Universität Stuttgart

27. Mai 2016

Vertiefungskurs Mathematik

Anforderungen für das Universitäts-Zertifikat zum Schuljahr 2016/17

(unverändert seit 2012/13)

Grundvoraussetzung: Teilnahme am *Vertiefungskurs Mathematik* im Schuljahr 2016/17.

Inhaltliche Voraussetzungen:

- **Aussagenlogik und Beweisverfahren**
  - Begriffsbildung *Aussage*, Verknüpfung von Aussagen (Negation, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz), Beweis mit Wahrheitstabelle
  - Begriffsbildung *Voraussetzung*, *Behauptung*, Satz und Umkehrsatz, Direkter Beweis, Widerlegung durch Gegenbeispiel
  - Begriffsbildung *Kontraposition* (mit Wahrheitstabelle), Unterschied zum Umkehrsatz, Beweis durch Kontraposition
  - Prinzip der vollständigen Induktion, Summenformeln (keine Abschätzungen)
  - Beweis durch Widerspruch (indirekter Beweis)
  - Vollständige Fallunterscheidung, z.B. Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$
- **Folgen, Konvergenz**
  - $\varepsilon - N_\varepsilon$-Definition von Folgenkonvergenz
  - Satz: $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ (Anwendung direkter Beweis)
  - Beschränktheit, Satz: Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit, Kontraposition dazu
  - Satz: $\lim(a_n \cdot b_n) = (\lim a_n) \cdot \lim b_n$
  - Satz: $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$
  - Anwendung auf Grenzwerte von: Gebrochen rationalen Ausdrücken in n, Differenzen von Wurzelausdrücken (z.B. $\lim(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})$ mit Anwendung der dritten binomischen Formel)
- **Gleichungen und Ungleichungen**
  - Begriffsbildung *Lösungsmenge*
  - Binomische Formeln (falls noch nicht gemacht), Nullstellen von Polynomen, Polynomdivision
  - Die Mittelwertungleichung beweisen: $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ (eventuell auch für n Variablen)
  - Betrags-, Wurzel-Gleichungen und -Ungleichungen
  - Skizzieren von Lösungsmengen von Betragsungleichungen in zwei Variablen

Hinweis: Alle Aufgaben sind sind ohne jegliche Hilfsmittel, insbesondere ohne Taschenrechner zu lösen.

Orientierungsaufgaben zum Uni-Zertifikat

Aufgabe zum Thema **Aussagenlogik:** Schwierigkeitsgrad: leicht

a) Geben Sie die Wahrheitstabelle für die Oder-Verknüpfung $\vee$ an.

b) Die Verknüpfung $\Box$ von zwei Aussagen p, q ist folgendermaßen definiert:

p	q	$p \Box q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

b₁) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle:

$$p \Box q \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \ \wedge \ \neg(p \wedge q)$$

b₂) Beschreiben Sie den Unterschied der beiden Verknüpfungen $\vee$ und $\Box$.

Aufgabe zum Thema **Beweise:** Schwierigkeitsgrad: mittel

Gegeben ist der Satz „Für jede ganze Zahl m gilt: Ist m^2+6m+4 ungerade, so ist m ungerade."

a) Formulieren Sie die Kontraposition ohne Verwendung des Negationszeichens.

b) Beweisen Sie den Satz.

c) Formulieren Sie den Umkehrsatz. Ist der Umkehrsatz wahr?

Aufgabe zum Thema **Aussagenlogik:** Schwierigkeitsgrad: leicht

Einer der vier Herren Krause, Lehmann, Meier und Schulze ist von Beruf Arzt, ein anderer Ingenieur, ein dritter Lehrer und der vierte Notar. Welchen Beruf übt jeder dieser vier aus, wenn die drei folgenden Aussagen falsch sind?

a) Herr Meier ist nicht Lehrer und auch nicht Ingenieur.

b) Herr Meier ist nicht Notar und Herr Schulze nicht Ingenieur.

c) Herr Lehmann ist Notar.

Tipp: Bilde zuerst die logische Verneinung dieser Aussagen.

Hinweis: Lösungen zu diesen Aufgaben stehen im Materialien-Wiki im Bereich *Einführung in die Aussagenlogik*.

Orientierungsaufgaben zum Uni-Zertifikat

Aufgaben zum Thema **vollständige Induktion:**

Beweisen Sie die Gültigkeit folgender Summenformeln.

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ — Schwierigkeitsgrad: leicht

b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$ — Schwierigkeitsgrad: mittel

c) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ — Schwierigkeitsgrad: mittel

d) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ für $n \in \mathbb{N}$ — Schwierigkeitsgrad: mittel-schwer

Hinweis: Lösungen zu diesen Aufgaben stehen im Materialien-Wiki im Bereich *Einführung in die Aussagenlogik*.

Orientierungsaufgaben zum Uni-Zertifikat

Aufgabe zum Thema **Konvergenz:** Schwierigkeitsgrad: mittel

Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2+5}\ ,\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

a) Bestimmen Sie den Grenzwert a dieser Folge.

b) Geben Sie die Definition der Konvergenz „$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$“ an.

c) Beweisen Sie für die oben angegebene Folge a_n und den von Ihnen gefundenen Grenzwert a, dass die Definition der Konvergenz „$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$“ erfüllt ist.

Aufgaben zum Thema **Konvergenz:**

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen.

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+3} + \frac{4n^2+3n+1}{(2n+1)^2}\ ,\ n \in \mathbb{N}$ Schwierigkeitsgrad: leicht

b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2-1}\ ,\ n \geq 2$ Schwierigkeitsgrad: mittel

c) $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^2},\ n \in \mathbb{N}$ Schwierigkeitsgrad: mittel

d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2-1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}$ Schwierigkeitsgrad: mittel

e) $a_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n},\ n \in \mathbb{N}$ Schwierigkeitsgrad: schwer

Aufgaben zum Thema **Konvergenz:**

Berechnen Sie folgende Grenzwerte durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3+2n} - \sqrt{2n}),\ n \in \mathbb{N}$ Schwierigkeitsgrad: mittel

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+n}),\ n \in \mathbb{N}$ Schwierigkeitsgrad: schwer

Hinweis: Lösungen zu diesen Aufgaben stehen im Materialien-Wiki im Bereich *Folgen, Reihen, Konvergenz.*

Orientierungsaufgaben zum Uni-Zertifikat

Aufgabe zum Thema **Nullstellen:** Schwierigkeitsgrad: leicht

Berechnen Sie die reellen Nullstellen folgender Polynome **ohne** Taschenrechner:

a) $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$

b) $p(x) = x^2 - 2x - 15$

Aufgabe zum Thema **Polynomdivision:** Schwierigkeitsgrad: mittel

Führen Sie die angegebenen Polynomdivisionen durch.

a) $(2x^3 + 4x^2 - 2x - 4) : (x - 1)$

b) $(x^3 - x^2 + 3x - 3) : (x - 2)$

Aufgabe zum Thema **Polynomdivision:** Schwierigkeitsgrad: schwer

Faktorisieren Sie folgende Polynome in Linearfaktoren:

a) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12,\ x \in \mathbb{R}$

b) $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2,\ x \in \mathbb{R}$

c) $p(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

Aufgabe zum Thema **Polynomdivision:** Schwierigkeitsgrad: schwer

Begründen Sie, warum sich das Polynom $p(x) = x^2 + 1$ nicht in reelle Linearfaktoren zerlegen lässt.

Hinweis: Lösungen zu diesen Aufgaben stehen im Materialien-Wiki im Bereich *Gleichungen und Ungleichungen lösen.*

Orientierungsaufgaben zum Uni-Zertifikat

Aufgabe zum Thema **Ungleichungen:** Schwierigkeitsgrad: leicht-mittel

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen Gleichung oder Ungleichung für reelle x.

a) $|x-5| = |x| + 2$

b) $(6x-5)(x+1)(x-2) \geq 0$

c) $\dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{3}{(x-2)^2}$

d) $\dfrac{2}{x-1} > \dfrac{1}{x}$

e) $|x-2| + |4-x| \leq x+1$

f) $\dfrac{x+1}{x-1} > 2$

Aufgabe zum Thema **Ungleichungen:** Schwierigkeitsgrad: mittel

Lösen Sie die Ungleichungen und stellen Sie die Lösungsmenge graphisch in einem Koordinatensystem dar.

a) $|x| + 2|y| \geq 4$

b) $|x-2| + 2|y+1| \geq 4$

Hinweis: Lösungen zu diesen Aufgaben stehen im Materialien-Wiki im Bereich *Gleichungen und Ungleichungen lösen.*

Orientierungsaufgaben zum Uni-Zertifikat

Aufgabe zum Thema **Wurzelgleichungen:** Schwierigkeitsgrad: leicht

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der angegebenen Gleichungen.

a) $\sqrt{x+2}+x=4,\ x\in\mathbb{R}$

b) $\sqrt{x+2}=10,\ x\in\mathbb{R}$

c) $\sqrt[3]{x-1}+10=12,\ x\in\mathbb{R}$

Aufgabe zum Thema **Wurzelgleichungen:** Schwierigkeitsgrad: mittel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen.

a) $\sqrt{4x}-\sqrt{2x+7}=1,\ x\in\mathbb{R}$

b) $\sqrt{x+30}=6\cdot\sqrt{x-5},\ x\in\mathbb{R}$

c) $\sqrt{x}=\sqrt{x+8}-2\ ,\ x\in\mathbb{R}$

Aufgabe zum Thema **Wurzelgleichungen:** Schwierigkeitsgrad: schwer

Gegeben ist die Gleichung

$$\sqrt{x-6}+\sqrt{x+2}=2\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Aufgaben zum Thema **Wurzelungleichungen:**

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen Ungleichungen.

a) $\sqrt{x^2+9}+x\leq 5,\ x\in\mathbb{R}$ Schwierigkeitsgrad: leicht

b) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}\leq\frac{7}{3},\ x\in\mathbb{R}$ Schwierigkeitsgrad: mittel

c) $\sqrt{x+2}+x\leq 4,\ x\in\mathbb{R}$ Schwierigkeitsgrad: mittel

Hinweis: Lösungen zu diesen Aufgaben stehen im Materialien-Wiki im Bereich *Gleichungen und Ungleichungen lösen.*