Name, Vorname: .... Geburtsdatum: ....

Schule mit Ort: ....

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Von Ihren Lösungen werden die 5 besten gewertet. Es ist günstig, wenn Sie sich auf 5 Aufgaben konzentrieren.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							

Weitere Hinweise:

- Als natürliche Zahlen bezeichnen wir die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Insbesondere ist Null keine natürliche Zahl.
- Mit (a_n) wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder a_n $(n \in \mathbb{N})$ besitzt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A \wedge \neg B)$ für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die **genau zwei** der folgenden Aussagen wahr sind:

(i) $x > 1$, (ii) $x \leq 2$ oder $x^2 < 9$, (iii) x ist eine ganze Zahl.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Begründen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

a) Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen, dann ist auch die Folge (c_n) mit $c_n = a_n + b_n$ konvergent.

b) Sind (a_n) und (b_n) Folgen, und ist die Folge (c_n) mit $c_n = a_n + b_n$ konvergent, dann sind auch (a_n) und (b_n) konvergent.

c) Sind (a_n) und (b_n) Folgen, und sind die Folgen (c_n) und (d_n) mit $c_n = a_n + b_n$ und $d_n = a_n - b_n$ konvergent, dann sind auch (a_n) und (b_n) konvergent.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie: Für alle $a, b > 0$ gilt die Ungleichung

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \;\leq\; \sqrt{ab}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \;=\; 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 5 (4 Punkte)

a) Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie: n ist genau dann ungerade, wenn sich n als Differenz von Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen lässt.

b) Beweisen Sie: Es gibt keine Primzahl, die als Differenz von Quadraten nicht aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen dargestellt werden kann.
Hinweis: Indirekter Beweis.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

a) Die Funktion f ist durch die Abbildungsvorschrift

$$f(x) \;=\; |x-1| + |x-4| - 4 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gegeben. Skizzieren Sie den Graph der Funktion f.
Hinweis: Fallunterscheidung.

b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|x-1| + |x-4| \geq 9$ erfüllen.