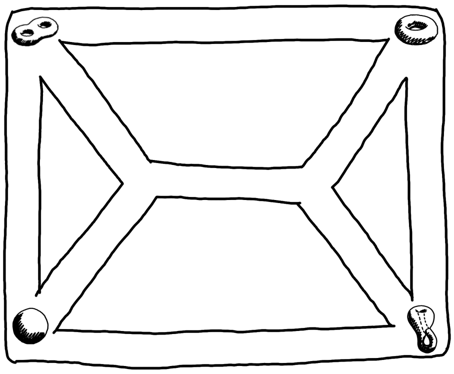
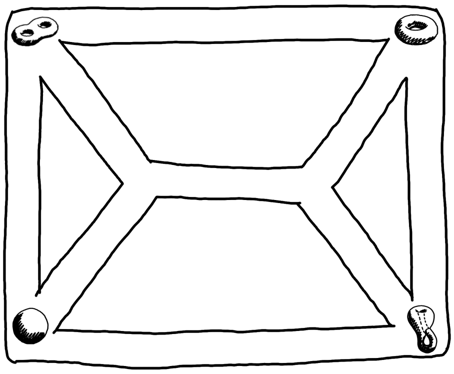
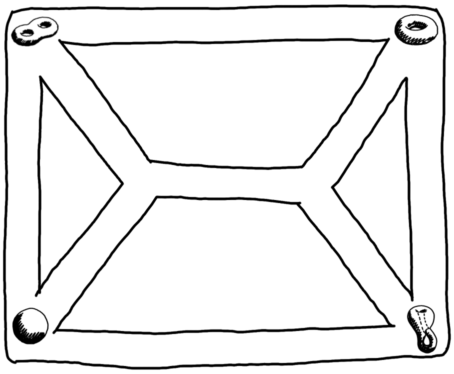
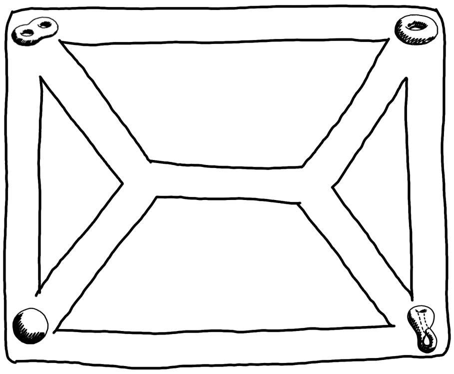
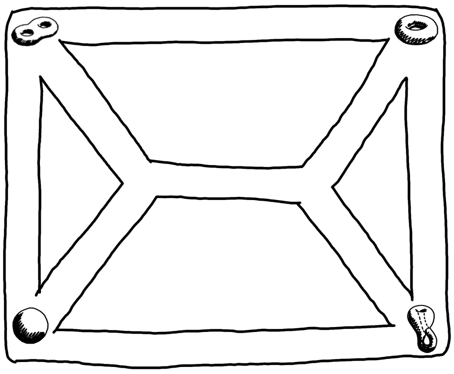
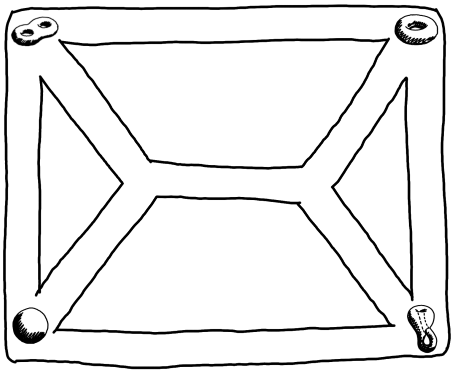
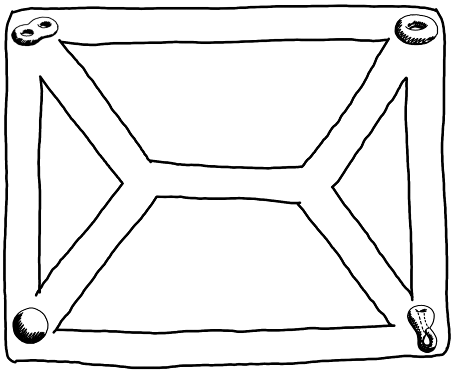
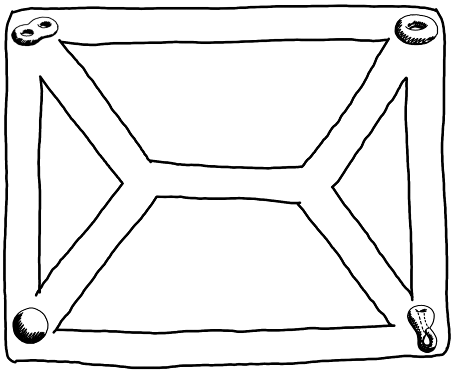
Welche der folgenden Informationen benötigen Sie tatsächlich, um solch ein Rätsel lösen zu können?

	ja	nein
• die Menge der Weggabelungen, an denen drei oder mehr Wegstücke zusammentreffen	☐	☐
• die genaue Position der Gabelungen in Koordinaten	☐	☐
• die Menge der Über- und Unterkreuzungen	☐	☐
• welche Gabelungen durch direkte Wegstücke verbunden sind	☐	☐
• die Länge der einzelnen Wegstücke	☐	☐

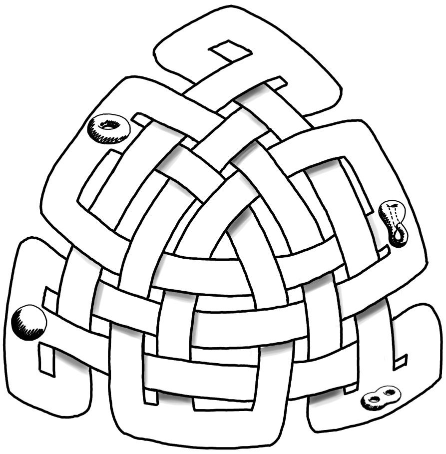
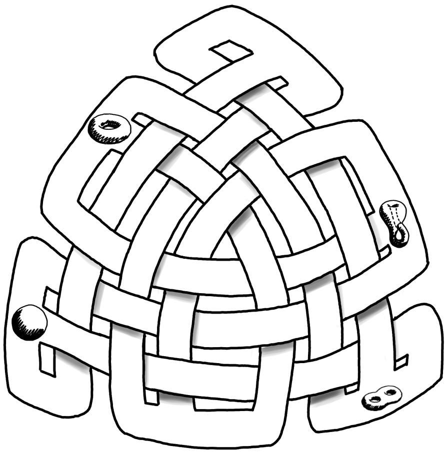
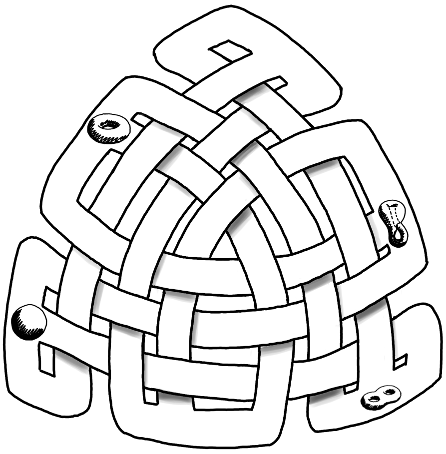
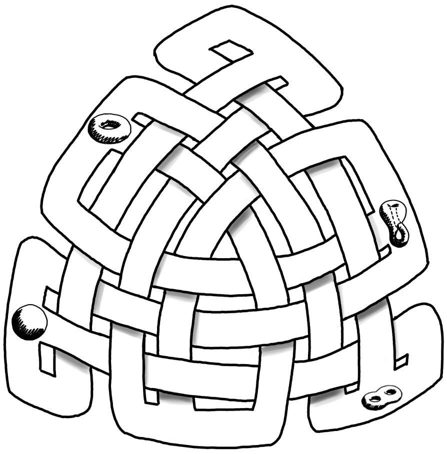
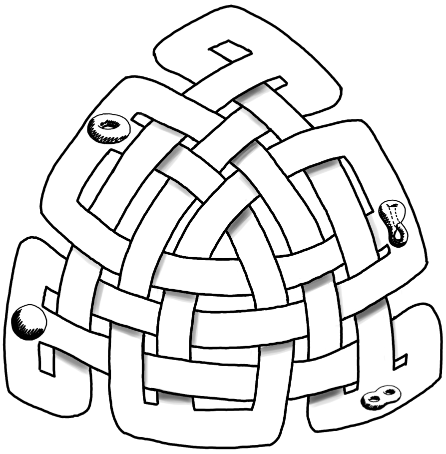
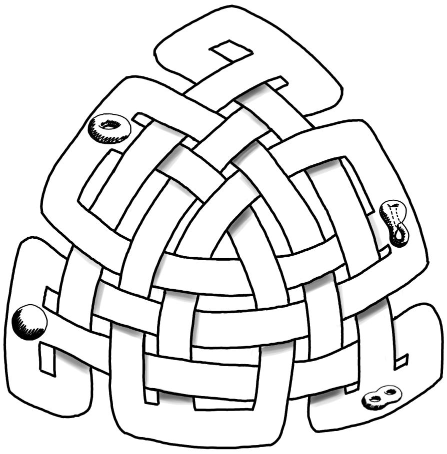
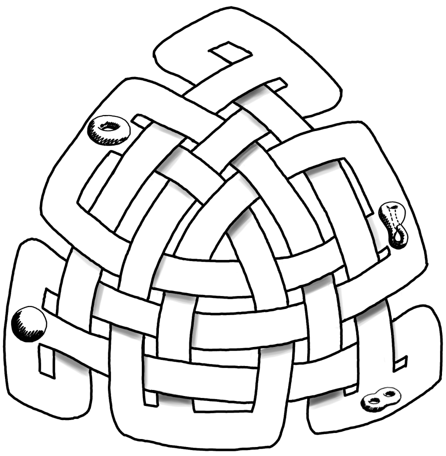
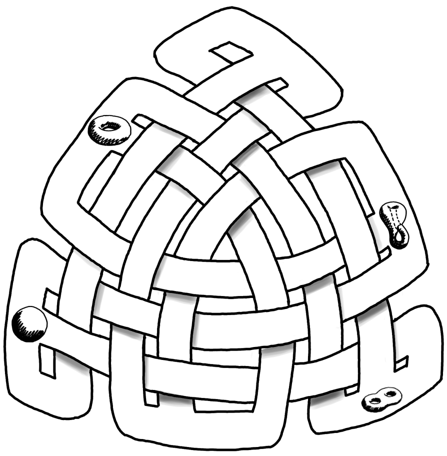
Wie viele Lösungen gibt es? Zählen Sie alle Lösungswege! Dabei sollen zwei Wege nur einmal gezählt werden, wenn sie sich nur durch die Durchlaufungsrichtung unterscheiden; ebenso soll die Position des Anfangspunkts keine Rolle spielen.

	keine	1	2	3	4	5	6	7	8	9	mind. 10	∞	
Für Labyrinth 1 gibt es	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	Lösungen.
Für Labyrinth 2 gibt es	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	Lösungen.

mathematik fakultät8

B

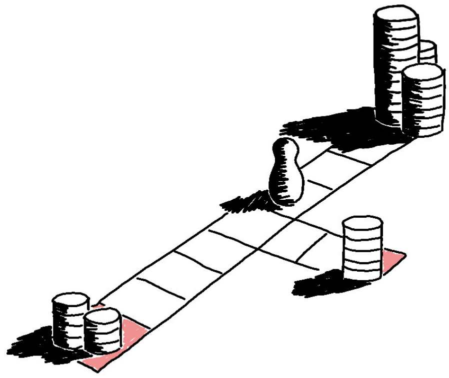
Universität Stuttgart

Beispielaufgabe zur Studienwahl

Mathematische Prognose: Welcher Gewinn erwartet Sie?

Sie setzen Ihren Spielstein auf ein Feld eines Spielbretts, wie im Bild rechts. In jedem Zug würfeln Sie aus, auf welches Nachbarfeld Sie weiterziehen, auf jedes mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Das Spiel endet am Rand in einem roten Feld mit dem angegebenen Gewinn. Welchen Gewinn erwarten Sie jeweils bei Start in einem weißen Feld?

Hinweis: Sie können sich überlegen und dann nutzen, dass jeder Erwartungswert auf einem weißen Feld der Mittelwert seiner Nachbarn ist.



Zwei einfache Beispiele:

Zu | 2 | | 14 | sind die erwarteten Gewinne | 2 | 8 | 14 |.

Zu | 2 | | | 14 | sind die erwarteten Gewinne | 2 | 6 | 10 | 14 |.

Spiel 1: Welchen Gewinn erwarten Sie auf jedem weißen Feld?

7								23

Spiel 2: Dieselbe Frage für das folgende interessantere Spielbrett. Das zentrale Feld hat nun drei gleichwahrscheinliche Nachbarn.

7								23
				5				

mathematik
fakultät 8

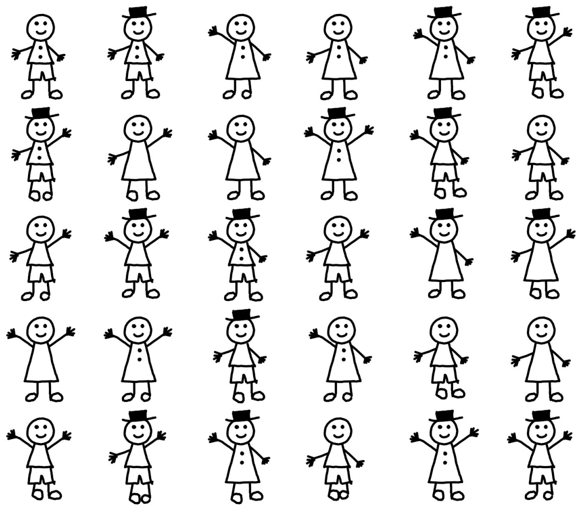
Universität Stuttgart

Beispielaufgabe zur Studienwahl

Das doppelte Lottchen: Suchen und Sortieren

© Michael Eisermann, Stefan Kohl, Friederike Stoll

Sie machen ein Praktikum bei einer Versicherung. Jeder der 10 Millionen Kunden hat eine 15-stellige Kundennummer und weitere Versicherungsdaten, die in einer Datenbank abgespeichert sind. Diese Datenbank hat vorerst noch keine besondere Struktur, insbesondere ist sie (noch) nicht nach Kundennummern sortiert. Sie sollen überprüfen, ob alle Kundennummern wirklich verschieden sind. Dazu verwenden Sie einen Computer mit Ihrer Lieblingsprogrammiersprache. Ein Vergleich $(<, =, >)$ kostet etwa 1 Mikrosekunde, sonstige Operationen sind vernachlässigbar (Indexrechnung, nachschlagen, umordnen, etc). Beispielsweise benötigt das Auffinden der kleinsten Kundennummer $9\,999\,999$ Vergleiche und dauert etwa 10 Sekunden.



Wo ist das Doppelgängerpaar?

Wenn Sie jedes Paar auf Dopplung prüfen, wie lange benötigt der Computer?

Wie lange dauert die Prüfung auf Dopplungen, wenn die Datenbank sortiert vorliegt?

Leider ist die Datenbank völlig unsortiert. Ihre Chefin möchte dies ändern und betraut Sie mit einer möglichst effizienten Sortierung. Diese soll ebenfalls nur paarweise Vergleiche nutzen und selbst im ungünstigsten Fall möglichst schnell sein. Sie gibt Ihnen noch den Tipp, dass Sie in der Literatur oder im Internet nach bekannten vergleichsbasierten Verfahren schauen sollten.

Wie lange benötigt der Computer mit einem solchen Verfahren zum Sortieren?

Beantworten Sie jede der drei Fragen mit einem der folgenden Zeitintervalle:

unter 1 Sek.	1 bis 5 Sek.	5 bis 20 Sek.	20 bis 60 Sek.	1 bis 3 Min.	3 bis 5 Min.	5 bis 60 Min.
1 bis 24 Stunden	1 bis 7 Tage	1 bis 4 Wochen	1 bis 12 Monate	1 bis 3 Jahre	3 bis 10 Jahre	länger als 10 Jahre

mathematik
fakultät 8

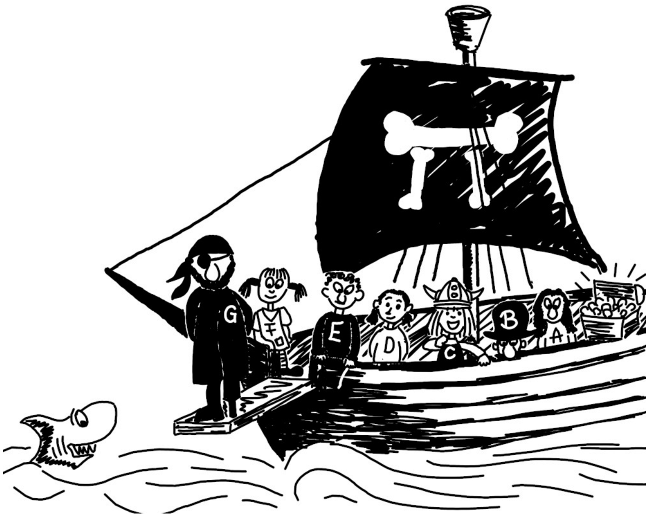
Universität Stuttgart

Beispielaufgabe zur Studienwahl

Mathematik auf der Bounty: das Piratenspiel

© Michael Eisermann, Stefan Kohl, Friederike Stoll

Die sieben gefürchteten Pirat:innen Anne, Bert, Charlie, Daniela, Eugen, Fabienne und Gustav teilen ihre Beute von 50 Dukaten. Der ranghöchste Pirat Gustav schlägt eine Aufteilung zur Abstimmung vor. Stimmt mindestens die Hälfte dafür, dann wird die Beute so aufgeteilt. Bei Ablehnung wird Gustav über Bord ins Meer geworfen, und die verbleibenden Pirat:innen beginnen das Spiel von vorn. Dabei gilt die Rangordnung Gustav, Fabienne, Eugen, Daniela, Charlie, Bert, Anne.



Ein Dukat ist eine unteilbare Goldmünze. Jede Pirat:in möchte überleben und möglichst viele davon haben, handelt dazu sehr schlau und vollkommen rational. Bei zwei gleichen Auszahlungen ist jede Pirat:in schadenfroh, schickt also lieber eine Kamerad:in über Bord und bevorzugt die spätere Auszahlung. Jeder weiß daher, wie die anderen handeln werden. Gleichzeitig ist jede Pirat:in sehr misstrauisch, daher sind keine Absprachen möglich. Das Leben als Pirat:in ist hart.

Wie viele Dukaten erhält jede Pirat:in? Zur Beantwortung dieser Frage lösen Sie das Problem nicht nur für sieben Pirat:innen, sondern auch für alle kleineren Fälle.

		Auszahlung an						
		Anne	Bert	Charlie	Daniela	Eugen	Fabienne	Gustav
Anzahl Pirat:innen	7							
	6							☠
	5						☠	☠
	4					☠	☠	☠
	3				☠	☠	☠	☠
	2	0	50	☠	☠	☠	☠	☠
	1	50	☠	☠	☠	☠	☠	☠

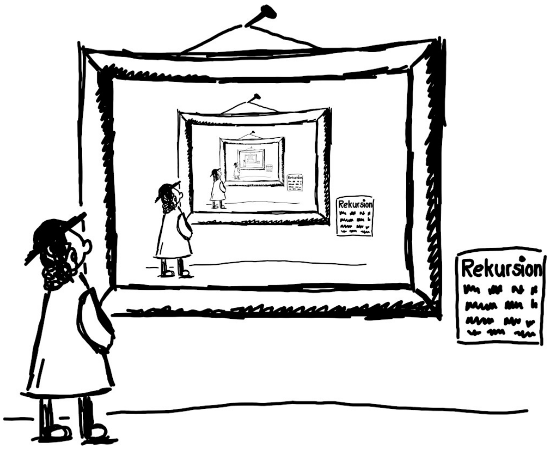
mathematik
fakultät8

Universität Stuttgart

Beispielaufgabe zur Studienwahl

Rekursion und Prüfziffer: Rechnen mit Resten

© Michael Eisermann, Friederike Stoll



Wir definieren die Folge $f_0, f_2, f_2, \ldots$ ganzer Zahlen durch ihre Startwerte $f_0 = 0$ und $f_1 = 2$ sowie die rekursive Vorschrift $f_n = 3f_{n-1} - f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$.

Berechnen Sie die ersten sechs Folgenterme:

$f_0 =$ ☐ $f_1 =$ ☐ $f_2 =$ ☐

$f_3 =$ ☐ $f_4 =$ ☐ $f_5 =$ ☐

Berechnen Sie die letzte Dezimalziffer z_n von f_n:

$z_0 =$ ☐ $z_1 =$ ☐ $z_2 =$ ☐ $z_3 =$ ☐ $z_4 =$ ☐ $z_5 =$ ☐

$z_6 =$ ☐ $z_7 =$ ☐ $z_8 =$ ☐ $z_9 =$ ☐ $z_{10} =$ ☐ $z_{11} =$ ☐

Das Programm `rechneronline.de/summe/rekursion.php` behauptet $f_{39} = 17888788647582926$. Ist das korrekt?

- ☐ Ja, weil ich es nachgerechnet habe.
- ☐ Ja, weil die erste Ziffer richtig ist.
- ☐ Ja, weil die letzte Ziffer richtig ist.
- ☐ Nein, weil die erste Ziffer falsch ist.
- ☐ Nein, weil die letzte Ziffer falsch ist.
- ☐ Nein, weil diese Zahl keine Primzahl ist.

Bestimmen Sie die letzte Ziffer von f_p für $p = 12345678$: $z_p =$ ☐

Bestimmen Sie die letzte Ziffer von f_q für $q = 3^{3^{3^3}}$: $z_q =$ ☐

mathematik fakultät8

Universität Stuttgart

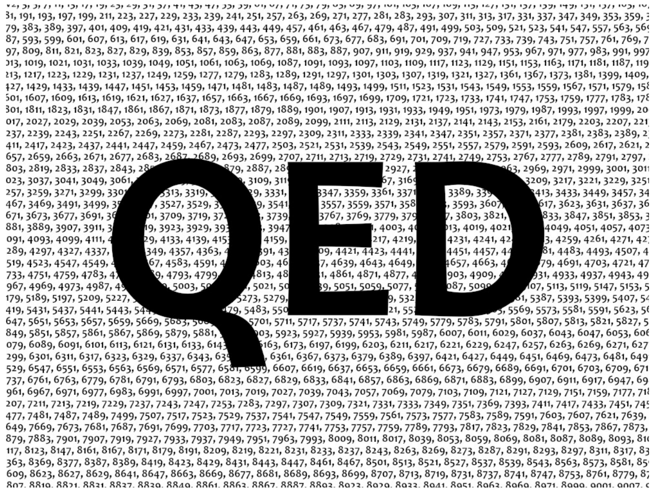
Beispielaufgabe zur Studienwahl

Wissenschaftlich geprüft: ein kleiner Beweis

Im Mathematikstudium werden Sie viele schöne und lehrreiche Beweise kennen lernen und auch selbst ausführen. Als kleinen Vorgeschmack beweisen wir einen Satz aus der Schulmathematik:

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Bringen Sie dazu die folgenden Beweisschnipsel in die richtige Ordnung. Die üblichen Regeln zur Teilbarkeit ganzer Zahlen werden vorausgesetzt, ebenso die Tatsache, dass jede natürliche Zahl ≥ 1 ein Produkt von Primzahlen ist.



	Position
Es gilt $p_i \neq q_j$ für alle (i, j). Andernfalls teilte nämlich $p_i = q_j$ sowohl p als auch $q = p + 1$, also auch die Differenz $q - p = 1$, und wir hätten $p_i = q_j = 1$.	☐
Daraus folgt der Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.	☐
Also können wir zu den gegebenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ noch weitere, davon verschiedene Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ konstruieren.	☐
Zu gegebenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n \geq 2$ konstruieren wir mindestens eine weitere Primzahl.	☐
Wir führen einen konstruktiven Beweis:	☐
Wir zerlegen $q = q_1 \cdot q_2 \cdots q_m$ in ein Produkt von Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_m \geq 2$; wegen $q \geq 2$ gilt $m \geq 1$.	☐
Wir betrachten das Produkt $p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \geq 1$ und $q = p + 1 \geq 2$.	☐

mathematik fakultät8