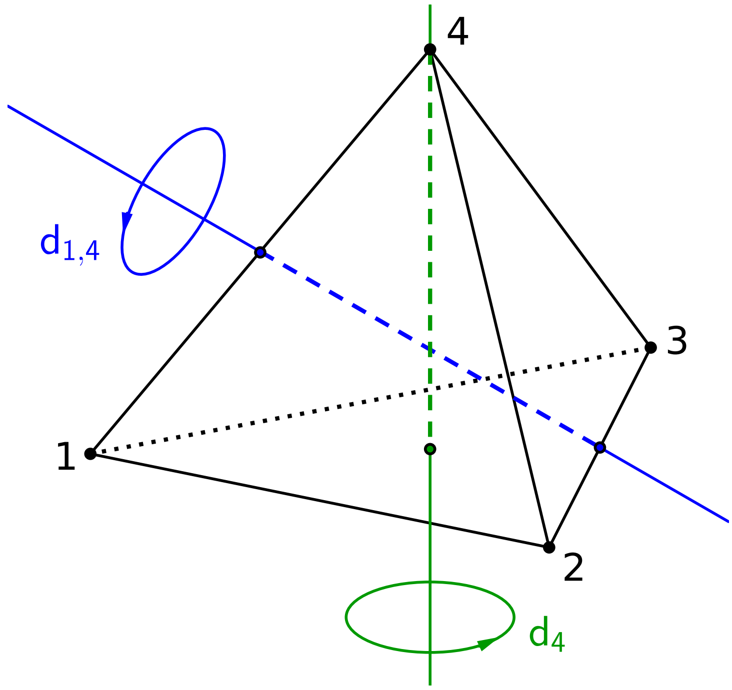
Symmetrien und Gruppen
für Schülerinnen und Schüler

Peter Lesky (Universität Stuttgart)

Erste Fassung 2012, Überarbeitung 2018/19



Vorwort

Dieses Skript entstand als Projekt im Rahmen von Fachdidaktischen Übungen in Zusammenarbeit mit den Studenten **Karl Bützer** und **Mischa Zieger**, denen ich an dieser Stelle für ihre ideenreiche und stimulierende Mitarbeit herzlich danken möchte. Der beschriebenene Unterricht wurde im Schülerseminar für Klasse 8-10 abgehalten.

Wir sind das Gruppenkonzept von drei Seiten angegangen: Vom Zahlenraum, von Symmetrien ebener Figuren und vom Modulorechnen her. Ein Ziel war es, bis zum Satz von Lagrange zu kommen (ohne Beweis): In einer endlichen Gruppe gibt es nur Untergruppen, deren Elementzahl ein Teiler der Anzahl der Elemente der Gruppe ist.

Ich danke den Studierenden Arne Matthias Krüger, Anna Lehmann, Mirjam Schöckle und Sascha Skowronnek, die nach der ersten Fassung des Skriptes im Schülerseminar unterrichtet haben. Sie haben neue Ideen eingebracht, und ihre wertvollen Erfahrungen sind in die Überarbeitung eingeflossen.

Als Literatur wurden verwendet:

Gruppen in der neuen Mathematik (Irvin Adler), Vieweg 1974

Ich wünsche allen, die sich mit diesem Thema beschäftigen, genauso viel oder noch mehr Freude daran.

März 2019 Peter Lesky

Inhaltsverzeichnis

1 Unterrichtseinheit 1 - Gruppen

1.1 Vorbemerkungen

Das Thema Gruppen ist abstrakt und kommt vielen trocken vor. Deshalb sollte der Einstieg gut überlegt werden, um den SuS die Begeisterung am Thema nahezubringen.

Tatsachen sind: Das Konzept einer Gruppe ist nicht schwierig zu verstehen. Gruppen sind ein wichtiger Grundbaustein, der fast überall in der Mathematik verwendet wird. Die aktuelle Forschung beschäftigt sich (immer noch) mit endlichen Gruppen, und dies ist ein wichtiges Forschungsgebiet in der Mathematik.

Dies eignet sich dazu, den Einstieg leicht „dramatisiert“ zu gestalten.

Z.B. Heute lernt ihr ein Konzept der Mathematik kennen, das leicht zu verstehen ist, denn man muss dazu nur wenige Dinge wissen, die ihr auch schon kennt. Dieses Konzept heißt Gruppen. Gruppen bilden einen wichtigen Grundbaustein der Mathematik. Und obwohl der Begriff Gruppe so einfach ist, beschäftigt sich die Forschung immer noch damit und findet neue interessante Sätze darüber.

1.2 Gruppendefinition

Dauer: 30 min
Ziel: Definition einer Gruppe kennen und auf bekannte Rechenoperationen anwenden.
Material: Keines

Mündlich: Frage: Welche Zahlenmengen kennt ihr?
Wir schreiben zuerst ein paar Zahlenmengen auf, die wir immer wieder brauchen.

Tafelanschrieb

1. Gruppen

Wichtige Mengen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$	Menge der rationalen Zahlen

Mündlich: Lies: $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Brüche $\frac{m}{n}$, für die m Element von $\mathbb{Z}$ ist (d.h. eine ganze Zahl ist) und n Element von $\mathbb{N}$ ist.

Anmerkung
Falls die rellen und die komplexen Zahlen erwähnt werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{m, a_1 a_2 a_3 \ldots \; : \; m \in \mathbb{Z},\ a_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}\} \\ \mathbb{C} &= \{a + \mathrm{i}b \; : \; a, b \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = 1\} \end{aligned}$$

Tafelanschrieb

Rechenregeln in $\mathbb{Q}$:

Addition		Multiplikation	
$a+b = b+a$		$a \cdot b = b \cdot a$	KG Kommutativgesetz
$a+(b+c) = (a+b)+c$		$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	AG Assoziativgesetz
$a+0 = a$		$a \cdot 1 = a$	NE Neutrales Element
$a+(-a) = 0$		$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ falls $a \neq 0$	IE Inverses Element

Mündlich: Dies sind alle Rechenregeln, die wir brauchen, um den Begriff Gruppe definieren zu können. Es gibt noch das Distributivgesetz, das aber mit zwei Verknüpfungen arbeitet.

Mündlich: Mathematiker sind faul oder einfach nur praktisch. Deshalb wollen sie nichts mehrmals machen, wenn es sich vermeiden lässt. Wir definieren nun den Begriff Gruppe, der die Rechengesetze für beide Rechenoperationen unter einem Begriff zusammenfasst.

Tafelanschrieb

Definition: Eine Gruppe besteht aus einer Menge G und einer Rechenoperation $\circ$. Man schreibt $(G, \circ)$. Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a, b, c \in G$ erfüllt sein:

1) Abgeschlossenheit: $a \circ b \in G$ (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).

2) AG: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) NE: Es gibt ein NE $e \in G$, so dass $e \circ a = a \circ e = a$ für jedes $a \in G$.

4) IE: Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch KG: $a \circ b = b \circ a$, so heißt die Gruppe kommutative Gruppe.

Mündlich: G und $\circ$ sind Platzhalter. Man kann z.B. für G die ganzen Zahlen und für $\circ$ die Operation $+$ einsetzen. Oder für G die rationalen Zahlen und für $\circ$ die Operation $\cdot$. Dann kann man kontrollieren, ob eine Gruppe vorliegt.

Anmerkung
Es empfiehlt sich, die Begriffe mündlich mit Beispielen zu erklären: Die Abgeschlossenheit bedeutet z.B., dass wenn die natürlichen Zahlen 1 und 2 addiert werden, auch das Ergebnis 3 wieder eine natürliche Zahl ist.

Anmerkung
Dieser Teil des Tafelanschriebs sollte stehen bleiben, damit immer wieder darauf Bezug genommen werden kann.

Mündlich: Was ich noch sagen wollte: Das inverse Element ist spezifisch, d.h. dass zu verschiedenen Elementen auch die inversen Elemente verschieden sind.

Mündlich: Wir kennen bereits ein paar Gruppen:

Tafelanschrieb

Beispiele:

G	$\circ$	NE	IE	
$\mathbb{Z}$	$+$	0	$\overline{5} = -5$	kommutative Gruppe
$\mathbb{Z}$	$\cdot$	1		keine Gruppe, zu 4 gibt es kein IE in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	$+$	0	$\overline{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$	kommutative Gruppe
$\mathbb{Q}$	$\cdot$	1		keine Gruppe (0 hat kein IE)
$\underbrace{\mathbb{Q} \setminus \{0\}}$	$\cdot$	1	$\overline{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$	kommutative Gruppe

↑ Sprich: Q ohne Null
gemeint ist die Menge aller rationalen Zahlen ohne Null

1.3 Endliche Gruppen

Dauer: 20 min
Ziel: Verknüpfungstafeln lesen können, Gruppeneigenschaften überprüfen
Material: Arbeitsblatt 1.1, OH-Folie zu Aufgabe 1

Mündlich: Der Mathematiker untersucht nun, was alles eine Gruppe sein kann. Z.B. endliche Mengen.

Tafelanschrieb

Endliche Gruppe: Z.B. $G = \{a, b, c\}$

Definition der Verknüpfung durch Tabelle:

$\circ$	a	b	c
a	$a \circ a$	$a \circ b$	$a \circ c$
b	$b \circ a$	$b \circ b$	$b \circ c$
c	$c \circ a$	$c \circ b$	$c \circ c$

Tafelanschrieb

Beispiele:

1) $G = \{e, a\}$, e sei das neutrale Element
$\Rightarrow\ e \circ e = e,\ a \circ e = a = e \circ a.$
$a \circ a = ?$
Abgeschlossenheit $\Rightarrow\ a \circ a = a$ oder $a \circ a = e$
Falls $a \circ a = a \ \Rightarrow\ a$ hat kein inverses Element.
$\Rightarrow\ a \circ a = e$

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

Mündlich: Jetzt können wir überlegen, ob wirklich eine Gruppe vorliegt.

Tafelanschrieb

Abgeschlossenheit: $e \circ e = e \in G,\ e \circ a = a \in G,\ a \circ e = a \in G$, $a \circ a = e \in G$.

AG: $e \circ (a \circ e) = e \circ a = a$ und $(e \circ a) \circ e = a \circ e = a$.
Genauso für alle anderen Möglichkeiten.

NE: e ist NE, denn $e \circ e = e,\ e \circ a = a \circ e = a$.

IE: $e^{-1} = e$, $a^{-1} = a$.

2) Die kleinste Gruppe: $G = \{e\}, \quad e \circ e = e$.

Mündlich: Hier sind alle Gruppeneigenschaften klar.

> **Anmerkung**
> Alternativ kann zunächst Aufgabe 1 zusammen gelöst werden und dann die endliche Gruppe mit zwei Elementen als Aufgabe gestellt werden: Gegeben ist $G = \{e, a\}$ mit der Verknüpfung $\circ$ und e als neutralem Element. Stelle die Verknüpfungstafel auf und begründe, warum sie eindeutig ist.

Vorgehen: Nach Austeilen des Arbeitsblattes wird Aufgabe 1 gemeinsam (mit OH-Folie) gelöst.

Aufgabe 1.1 (*Arbeitsblatt 1.1, Aufgabe 1*)

Gegeben ist die Gruppe $(G, \circ)$, definiert durch

$$G = \{e, a, b\}, \qquad \begin{array}{c|ccc} \circ & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & b & e \\ b & b & e & a \end{array}$$

Wie sieht man an der Tabelle (ohne Rechnen)

a) die Abgeschlossenheit?

b) das neutrale Element?

c) die Existenz des inversen Elements?

d) das Kommutativgesetz?

Lösung: **a)** Es kommen nur die Elemente von G in der Tabelle vor.

b) Die erste und zweite Zeile stimmen überein **und** die erste und zweite Spalte stimmen überein.

c) In jeder Zeile kommt mindestens ein Mal das NE e vor, und diese e-Einträge sind symmetrisch zur Diagonalen, die von links oben nach rechts unten verläuft.

d) Alle Einträge sind symmetrisch zur Diagonalen, die von links oben nach rechts unten verläuft.

1.4 Übungsaufgaben

Dauer: 40 min
Ziel: Gruppeneigenschaften üben
Material: Arbeitsblatt 1.1, OH-Folie zur Besprechung

Aufgabe 1.2 (*Arbeitsblatt 1.1, Aufgabe 2*)

a) Es sei $G = \{e, a, b\}$. Vergleiche jeweils die angegebene Verknüpfungstafel mit der aus Aufgabe 1. Finde jeweils einen Widerspruch zu einer der Gruppeneigenschaften Abgeschlossenheit, NE, IE.

a₁)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	b	a	e
b	a	e	b

a₂)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	c

a₃)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	a	e

b) Für $G = \{f, g, h\}$ sei die Verknüpfung durch die rechts stehende Tabelle definiert. Stelle fest, welches das neutrale Element ist. Wie hängt die Verknüpfungstafel mit Aufgabe 1 zusammen?

$\circ$	f	g	h
f	h	f	g
g	f	g	h
h	g	h	f

Lösung: **a)** **a₁)** Es gibt kein neutrales Element: Aus $a \circ e = b$ folgt, dass e nicht das neutrale Element ist, und dass a nicht das neutrale Element ist. Genauso folgt aus $b \circ e = a$, dass b nicht das neutrale Element ist.

a₂) Das Axiom der Abgeschlossenheit ist verletzt: $b \circ b = c$, und c ist kein Gruppenelement.

a₃) Zu a gibt es kein inverses Element: Einziger Kandidat ist b wegen $a \circ b = e$ und $a \circ a \neq e,\ a \circ e \neq e$, aber $b \circ a = a \neq e$.

b) Hier ist g das neutrale Element. Setzt man $e := g,\ a := f,\ b := h$, so ergibt sich dieselbe Verknüpfung wie in Aufgabe 1.

Aufgabe 1.3 (*Arbeitsblatt 1.1, Aufgabe 3*)

Ist

a) $(\mathbb{N}, +)$,

b) $(\mathbb{N}, \cdot)$,

c) $(G, +)$ mit $G := \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ (Menge der geraden Zahlen)

eine Gruppe? Begründe Deine Antworten.

Lösung: **a)** Keine Gruppe: Es ist kein neutrales Element enthalten.

b) Keine Gruppe: Das Element 2 besitzt kein Inverses Element.

c) Ist eine Gruppe:

1) Abgeschlossenheit: Summe gerader Zahlen ist wieder gerade.

2) Assoziativgesetz gilt für die Addition ganzer Zahlen.

3) NE: $e = 0$ ist in G.

4) IE: Zu $g \in G$ ist $-g$ das IE und ist in der Gruppe enthalten.

Aufgabe 1.4 (*Arbeitsblatt 1.1, Aufgabe 4*)

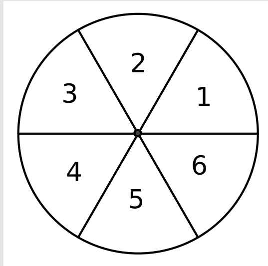
Kannst Du weitere Gruppen mit unendlich vielen Elementen angeben?

Lösung: Beispiele für unendliche Gruppen sind:

- $(G, +)$ mit $G = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$.
- $(\mathbb{Z}, +)$.
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.
- $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$ mit $\mathbb{Q}_+ := \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$ (also alle echt positiven rationalen Zahlen).
- $(B, \cdot)$ mit $B = \left\{2^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ $(2^0 := 1)$.

> **Anmerkung**
> Zur Besprechung von Zusatzaufgabe 1 (siehe nächste Seite) steht eine OH-Folie zur Verfügung (im Kapitel 8.3).

Aufgabe 1.5 (*Zusatzarbeitsblatt 1.1, Zusatzaufgabe 1*)



Ein Rad ist mit den Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ beschriftet (siehe Skizze). Dreht man das Rad wiederholt um $60°$, so gibt es 6 verschiedene Stellungen.
Dreht man das Rad um $60°$ im Gegenuhrzeigersinn, und dann nochmal um $180°$ im Gegenuhrzeigersinn, so ergibt das eine Drehung um $240°$. Man sagt: Die Hintereinanderausführung der Drehungen um $60°$ und $180°$ ergibt eine Drehung um $240°$ und schreibt

$$D_{180} \circ D_{60} = D_{240}.$$

Nach einer Drehung um $360°$ ist das Rad wieder in seiner Anfangsstellung. Man kann nicht unterscheiden, ob D_0 oder D_{360} ausgeführt wurde. Wir schreiben z.B. $D_{300} \circ D_{120} = D_{60}$. Daher können wir uns nun auf die Menge der sechs Drehungen $G = \{D_0, D_{60}, D_{120}, D_{180}, D_{240}, D_{300}\}$ beschränken.

Für die Verknüpfung „Hintereinanderausführung" ist das AG sehr einfach zu beweisen: Sind α, β, γ drei Drehwinkel, so gilt für die zugehörigen Drehungen

$$D_\alpha \circ (D_\beta \circ D_\gamma) = D_\alpha \circ D_{\beta+\gamma} = D_{\alpha+\beta+\gamma} = D_{\alpha+\beta} \circ D_\gamma = (D_\alpha \circ D_\beta) \circ D_\gamma.$$

Damit ist das AG bewiesen (eventuell muss man $360°$ oder $720°$ von $\alpha + \beta + \gamma$ abziehen).

a) Fülle die Verknüpfungstafel aus:

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
D_0	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{60}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{120}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{180}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{240}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{300}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$

b) Welche Gruppeneigenschaften sind erfüllt?

c) Ergänze den Satz: $(G, \circ)$ ist eine ...

d) Zusatzaufgabe: Stelle die entsprechende Verknüpfungstafel für $G = \{D_0, D_{120}, D_{240}\}$ auf und vergleiche mit Aufgabe 1.

Lösung: **a)**

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
D_0	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0
D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}
D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}
D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}
D_{300}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}

b) Abgeschlossenheit, Assoziativgesetz (siehe Aufgabentext), NE $e = D_0$, IE zu D_α ist $D_{360-\alpha}$, Kommutativgesetz (Verknüpfungstafel ist symmetrisch).

c) $(G, \circ)$ ist eine kommutative Gruppe.

d)

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}
D_0	D_0	D_{120}	D_{240}
D_{120}	D_{120}	D_{240}	D_0
D_{240}	D_{240}	D_0	D_{120}

Dies ist die selbe Verknüpfung wie in Aufgabe 1, nur mit anderen Bezeichnungen: $e = D_0,\ a = D_{120},\ b = D_{240}$.

Aufgabe 1.6 (*Zusatzarbeitsblatt 1.1, Zusatzaufgabe 2*)

Gegeben ist die Verknüpfungstafel der Gruppe $G = \{e, a, b, c\}$

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

a) Warum ist die Gruppe kommutativ?

b) Denke Dir eine weitere Verknüpfungstafel für G aus. Ist sie kommutativ?

Hinweis: Wir werden später sehen, dass bei einer Gruppe in der Verknüpfungstafel jedes Element in jeder Spalte und in jeder Zeile genau ein Mal vorkommmen muss.

Lösung: **a)** Die Gruppe ist kommutativ, da die Verknüpfungstafel spiegelsymmetrisch zur Diagonalen von links oben nach rechts unten ist.

b)

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Dies ist die Verknüpfungstafel der zyklischen Gruppe. In a) ist die Verknüpfungstafel der Kleinschen Vierergruppe angegeben. Weitere Gruppen mit 4 Elementen gibt es nicht.

2 Unterrichtseinheit 2 - Symmetrien

2.1 Vorbemerkungen

Diese Stunde steht ganz unter dem Thema *Symmetrieabbildungen und ihre Verknüpfungen*. Über Gruppen wird gar nicht gesprochen.

Inhalte sind: Symmetrieabbildungen, Hintereinanderausführung von Abbildungen, Abbildungstafeln zur Darstellung der Symmetrien.

2.2 Symmetrien

Dauer:	25 min
Ziel:	Symmetrieabbildungen und ihre graphische Darstellung kennenlernen
Material:	Arbeitsblatt 2.1

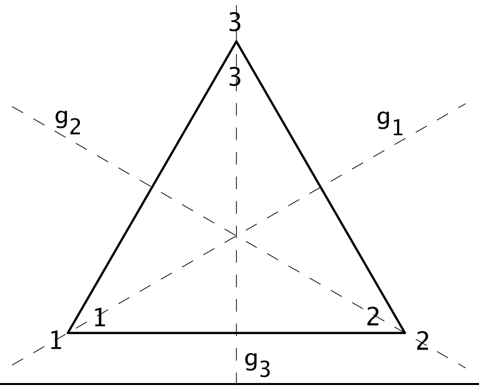
Mündlich: Welche Symmetrieeigenschaften hat ein gleichschenkliges Dreieck, das nicht gleichseitig ist? Welche Symmetrieeigenschaften hat ein gleichseitiges Dreieck? Was versteht man unter Symmetrien? Womit dürften sie dem Namen nach zu tun haben? Womit hängt „symmetrisch sein“ zusammen? (z.B. Spiegelachsen im gleichseitigen Dreieck, Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks)

Tafelanschrieb

2. Symmetrien

Definition: Eine ebene Symmetrie ist eine Spiegelung oder eine Drehung eines ebenen geometrischen Objekts, welche dieses Objekt mit sich selbst zur Deckung bringt.

Beispiel:

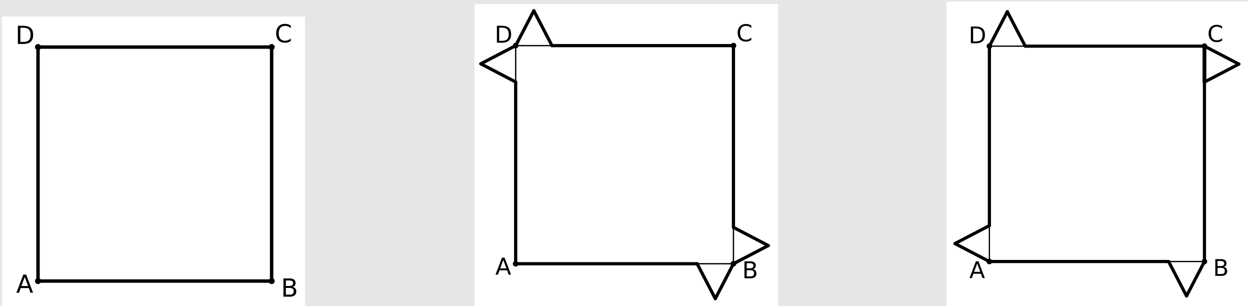


Symmetrien:

D_0:	Drehung um 0° im Gegenuhrzeigersinn
D_{120}:	Drehung um 120° im Gegenuhrzeigersinn
D_{240}:	Drehung um 240° im Gegenuhrzeigersinn
S_1:	Spiegelung an der Geraden g_1
S_2:	Spiegelung an der Geraden g_2
S_3:	Spiegelung an der Geraden g_3

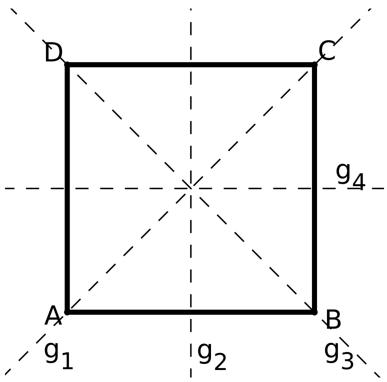
Aufgabe 2.1 (*Arbeitsblatt 2.1, Aufgabe 1*)

Welche Symmetrien besitzt das Quadrat? Welche Symmetrien besitzen die beiden anderen Figuren, bei denen zum Quadrat jeweils vier gleiche Dreiecke hinzugefügt wurden?



Hinweis: Zeichne als erstes die Symmetrieachsen im Quadrat ein und bezeichne sie geeignet.

Lösung:



Das Quadrat hat die Symmetrien

$$D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_1, S_2, S_3, S_4$$

(S_j bedeutet Spiegelung an der Geraden g_j).
Die zweite Figur hat die Symmetrien

$$D_0, D_{180}, S_1, S_3.$$

Die dritte Figur hat die Symmetrien

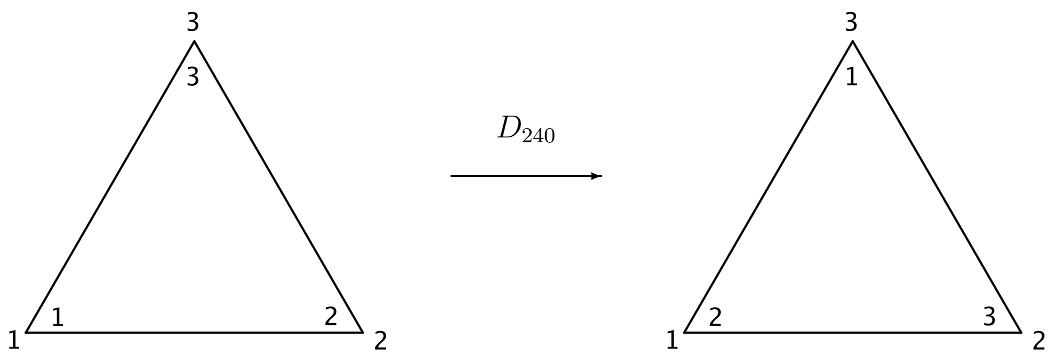
$$D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}$$

(keine Spiegelsymmetrien).

Tafelanschrieb

Graphisches Darstellen von Symmetrien:

D_{240}:

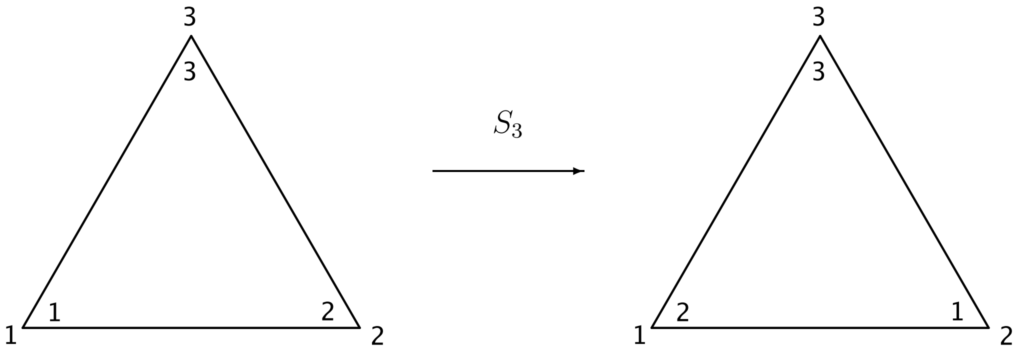


Vorgehen: An der Tafel wird die Drehung eines gleichseitigen Dreiecks mit nummerierten Ecken anhand eines Pappdreiecks (siehe Ausarbeitung) vorgeführt. Danach wird die obenstehende Graphik aufgezeichnet. Genauso für die Abbildung S_3 unten.

> **Anmerkung**
> Man sollte die Formulierung „1 ist dann auf Position 3“ verwenden und nicht die Formulierung „wird zu“.

Tafelanschrieb

S_3:



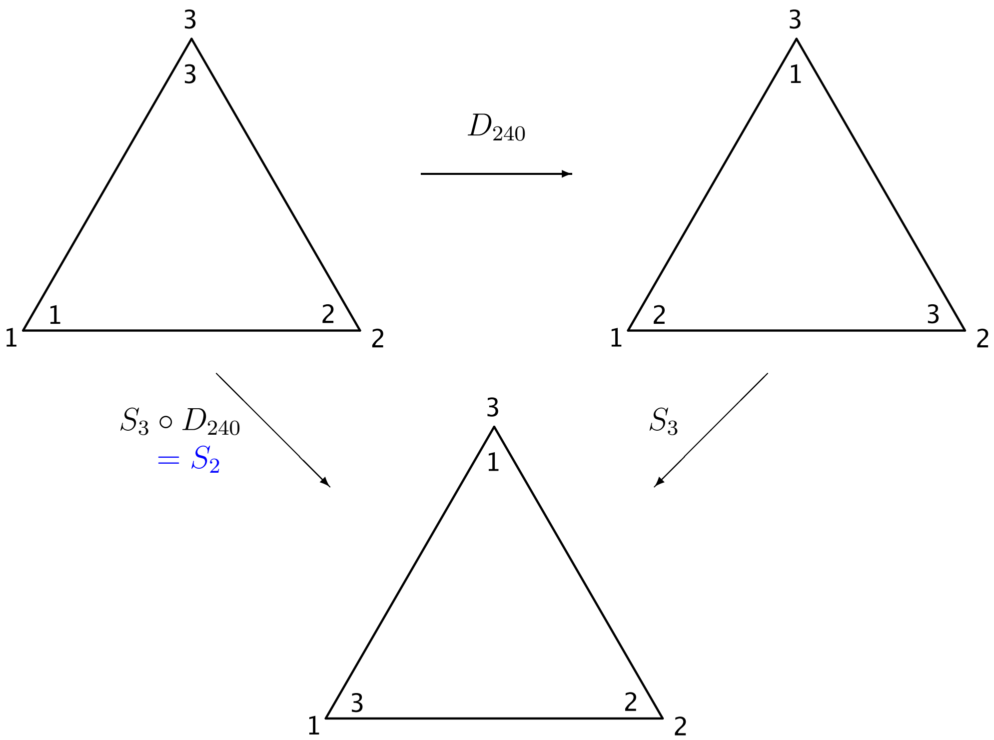
Mündlich: Merke: Die äußere Zahl gibt die Position an, die innere Zahl bezeichnet eine in der Ausgangsposition des Dreiecks fest bezeichnete Ecke des Dreiecks. Das bedeutet: Die äußeren Zahlen bleiben fest, die inneren bewegen sich mit der Drehung/Spiegelung des Dreiecks mit.

2.3 Verkettung von Symmetrieabbildungen

Dauer: 25 min
Ziel: Hintereinanderausführung von Symmetrieabbildungen bilden können
Material: Arbeitsblatt 2.2, OH-Stifte für SuS

Tafelanschrieb

Hintereinanderausführung: Führt man nacheinander zwei Symmetrieabbildungen aus, z.B. zuerst D_{240} und danach S_3, so schreibt man $S_3 \circ D_{240}$. Achtung: Man liest von rechts nach links, die rechtsstehende Abbildung wird zuerst ausgeführt.



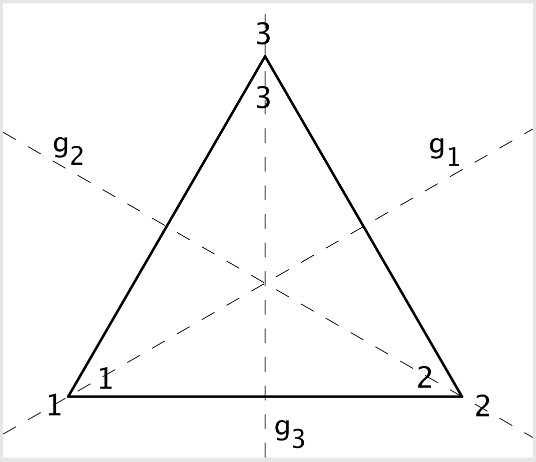
Mündlich: Erstaunlicherweise kommt man vom ersten Dreieck zum dritten auch durch die Symmetrie S_2. Man schreibt $S_3 \circ D_{240} = S_2$.

Vorgehen: In der folgenden Aufgabe wird zunächst die Spalte unter D_{240} gemeinsam ausgefüllt. Anschließend werden die SuS in vier Gruppen eingeteilt. Jede Gruppe bearbeitet mindestens zwei Spalten (Spalte 1/2, Spalte 1/4, ...). Jede Gruppe darf ihre Ergebnisse in die Tabelle auf der OH-Folie eintragen. Für die SuS gibt es kleine Papierdreiecke (vgl. Ausarbeitung), um sich die Abbildungen veranschaulichen zu können.

Aufgabe 2.2 (*Arbeitsblatt 2.2, Aufgabe 2*)

Fülle die Verknüpfungstafel für die Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks aus. Zuerst wird die Symmetrie in der ersten **Zeile** ausgeführt, danach die Symmetrie in der ersten **Spalte**.

In der nebenstehenden Graphik kannst Du die Abbildungen durch Drauflegen eines Papierdreiecks veranschaulichen



Lösung:

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_0	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_{120}	D_{120}	D_{240}	D_0	S_3	S_1	S_2
D_{240}	D_{240}	D_0	D_{120}	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	D_0	D_{120}	D_{240}
S_2	S_2	S_3	S_1	D_{240}	D_0	D_{120}
S_3	S_3	S_1	S_2	D_{120}	D_{240}	D_0

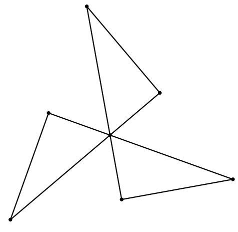
Aufgabe 2.3 (*Arbeitsblatt 2.2, Zusatzaufgabe 1*)

a) Finde geometrische Figuren, die nur die drei Drehsymmetrien und keine Spiegelsymmetrien besitzen.

b) Begründe, warum es keine Figuren gibt, die nur die Spiegelsymmetrien S_1, S_2, S_3 besitzen und keine Drehsymmetrien (außer D_0, denn jede Figur besitzt die Symmetrie D_0).

Lösung:

a) Rechts ist ein Beispiel.



b) Hat eine Figur die Spiegelsymmetrien S_1, S_2, S_3, dann wird sie auch durch $S_1 \circ S_2$ in sich überführt. Und das ist eine Drehung.

2.4 Darstellung durch Abbildungstafeln

Dauer: 10 min
Ziel: Beschreibung von Symmetrien mit Abbildungstafeln und die Anwendung auf Hintereinanderausführung verstehen.
Material: Keines

Tafelanschrieb

Abbildungstafeln: Man kann Symmetrieabbildungen auch durch Abbildungstafeln darstellen. Es reicht die Angabe, wohin die Ecken wandern:

$$D_{240}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad S_3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vorgehen: Die Abbildungen werden mit Pappdreieck veranschaulicht, anschließend werden die Abbildungstafeln angeschrieben.

Mündlich: Merke: Ein Eintrag in der unteren Zeile gibt an, auf welcher Position die Ecke mit der darüberliegenden Nummer nach der Drehung bzw. Spiegelung liegt.
Es ist übrigens egal, in welcher Reihenfolge die erste Zeile aufgeschrieben wird, die zweite Zeile muss eben dazu passen.
Dadurch wird es einfacher, die Hintereinanderausführung zu bestimmen. Man schreibt die Darstellungen der Symmetrien geeignet untereinander,

Tafelanschrieb

Hintereinanderausführung:

$$D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_3$$

Nun streicht man die mittlere Zeile und erhält

$$S_3 \circ D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_2$$

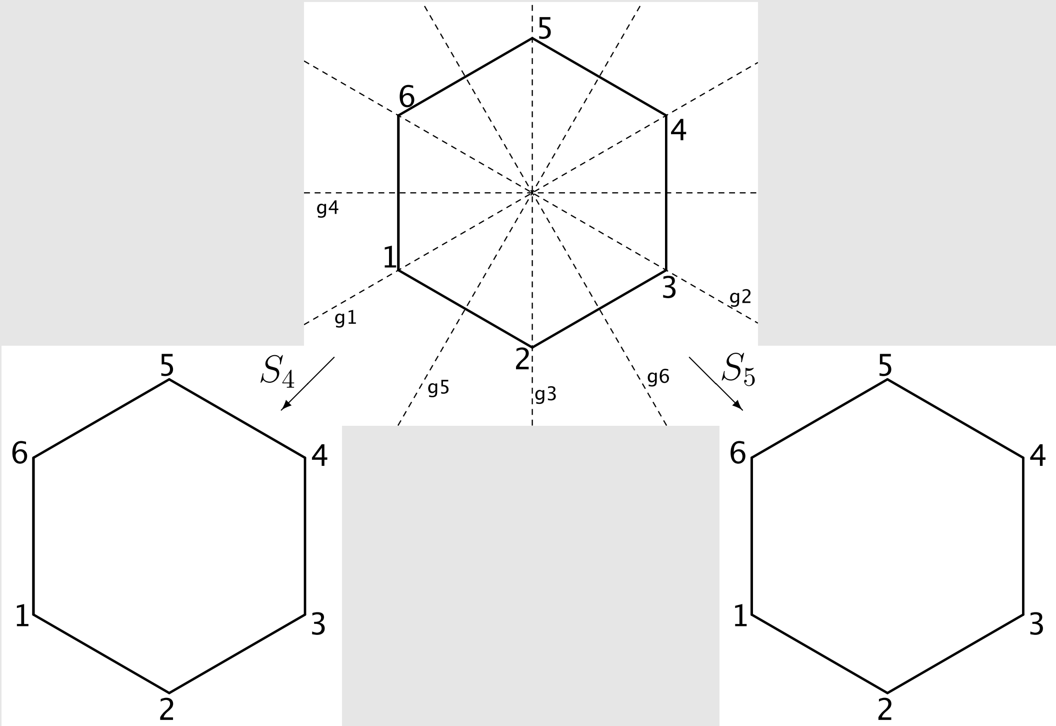
2.5 Symmetrien des Sechsecks

Dauer: 25 min
Ziel: Anwendung der Abbildungstafeln, um einen Teil der Verknüpfungstafel für die Sechsecksymmetrien zu erstellen
Material: Arbeitsblatt 2.3, OH-Folie zu AB 3

Aufgabe 2.4 (*Arbeitsblatt 2.3, Aufgabe 3*)

a) Erstelle die Abbildungstafeln für S_4 und S_5 am regulären Sechseck.

Hinweis: Trage zunächst in die untenstehende Graphik ein, auf welcher Position die Ecken nach Ausführung der Abbildung sind.

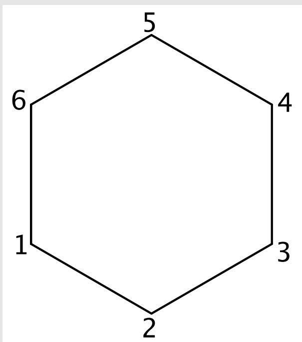


$$S_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix} \qquad S_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

b) Stelle die Hintereinanderausführung $S_5 \circ S_4$ (d.h. zuerst S_4, dann S_5) mithilfe der Abbildungstafeln aus Teil a) dar.

$$S_5 \circ S_4 : \qquad S_4 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \right\} S_5$$

c) Trage mithilfe der Abbildungstafel aus b) die Position der Ecken nach Ausführung von $S_5 \circ S_4$ ein (in der Vorlage unten). Überlege anhand des Bildes, welche Symmetrie durch $S_5 \circ S_4$ entsteht.



$$\Rightarrow \; S_5 \circ S_4 =$$

Lösung: **a)** $S_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $S_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

b) $S_5 \circ S_4 :$ $$S_4\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\}S_5$$

c) $S_5 \circ S_4 = D_{240}$.

Aufgabe 2.5 (*Arbeitsblatt 2.4, Aufgabe 4*)

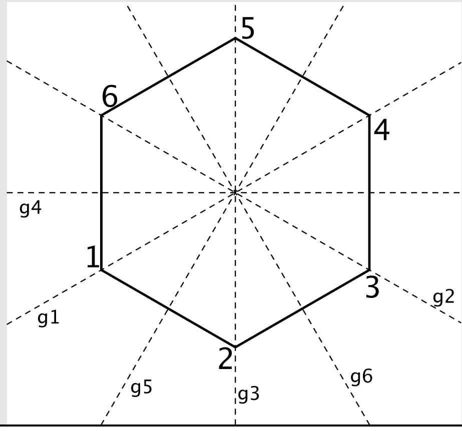
Bestimme mit Hilfe der untenstehenden Abbildungstafeln für die Sechsecksymmetrien die Hintereinanderausführungen:

a) $S_1 \circ D_{60}$, **b)** $S_2 \circ D_{60}$,

c) $S_3 \circ D_{60}$, **d)** $S_4 \circ D_{60}$,

e) $S_5 \circ D_{60}$, **f)** $S_6 \circ D_{60}$.

Hinweis: S_j bezeichnet die Spiegelung an g_j.



Lösung: **a)** $S_1 \circ D_{60} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1 \circ D_{60} = S_4.$

b) $S_2 \circ D_{60} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow S_2 \circ D_{60} = S_6.$

c) $S_3 \circ D_{60} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S_3 \circ D_{60} = S_5.$

d) $S_4 \circ D_{60} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow S_4 \circ D_{60} = S_2.$

e) $S_5 \circ D_{60} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_5 \circ D_{60} = S_1.$

f) $S_6 \circ D_{60} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S_6 \circ D_{60} = S_3.$

Vorgehen: Die erhaltenen Ergebnisse werden in die Verknüpfungstafel auf der OH-Folie eingetragen. Für die SuS steht auf der Rückseite des Arbeitsblattes eine leere Verknüpfungstafel zur Verfügung. Weitere Einträge, die offensichtlich sind, sollten noch vorgenommen werden. Zur Kontrolle ist auf der nächsten Seite eine komplette Verknüpfungstafel für die Sechsecksymmetrien abgedruckt.

Anmerkung
Schnelle SuS können die Verknüpfungen für die umgedrehte Reihenfolge (z.B. $D_{60} \circ S_1$ anstelle von $S_1 \circ D_{60}$) ausrechnen. Oder überlegen, welche Verknüpfgsergebnisse offensichtlich sind, und diese in die Verknüpfungstafel eintragen.

Verknüpfungstafel für das Sechseck:

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_0	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	S_5	S_4	S_6	S_1	S_3	S_2
D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	S_3	S_1	S_2	S_5	S_6	S_4
D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1
D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	S_2	S_3	S_1	S_6	S_4	S_5
D_{300}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	S_4	S_6	S_5	S_2	S_1	S_3
S_1	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	D_0	D_{120}	D_{240}	D_{60}	D_{300}	D_{180}
S_2	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	D_{240}	D_0	D_{120}	D_{300}	D_{180}	D_{60}
S_3	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	D_{120}	D_{240}	D_0	D_{180}	D_{60}	D_{300}
S_4	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	D_{300}	D_{60}	D_{180}	D_0	D_{240}	D_{120}
S_5	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	D_{60}	D_{180}	D_{300}	D_{120}	D_0	D_{240}
S_6	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	D_{180}	D_{300}	D_{60}	D_{240}	D_{120}	D_0

3 Unterrichtseinheit 3 - Untergruppen

3.1 Vorbemerkungen

Ziele dieser Einheit: Symmetriegruppen vertiefen, Einführung und Anwendung von Untergruppe.

3.2 Wiederholung

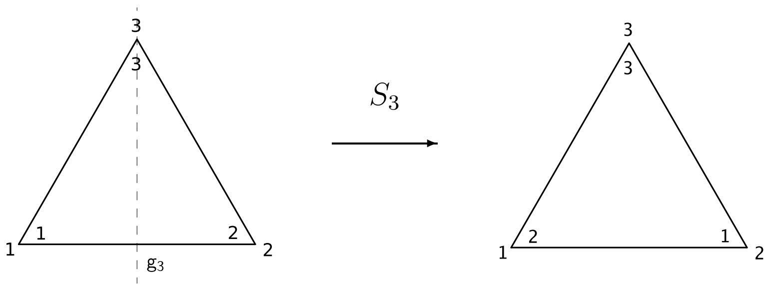
Dauer: 20 min
Ziel: Wiederholung von Symmetrien, Darstellung, Hintereinanderausführung, Verknüpfungstafel; Anwendung auf das Quadrat.
Material: Arbeitsblatt 3.1

OH-Folie Wiederholung 1

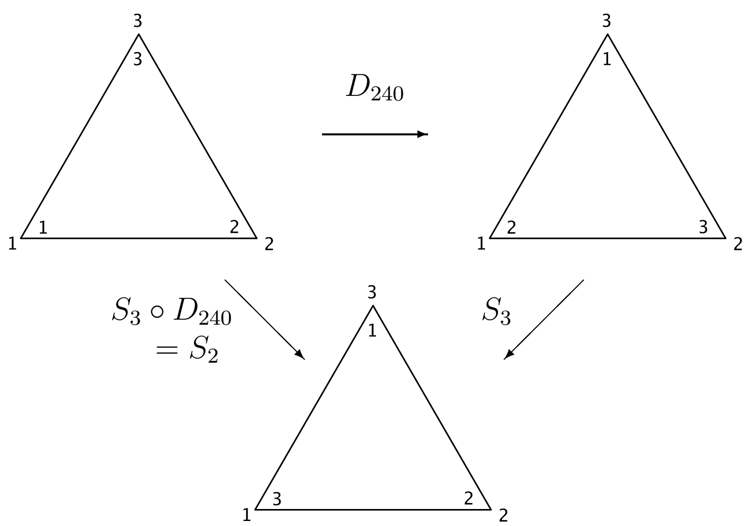
Wiederholung

Ebene Symmetrien sind Drehungen oder Achsenspiegelungen, die ein ebenes Objekt in sich überführen.

Beispiel:



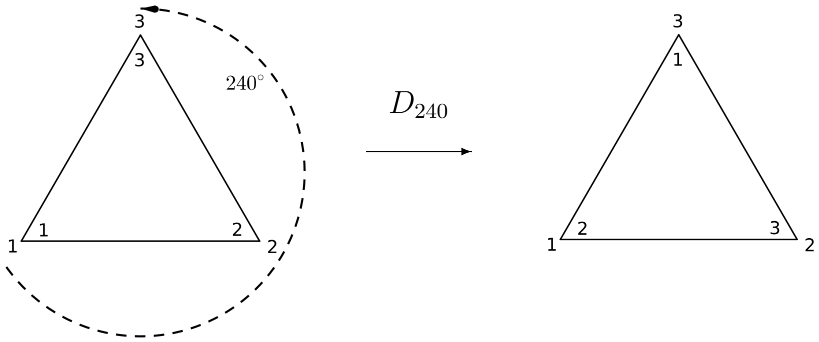
Hintereinanderausführung: Führt man zwei Symmetreiabbildungen nacheinander aus, z.B. zuerst D_{240} und dann S_3, so schreibt man $S_3 \circ D_{240}$. Sprich: „S_3 nach D_{240}", die rechte Abbildung wird zuerst ausgeführt.



OH-Folie Wiederholung 2

Man kann Symmetrieabbildungen auch mit *Abbildungstafeln* darstellen.

Beispiel:



$$D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ecke 1 liegt jetzt an Position 3, Ecke 2 liegt jetzt an Position 1, Ecke 3 liegt jetzt an Position 2.

Abbildungstafeln können miteinander kombiniert werden:

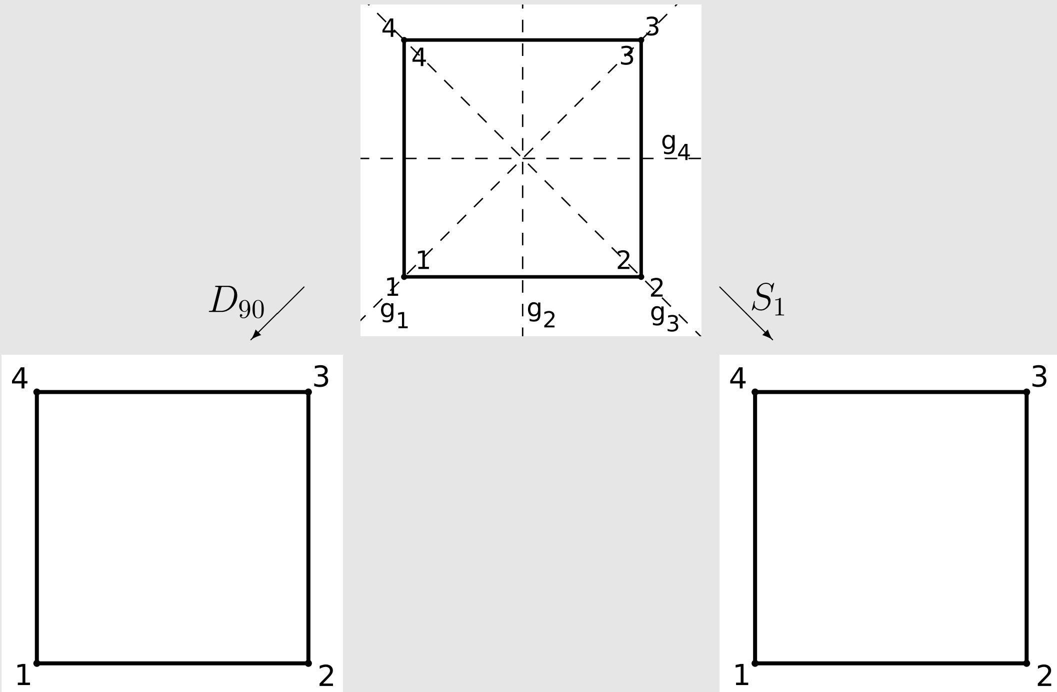
$$D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_3$$

Also: $S_3 \circ D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_2$

Aufgabe 3.1 (*Arbeitsblatt 3.1, Aufgabe 1*)

a) Erstelle die Abbildungstafeln für D_{90} und S_1 am Quadrat.

Hinweis: Trage zunächst in die untenstehende Graphik ein, auf welcher Position die Ecken nach Ausführung der Abbildungen sind. S_1 bezeichnet die Spiegelung an g_1, D_{90} die Drehung um $90°$ im Gegenuhrzeigersinn.

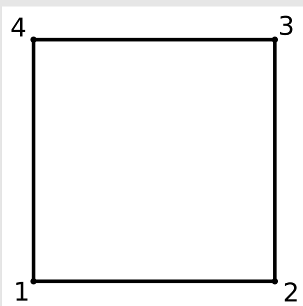


$$D_{90} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \qquad S_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

b) Stelle die Hintereinanderausführung $S_1 \circ D_{90}$ (d.h. zuerst D_{90}, dann S_1) mithilfe der Abbildungstafeln aus Teil a) dar.

$$S_1 \circ D_{90} : \quad D_{90} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \right\} S_1$$

c) Trage mithilfe der Abbildungstafel aus b) die Position der Ecken nach Ausführung von $S_1 \circ D_{90}$ ein (in der Vorlage unten). Überlege anhand des Bildes, welche Symmetrie durch $S_1 \circ D_{90}$ entsteht.



$$\Rightarrow \; S_1 \circ D_{90} =$$

Lösung: **a)** $D_{90} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b)

$$S_1 \circ D_{90} : \qquad \begin{array}{r} D_{90}\left\{\begin{array}{l}\\ \end{array}\right. \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\} S_1 \end{array}$$

c) $S_1 \circ D_{90} = S_4$.

Aufgabe 3.2 (*Arbeitsblatt 3.1, Aufgabe 2*)

Die selbe Aufgabe wie vorher, nur die Abbildungen werden ersetzt durch S_3 und S_4.

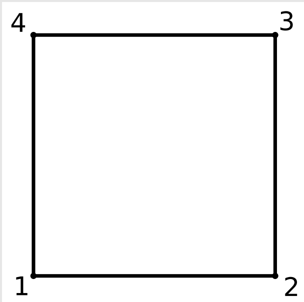
Lösung: Die Ergebnisse können anhand der Verknüpfungstafel für das Rechteck (OH-Folie Symmetriegruppe des Quadrats) kontrolliert werden.

Aufgabe 3.3 (*Arbeitsblatt 3.1, Zusatzaufgabe 1*)

Bestimme mit Hilfe der Abbildungstafeln aus den letzten beiden Aufgaben (jeweils in Teil a)) die folgenden Hintereinanderausführungen:

a)
$$D_{90} \circ S_1 : \qquad S_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\} D_{90}$$

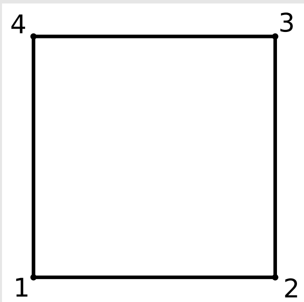
$D_{90} \circ S_1 :$



$\Rightarrow \; D_{90} \circ S_1 =$

b)
$$S_3 \circ S_4 : \qquad S_4 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\} S_3$$

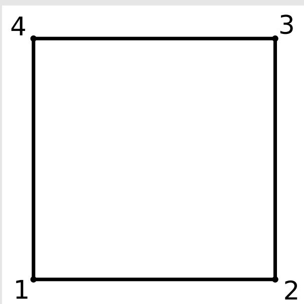
$S_3 \circ S_4 :$



$\Rightarrow \; S_3 \circ S_4 =$

c)
$$D_{90} \circ S_4 : \qquad S_4 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\} D_{90}$$

$D_{90} \circ S_4 :$



$\Rightarrow \; D_{90} \circ S_4 =$

Lösung: Kontrolle mit OH-Folie Symmetriegruppe des Quadrats.

3.3 Die Symmetriegruppe des Quadrats

Dauer: 15 min
Ziel: Wiederholung des Gruppenbegriffs, Anwendung auf die Symmetriegruppe des Quadrats
Material: Arbeitsblatt 3.2, OH-Folie Symmetriegruppe des Quadrats

OH-Folie Symmetriegruppe des Quadrats

Definition: Eine **Gruppe** besteht aus einer Menge G und einer Rechenoperation $\circ$. Man schreibt $(G, \circ)$. Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a, b, c \in G$ erfüllt sein:

1) **Abgeschlossenheit**: $a \circ b \in G$

   (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).

2) **AG** (Assoziativgesetz): $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) **NE** (Neutrales Element): Es gibt ein NE $e \in G$, so dass für jedes $a \in G$: $e \circ a = a \circ e = a$.

4) **IE** (Inverses Element): Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch **KG** (Kommutativgesetz): $a \circ b = b \circ a$,

so heißt die Gruppe **kommutative Gruppe**.

Vorgehen: Die SuS bekommen Arbeitsblatt 3.2 mit Lückentext zum Satz, mit Tabelle zum Beweis des Satzes und mit Verknüpfungstafel. L. schreibt auf Tafel, SuS ergänzen die Lücken auf dem Arbeitsblatt.

Anmerkung
Die Beweistabelle und die Verknüpfungstafel müssen auf einer Seite stehen. Dann können Eigenschaften in der Tabelle und in der Verknüpfungstafel farbig markiert werden.

Tafelanschrieb

3. Symmetriegruppe des Quadrats

Satz: Sei $G_{\text{Quadrat}} := \{D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ die Menge der Symmetrieabbildungen des Quadrats. Mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung bildet G_{Quadrat} eine Gruppe. Diese Gruppe ist nicht kommutativ.

Tafelanschrieb

Beweis: **1)** Gruppeneigenschaften

Eigenschaft	Beispiel	allgemein zu sehen an Verknüpfungstafel (VT)
Abgeschlossenheit	$S_2 \circ D_{90} = S_1$, $S_1 \in G_{\text{Quadrat}}$	In der VT kommen nur Gruppenelemente vor
Neutrales Element	D_0 ist NE	1. und 2. Zeile bzw. 1. und 2. Spalte stimmen überein
Inverses Element	$\overline{S_1} = S_1$, $\overline{D_{270}} = D_{90}$	NE kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vor
Assoziativgesetz	$D_{180} \circ (S_1 \circ D_{270}) =$ $= D_{180} \circ S_2 = S_4$ $(D_{180} \circ S_1) \circ D_{270} =$ $= S_3 \circ D_{270} = S_4$	Gilt bei Symmetrieabbildungen immer gleich

2) Das Kommutativgesetz gilt nicht:

$S_1 \circ D_{90} = S_4$
aber
$D_{90} \circ S_1 = S_2$.

Mündlich: Hinweis zum Assoziativgesetz: Egal wie die Klammer gesetzt wird, bei Hintereinanderausführung dreier Abbildungen wird immer eine nach der anderen ausgeführt (in der Reihenfolge von rechts nach links).

OH-Folie Symmetregruppe des Quadrats

Verknüpfungstafel für das Quadrat:

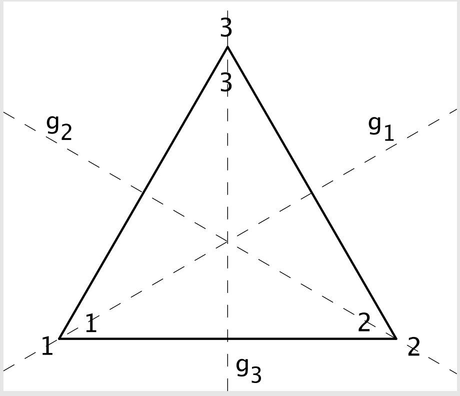
$\circ$	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_1	S_2	S_3	S_4
D_0	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_1	S_2	S_3	S_4
D_{90}	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0	S_2	S_3	S_4	S_1
D_{180}	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}	S_3	S_4	S_1	S_2
D_{270}	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}	S_4	S_1	S_2	S_3
S_1	S_1	S_4	S_3	S_2	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}
S_2	S_2	S_1	S_4	S_3	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}
S_3	S_3	S_2	S_1	S_4	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}
S_4	S_4	S_3	S_2	S_1	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0

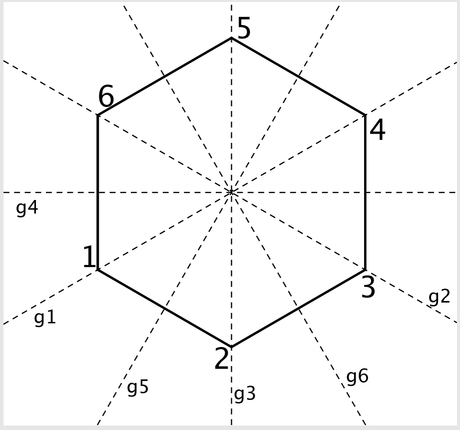
3.4 Untergruppen

Dauer: 30 min
Ziel: Einführung des Untergruppenbegriffs, Untergruppenkriterium.
Material: Arbeitsblatt 3.3

Aufgabe 3.4 (*Arbeitsblatt 3.3, Aufgabe 3*)

Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Sechseck mit ihren Symmetrieachsen:





Verknüpfungstafel für die Symmetrien des Dreiecks:

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_0	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_{120}	D_{120}	D_{240}	D_0	S_3	S_1	S_2
D_{240}	D_{240}	D_0	D_{120}	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	D_0	D_{120}	D_{240}
S_2	S_2	S_3	S_1	D_{240}	D_0	D_{120}
S_3	S_3	S_1	S_2	D_{120}	D_{240}	D_0

Verknüpfungstafel für die Symmetrien des Sechsecks:

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_0	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	S_5	S_4	S_6	S_1	S_3	S_2
D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	S_3	S_1	S_2	S_5	S_6	S_4
D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1
D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	S_2	S_3	S_1	S_6	S_4	S_5
D_{300}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	S_4	S_6	S_5	S_2	S_1	S_3
S_1	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	D_0	D_{120}	D_{240}	D_{60}	D_{300}	D_{180}
S_2	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	D_{240}	D_0	D_{120}	D_{300}	D_{180}	D_{60}
S_3	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	D_{120}	D_{240}	D_0	D_{180}	D_{60}	D_{300}
S_4	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	D_{300}	D_{60}	D_{180}	D_0	D_{240}	D_{120}
S_5	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	D_{60}	D_{180}	D_{300}	D_{120}	D_0	D_{240}
S_6	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	D_{180}	D_{300}	D_{60}	D_{240}	D_{120}	D_0

Vergleiche die Verknüpfungstafel des Dreiecks mit den entsprechenden Teilen der Verknüpfungstafel des Sechsecks. Markiere Gemeinsamkeiten mit einem Marker.

Betrachte das gleichseitige Dreieck und das reguläre Sechseck und überlege, was die Ursache für deine Beobachtung ist.

Lösung: Alle Symetrien, die das Dreieck auf sich abbilden, bilden auch das Sechseck auf sich ab. Die Symmetriegruppe des Dreiecks ist Teilmenge der Symmetriegruppe des Sechsecks. Die Verknüpfungstafel für das Dreieck ist in der Verknüpfungstafel des Sechsecks enthalten.

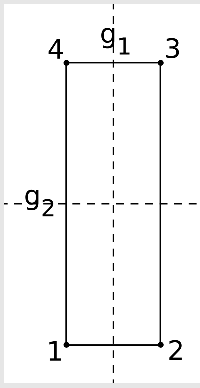
Aufgabe 3.5 (*Arbeitsblatt 3.3, Zusatzaufgabe 2*)

Gegeben ist ein Rechteck, das kein Quadrat ist, mit den Symmetrieachsen wie nebenstehend skizziert.

a) Bestimme die Menge G_{Rechteck} aller Symmetrien des Rechtecks.

b) Schreibe die Verknüpfungstafel auf.

c) Zeige, dass G_{Rechteck} mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine kommutative Gruppe bildet.



Lösung: **a)** $G_{\text{Rechteck}} = \{D_0, D_{180}, S_1, S_2\}$.

b)

$\circ$	D_0	D_{180}	S_1	S_2
D_0	D_0	D_{180}	S_1	S_2
D_{180}	D_{180}	D_0	S_2	S_1
S_1	S_1	S_2	D_0	D_{180}
S_2	S_2	S_1	$D_{180.}$	D_0

c)

- Abgeschlossenheit: In der Verknüpfungstafel kommen nur D_0, D_{180}, S_1, S_2 vor.
- D_0 ist das neutrale Element: Die ersten zwei Spalten stimmen überein, genauso die ersten zwei Zeilen.
- Inverses Element: $\overline{D_0} = D_0$, $\overline{D_{180}} = D_{180}$, $\overline{S_1} = S_1$, $\overline{S_2} = S_2$.
- Assoziativität ist bei Verknüpfung von Symmetrieabbildungen immer erfüllt.
- Kommutativgesetz: Die Verknüpfungstafel ist symmetrisch zur Diagonalen, also ist die Verknüpfung kommutativ.

Tafelanschrieb

4. Untergruppen

Definition: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Menge U mit folgenden Eigenschaften:

1) Jedes $u \in U$ ist auch Element von G, also $U \subseteq G$ (U ist Teilmenge von G).

2) $(U, \circ)$ ist eine Gruppe.

Man schreibt $U \leq G$, falls U eine Untergruppe von G ist.

Beispiele:

1) $G = G_{\text{Sechseck}}$= Symmetriegruppe des regulären Sechsecks, $U = G_{\text{Dreieck}}$ = Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks: $U \leq G$.

2) Jede Gruppe ist Untergruppe von sich selbst: $G \leq G$.

3) Für jede Gruppe G gilt $\{e\} \leq G$ (e = neutrales Element in G).

Tafelanschrieb

Satz: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Teilmenge. Dann ist U genau dann eine Untergruppe, falls

1) Abgeschlossenheit: Für $u, v \in U$ gilt $u \circ v \in U$.

2) Neutrales Element: U enthält das neutrale Element $e \in G$.

3) Inverses Element: Für $u \in U$ gilt auch $u^{-1} \in U$.

Begründung: Das Assoziativgesetz gilt in G, also auch in U. Dann sind alle vier Eigenschaften einer Gruppe erfüllt.

Beispiel: $G = G_{\text{Sechseck}}$, $U = \{D_0, S_2\}$: $U \subseteq G$ und

1) Abgeschlossenheit: $\begin{array}{c|cc} \circ & D_0 & S_2 \\ \hline D_0 & D_0 & S_2 \\ S_2 & S_2 & D_0 \end{array} \Big\}$ Nur Elemente aus U

2) Neutrales Element: $D_0 \in U$.

3) Inverses Element: $D_0^{-1} = D_0 \in U$, $S_2^{-1} = S_2 \in U$.

Also: $U \leq G$.

3.5 Übungen

Dauer: 25 min
Ziel: Anwenden des Untergruppenkriteriums
Material: Arbeitsblatt 3.4

Aufgabe 3.6 (*Arbeitsblatt 3.4, Aufgabe 4*)

Sei G_{Dreieck} die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks, G_{Sechseck} die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Sechsecks und G eine beliebige Gruppe.

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe Deine Antwort!

a) $U_1 := \{D_0, S_1\} \ \leq \ G_{\text{Dreieck}}$

b) $U_2 := \{D_0, D_{180}\} \ \leq \ G_{\text{Sechseck}}$

c) $U_3 := \{D_0, D_{120}, D_{240}\} \ \leq \ G_{\text{Dreieck}}$

d) $U_4 := \{D_0, S_1, S_2, S_3\} \ \leq \ G_{\text{Dreieck}}$

e) $U_5 := \{D_0, D_{120}, D_{180}, D_{240}\} \ \leq \ G_{\text{Sechseck}}$

f) $U_6 := \{D_0, D_{180}\} \ \leq \ G_{\text{Dreieck}}$

g) $U_7 := \{D_0, S_2, D_{180}\} \ \leq \ G_{\text{Sechseck}}$

h) $U_8 := \{D_0, S_1, S_6, D_{180}\} \ \leq \ G_{\text{Sechseck}}$

i) $U_9 := \{\ldots, -40, -20, -10, 0, 10, 20, 40, \ldots\} \ \leq \ \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ (bezüglich Addition)

j) $U_{10} := \{\ldots, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, \ldots\} \ \leq \ \mathbb{Z}$ (Verknüpfung: Addition)

k) $U_{11} := \{x \in \mathbb{Q} \text{ mit } x > 0\} \ \leq \ \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (Verknüpfung: Multiplikation)

Lösung: **a)** Richtig: $U_1 \subseteq G_{\text{Dreieck}}$ und

- Abgeschlossenheit:

$\circ$	D_0	S_1
D_0	D_0	S_1
S_1	S_1	D_0

- Neutrales Element: $D_0 \in U_1$,
- Inverses Element: $\overline{D_0} = D_0 \in U_1$, $\overline{S_1} = S_1 \in U_1$.

b) Richtig: $U_2 \subseteq G_{\text{Sechseck}}$ und

- Abgeschlossenheit:

$\circ$	D_0	D_{180}
D_0	D_0	D_{180}
D_{180}	D_{180}	D_0

- Neutrales Element: $D_0 \in U_2$,
- Inverses Element: $\overline{D_0} = D_0 \in U_2$, $\overline{D_{180}} = D_{180} \in U_2$.

c) Richtig: $U_3 \subseteq G_{\text{Dreieck}}$ und

- Abgeschlossenheit:

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}
D_0	D_0	D_{120}	D_{240}
D_{120}	D_{120}	D_{240}	D_0
D_{240}	D_{240}	D_0	D_{120}

- Neutrales Element: $D_0 \in U_3$,

- Inverses Element: $\overline{D_0} = D_0 \in U_3$, $\overline{D_{120}} = D_{240} \in U_3$, $\overline{D_{240}} = D_{120} \in U_3$.

d) Falsch: Abgeschlossenheit ist nicht erfüllt: $S_2 \circ S_1 = D_{240}$

e) Falsch: Abgeschlossenheit ist nicht erfüllt: $D_{120} \circ D_{180} = D_{300}$

f) Falsch: Die angegebene Menge ist keine Teilmenge von G_{Dreieck}

g) Falsch: Abgeschlossenheit ist nicht erfüllt: $D_{180} \circ S_2 = S_5$

h) Richtig: $U_8 \subseteq G_{\text{Sechseck}}$ und

- Abgeschlossenheit:

$\circ$	D_0	S_1	S_6	D_{180}
D_0	D_0	S_1	S_6	D_{180}
S_1	S_1	D_0	D_{180}	S_6
S_6	S_6	D_{180}	D_0	S_1
D_{180}	D_{180}	S_6	S_1	D_0

- Neutrales Element: $D_0 \in U_8$,
- Inverses Element: $\overline{D_0} = D_0 \in U_8$, $\overline{S_1} = S_1 \in U_8$, $\overline{S_6} = S_6 \in U_8$, $\overline{D_{180}} = D_{180} \in U_8$.

i) Richtig: $U_9 = \{10k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ und

- Abgeschlossenheit: $10k + 10l = 10(k + l) \in U_9$,
- Neutrales Element: $0 = 10 \cdot 0 \in U_9$,
- Inverses Element: $\overline{10k} = -10k \in U_9$.

j) Falsch: Abgeschlossenheit ist nicht erfüllt, denn $1 + 1 = 2 \notin U_{10}$.

k) Richtig: $U_{11} \subseteq \mathbb{Q}$ und

- Abgeschlossenheit: $x > 0 \wedge y > 0 \;\Rightarrow\; x \cdot y > 0 \;\Rightarrow\; x \cdot y \in U_{11}$,
- Neutrales Element: $1 \in U_{11}$,
- Inverses Element: $x \in U_{11} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{1}{x} > 0 \;\Rightarrow\; \overline{x} = \frac{1}{x} \in U_{11}$.

Aufgabe 3.7 (*Arbeitsblatt 3.4, Zusatzaufgabe 3*)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $h \in G$ ein fest gewähltes Element mit inversem Element $\overline{h}$ und

$$G^h = \{h \circ g \circ \overline{h} \text{ mit beliebigem } g \in G\}.$$

Zeige, dass $G^h \leq G$ gilt.

Lösung:

- Abgeschlossenheit: Sind $h \circ g \circ \overline{h}$ und $h \circ f \circ \overline{h}$ zwei Elemente von G^h, so gilt

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ \overline{h}) \circ (h \circ f \circ \overline{h}) &\overset{\text{AG}}{=} (h \circ g) \circ \underbrace{(\overline{h} \circ h)}_{=e} \circ (f \circ \overline{h}) \\ &\overset{\text{NE, AG}}{=} h \circ (g \circ f) \circ \overline{h} \in G^h,\end{aligned}$$

da $g \circ f \in G$.

- NE: $h \circ e \circ \overline{h} = h \circ \overline{h} = e$. Also gilt $e \in G^h$.

- IE: Es gilt auch $h \circ \overline{g} \circ \overline{h} \in G^h$. Dieses ist das inverse Element zu $h \circ g \circ \overline{h}$:

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ \overline{h}) \circ (h \circ \overline{g} \circ \overline{h}) &\overset{\text{AG}}{=} (h \circ g) \circ \underbrace{(\overline{h} \circ h)}_{=e} \circ (\overline{g} \circ \overline{h}) \\ &\overset{\text{NE, AG}}{=} h \circ \underbrace{(g \circ \overline{g})}_{=e} \circ \overline{h} \overset{\text{NE}}{=} h \circ \overline{h} = e.\end{aligned}$$

3.6 Ergänzung

Der folgende Satz hatte leider keinen Platz im Schülerseminar. Er erklärt, warum in der Verknüpfugstafel einer Gruppe das neutrale Element nur ein Mal pro Zeile und nur ein Mal pro Spalte vorkommen darf.

Satz: Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und $a \in G$, so ist das inverse Element $\overline{a}$ eindeutig.

Beweis: Sei $e \in G$ das neutrale Element und $b \in G$, so dass $b \circ a = e$.

Zeige: Es folgt $b = \overline{a}$.

$b = b \circ e \;=\; b \circ (a \circ \overline{a}) \overset{\text{AG}}{=} (b \circ a) \circ \overline{a} \;=\; e \circ \overline{a} \;=\; \overline{a}.$ $\square$

Der Satz zeigt: Es gibt genau ein Element $b \in G$, so dass $b \circ a = e$ gilt. Also tritt in der Spalte der Verknüpfungstafel, in der der oberste Eintrag a lautet, genau ein Mal der Eintrag e auf (nämlich in der Zeile, in der ganz links dieses $b = \overline{a}$ steht).

4 Unterrichtseinheit 4 - Rechnen mit Restklassen

4.1 Vorbemerkungen

ler Einheit: Kongruenzen, Restklassen und die Addition von Restklassen.

Auch in dieser Doppelstunde kommt das Thema Gruppen nicht zur Sprache.

4.2 Einstieg

Dauer:	5 min
Ziel:	Vorbereitung des Themas
Material:	OH-Folie

OH-Folie Restklassen

Alfred und Bianca sind gemeinsam in Stuttgart unterwegs. Sie trennen sich um 21.00 Uhr und vereinbaren, sich in 5 Stunden wieder zu treffen.

Daraufhin behauptet Bianca: „Dann gilt $2 = 26$, oder?"

4.3 Kongruenzen

Dauer:	35 min
Ziel:	Kongruent modulo einer natürlichen Zahl kennenlernen und damit umgehen.
Material:	Tafel, Arbeitsblatt 4.1

Tafelanschrieb

5. Kongruenz

Definition: Für ganze Zahlen a, b und $m \in \mathbb{N}$ sagt man a ist kongruent zu b modulo m:

$$a \equiv b \mod m,$$

falls $a - b$ durch m teilbar ist, d.h. $\frac{a-b}{m}$ ist eine ganze Zahl.

Beispiele: $2 \stackrel{?}{\equiv} 26 \mod 24$: $\frac{2-26}{24} = -1$, ✓

$5 \stackrel{?}{\equiv} -19 \mod 12$: $\frac{5-(-19)}{12} = 2$, ✓

$3 \stackrel{?}{\equiv} -3 \mod 12$: $\frac{3-(-3)}{12} = \frac{1}{2}$, Falsch!.

Mündlich: Kongruent modulo m bedeutet nicht Gleichheit, aber irgendwie erinnert es doch an Gleichheit (oder eine Vorstufe davon).

Mündlich: Damit wir besser mit Kongruenzen rechnen können, gibt uns der folgende Satz zwei äquivalente (gleichbedeutende) Beschreibungen von „kongruent modulo m".

Tafelanschrieb

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $a \equiv b \mod m$
(2) Es gibt eine ganze Zahl k, dass gilt: $a = b + k \cdot m$.
(3) Teilt man a und b durch m, so bleibt der selbe Rest.

Bedingung (2) an unseren Beispielen:

$2 \stackrel{?}{\equiv} 26 \mod 24$: $\quad \frac{2-26}{24} = -1 \Leftrightarrow 2 - 26 = (-1) \cdot 24 \Leftrightarrow \underbrace{2}_{a} = \underbrace{26}_{b} + \underbrace{(-1)}_{k} \cdot \underbrace{24}_{m}$. ✓

$5 \stackrel{?}{\equiv} -19 \mod 12$: $\quad \frac{5-(-19)}{12} = 2 \Leftrightarrow \underbrace{5}_{a} = \underbrace{-19}_{b} + \underbrace{2}_{k} \cdot \underbrace{12}_{m}$. ✓

$3 \stackrel{?}{\equiv} -3 \mod 12$: $\quad \frac{3-(-3)}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 = -3 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{k} \cdot 12$ ↯ (2) ist nicht erfüllt.

Mündlich: An diesen Beispielen sehen wir bereits, warum die Äquivalenz $(1) \Leftrightarrow (2)$ gilt.

Mündlich: Um die Bedingung (3) zu verstehen müssen wir wissen, was „Teilen mit Rest“ bedeutet.

Tafelanschrieb

Teilen mit Rest: Grundschule: $21 : 4 = 5$R1 .
Als Gleichung: $21 = 5 \cdot 4 + \underbrace{1}_{\text{Rest}}$.

Mündlich: Mit Gleichungen kann man besser arbeiten

Tafelanschrieb

Definition: Gegeben sind ganze Zahlen a, m. Dann bedeutet $a : m = k$ Rest R, dass es Zahlen $k \in \mathbb{Z}$, $R \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gibt, so dass

$$a = k \cdot m + R \text{ und } 0 \leq R \leq m - 1.$$

Die Zahl R heißt Rest: a geteilt durch m lässt den Rest R. Die Bedingung $0 \leq R \leq m - 1$ garantiert, dass der Rest R eindeutig ist.

Bedingung (3) an Beispielen:

$2 = 0 \cdot 24 + 2,\ 26 = 1 \cdot 24 + 2$: Die Reste sind gleich,
$5 = 0 \cdot 12 + 5,\ -19 = (-2) \cdot 12 + 5$: Die Reste sind gleich,
$3 = 0 \cdot 12 + 3,\ -3 = (-1) \cdot 12 + 9$: Die Reste sind verschieden.

Aufgabe 4.1 (*Arbeitsblatt 4.1, Aufgabe 1*)

a) Überprüfe jeweils mit allen drei Bedingungen, ob die folgenden Kongruenzen gelten:

a$_1$) $17 \stackrel{?}{\equiv} 94 \mod 11$,

a$_2$) $-32 \stackrel{?}{\equiv} 54 \mod 8$.

b) Bestimme alle ganzen Zahlen x, für welche die Kongruenz $x \equiv 12 \mod 4$ erfüllt ist.

Lösung: a) a$_1$) $\frac{17-94}{11} = \frac{-77}{11} = -7 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ (1) ist erfüllt.

$17 = 94 - 7 \cdot 11 \;\Rightarrow$ (2) ist erfüllt.

$17 = 1 \cdot 11 + 6,\; 94 = 8 \cdot 11 + 6 \;\Rightarrow$ (2) ist erfüllt.

a₂) $\frac{-32-54}{8} = \frac{-86}{8} = -\frac{43}{4} \notin \mathbb{Z} \;\Rightarrow$ (1) ist nicht erfüllt.

$-32 = 54 - \underbrace{\frac{43}{4}}_{\notin\mathbb{Z}} \cdot 8 \;\Rightarrow$ (2) ist nicht erfüllt.

$-32 = -4 \cdot 8 + \underbrace{0}_{R_1},\; 54 = 6 \cdot 8 + \underbrace{6}_{R_2}.\; R_1 \neq R_2 \;\Rightarrow$ (2) ist nicht erfüllt.

b) $x = 0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \ldots$. Genau alle durch 4 teilbaren Zahlen erfüllen die Gleichung.

Aufgabe 4.2 (*Arbeitsblatt 4.1, Zusatzaufgabe 1*)

Sei m eine fest gewählte natürliche Zahl. Zeige, dass „kongruent sein“ die drei Eigenschaften einer sogenannten Äquivalenzrelation erfüllt. Diese sind:

a) Reflexivität: $a \equiv a \mod m$ für jede ganze Zahl a,

b) Symmetrie: Aus $a \equiv b \mod m$ folgt $b \equiv a \mod m$,

c) Transitivität: Aus $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m$ folgt $a \equiv c \mod m$.

Lösung: **a)** $a \equiv a \mod m \;\Leftrightarrow\; a - a$ ist durch m teilbar. Das ist wahr, da Null durch jede Zahl teilbar ist.

b) $a \equiv b \mod m \;\Leftrightarrow\; a - b$ ist durch m teilbar $\Leftrightarrow\; b - a$ ist durch m teilbar $\Leftrightarrow\; b \equiv a \mod m$.

c) Es gelte $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m$

Nach (2) aus dem Satz: $a = b + k \cdot m,\; b = c + l \cdot m$ mit geeigneten Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow\; a = b + k \cdot m = c + l \cdot m + k \cdot m = c + \underbrace{(l+k)}_{\in\mathbb{Z}} m$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}\; a \equiv c \mod m$.

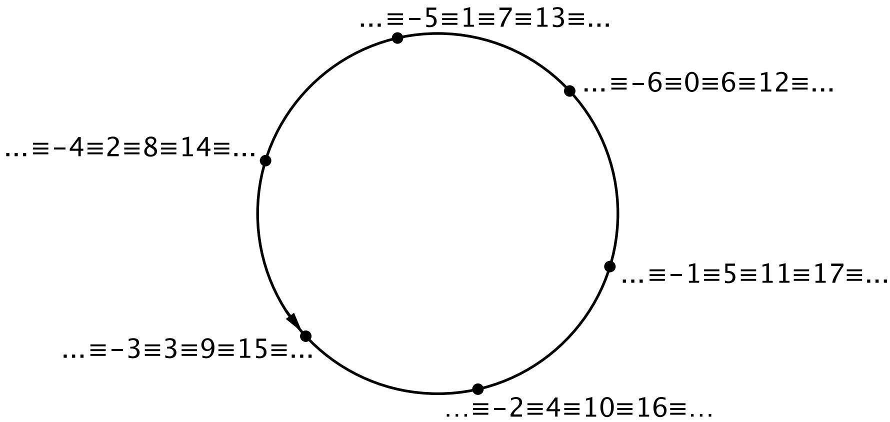
4.4 Restklassen

Dauer: 25 min
Ziel: Definition von Restklassen
Material: Tafel, Arbeitsblatt 4.2

Tafelanschrieb

6. Restklassen

Die Uhr modulo 6: Schreibe alle Zahlen, die modulo 6 kongruent sind, in eine Kongruenzkette. Es gibt 6 solcher Ketten:



Definition: Als Restklasse $[a]$ von a bezeichnet man die Menge aller ganzen Zahlen, die kongruent zu a sind: $[a] = \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \mod m\}$ (Sprich: Die Menge alller b element Z, für die a kongruent b modulo m ist).

Mündlich: Jede Kongruenzkette im obigen Bild entspricht genau einer Restklasse. Dadurch wird aus Kongruenz Gleichheit: Genau dann wenn $a \equiv b$, gilt $[a] = [b]$.

Tafelanschrieb

Es gilt also: $a \equiv b \mod m \;\Leftrightarrow\; [a] = [b]$.

Beispiel: Die Restklasse von 2 für Kongruenz modulo 5 ist: $[2] = \{... - 8, -3, 2, 7, 12, ...\}$. Alle Elemente von $[2]$ lassen beim Teilen durch 5 den Rest 2.

Aufgabe 4.3 (*Arbeitsblatt 4.2, Aufgabe 2*)

In dieser Aufgabe werden Kongruenzen modulo $m = 5$ untersucht.

a) Gib alle fünf Restklassen an:

b) Wähle zwei verschiedene Elemente a, b aus $[3]$ und zwei verschiedene Elemente c, d aus $[4]$. Bilde die Summen $a+c, a+d, b+c, b+d$ und stelle fest, in welchen Äquivalenzklassen die Summen liegen.

Lösung: **a)**

$$\begin{aligned}
[0] &= \{k \cdot 5 : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 5, \pm 10, \ldots\} \\
[1] &= \{1 + k \cdot 5 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\} \\
[2] &= \{2 + k \cdot 5 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\} \\
[3] &= \{3 + k \cdot 5 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\} \\
[4] &= \{4 + k \cdot 5 : k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14 \ldots\}
\end{aligned}$$

b) Z.B. $a = 3,\ b = 13,\ c = 9,\ d = -1.$

$a + c = 12 \in [2],\ a + d = 2 \in [2],\ b + c = 22 \in [2],\ b + d = 12 \in [2]$: Alle Summen liegen in der selben Äquivalenzklasse $[2]$.

4.5 Addition von Restklassen

Dauer: 25 min
Ziel: Definition der Addition von Restklassen
Material: Tafel, OH-Folie, Arbeitsblatt 4.3

Tafelanschrieb

Definition:

1) Für die Menge der Restklassen modulo m schreiben wir $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], ..., [m-1]\}$

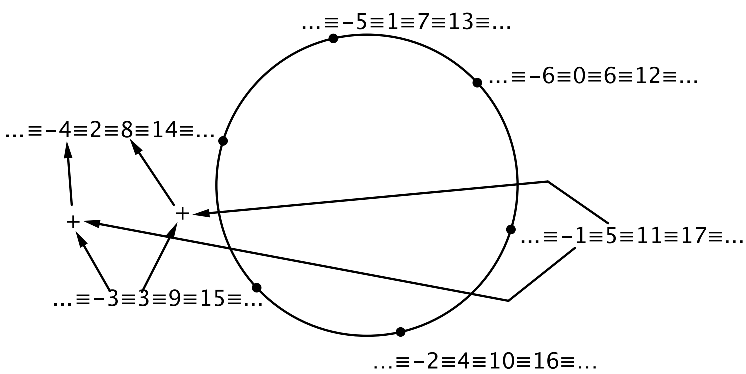
2) Wir definieren auf der Menge der Restklassen eine Addition: $[a] + [b] \; := \; [a+b]$.

Mündlich: Wichtig für diese Definition: Es ist egal, welche Elemente der Restklassen $[a], [b]$ man addiert, als Ergebnis kommt immer dieselbe Restklasse heraus.

Vorgehen: Auf dem Arbeitsblatt 4.3 ist der Kreis modulo 6 aufgedruckt. L. erklärt mit OH-Folie, wie die Unabhängigkeit der Addition vom gewählten Vertreter funktioniert, SuS schreiben auf dem Arbeitsblatt mit.

OH-Folie Restklassen

Zur Addition von Restklassen:



Allgemein: $[a] = [c]$ und $[b] = [d] \;\Rightarrow\; [a+b] = [c+d]$.

Aufgabe 4.4 (*Arbeitsblatt 4.3, Aufgabe 3*)

Rechne in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Berechne das Ergebnis und schreibe es in der Form $[a]$ mit $0 \leq a \leq m-1$ auf:

a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
$$[3]+[3] =$$
$$[4]+[4] =$$
$$[8]+[2] =$$

b) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$:
$$[4]+[8] =$$
$$[9]+[1] =$$
$$[5]+[6] =$$

c) $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$:
$$[20]+[20]+[15]+[11] =$$
$$[3]-[5]-[8]-[7] =$$
$$[1]-[20]-[30]-[7] =$$

Lösung: **a)** $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}[3]+[3] &= [1]\\ [4]+[4] &= [3]\\ [8]+[2] &= [0]\end{aligned}$$

b) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}[4]+[8] &= [2]\\ [9]+[1] &= [0]\\ [5]+[6] &= [1]\end{aligned}$$

c) $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}[20]+[20]+[15]+[11] &= [3]\\ [3]-[5]-[8]-[7] &= [4]\\ [1]-[20]-[30]-[7] &= [7]\end{aligned}$$

Aufgabe 4.5 (*Arbeitsblatt 4.3, Zusatzaufgabe 2*)

Gleichungen in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: Bestimme jeweils die Lösung. Der Wert der Variablen soll wieder zwischen 0 und $m-1$ liegen.

a) In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}[3]+[x] &= [0]\\ [5]+[y] &= [2]\\ [4]+[z] &= [0]\end{aligned}$$

b) In $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}[7]+[w] &= [6]\\ [4]+[x] &= [3]\\ [9]+[y] &= [3]\\ [4]+[z] &= [0]\end{aligned}$$

Lösung: **a)** In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}[3]+[x] &= [0] &\Rightarrow [x]=[3]\\ [5]+[y] &= [2] &\Rightarrow [y]=[3]\\ [4]+[z] &= [0] &\Rightarrow [z]=[2]\end{aligned}$$

b) In $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$:
$$\begin{aligned}[7]+[w] &= [6] &\Rightarrow [w]=[12]\\ [4]+[x] &= [3] &\Rightarrow [x]=[12]\\ [9]+[y] &= [3] &\Rightarrow [y]=[7]\\ [4]+[z] &= [0] &\Rightarrow [z]=[9]\end{aligned}$$

4.6 Ergänzung

Der folgende Beweis wurde aus Zeitgründen weggelassen:

Wir beweisen $(1) \Leftrightarrow (3)$ allgemein. Erst dann sind wir sicher, dass die Äquivalenz für beliebige Zahlen a, b, m gilt.

Dazu seien $\begin{aligned} a &= k_1 \cdot m + R_1 \\ b &= k_2 \cdot m + R_2 \end{aligned}$ mit $0 \leq R_1, R_2 \leq m-1$ (R_1 ist Rest beim Teilen $a : m$ und R_2 bei $b : m$)

„$(1) \Leftarrow (3)$“:
Wenn $R_1 = R_2$ gilt, dann gilt $a - b = (k_1 \cdot m + R_1) - (k_2 \cdot m + R_2) = k_1 \cdot m - k_2 \cdot m = (k_1 - k_2)m$.
„$(1) \Rightarrow (3)$“:
Aus $\dfrac{a-b}{m} = k$ folgt $a = k \cdot m + b = k \cdot m + k_2 \cdot m + R_2 = (k + k_2)m + R_2 \Rightarrow R_1 = R_2$ mit $k_1 = k + k_2$

$\square$

5 Unterrichtseinheit 5 - Restklassengruppen

5.1 Vorbemerkungen

Ziele: Gruppenbegriff und Untergruppenbegriff auf Rechnen mit Restklassen anwenden.

5.2 Wiederholung

Dauer:	30 min
Ziel:	Rechnen mit Restklassen wiederholen.
Material:	OH-Folien Wiederholung 1 und 2, Arbeitsblatt 5.1

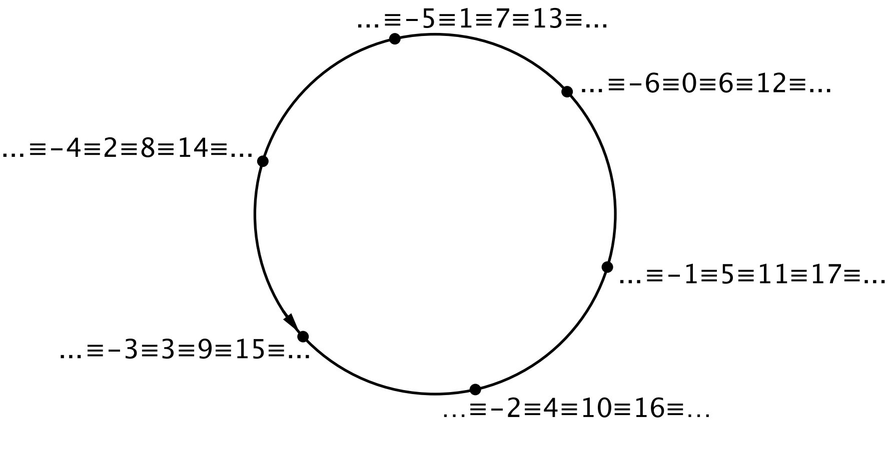
OH-Folie Wiederholung 1

Definition: Für ganze Zahlen a, b und $m \in \mathbb{N}$ sagt man

$$\underline{a \text{ ist kongruent zu } b \text{ modulo } m}: a \equiv b \mod m,$$

falls $a - b$ durch m teilbar ist, d.h. $\dfrac{a-b}{m}$ ist eine ganze Zahl.

Beispiel: Kongruenzen modulo 6:



Man schreibt alle Zahlen, die zueinander kongruent sind, in eine Menge, die Restklasse:

$$\begin{array}{llllllll} \text{z.B.} & [1] & = & \{\ldots -5, 1, 7, 13, \ldots\} & = & [-5] & = & [7] & = & \ldots \\ \text{z.B.} & [0] & = & \{\ldots -6, 0, 6, 12, \ldots\} & = & [-6] & = & [12] & = & \ldots \end{array}$$

Definition:

1) Für die Menge der Restklassen modulo m schreibt man $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \big\{[0], [1], ..., [m-1]\big\}$

2) Auf der Menge der Restklassen ist eine Addition definiert:

$$[a] + [b] = [a + b].$$

Mündlich: Alle Elemente einer Restklasse lassen beim Teilen durch m den selben Rest.

OH-Folie Wiederholung 2

Rechnen in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], \ldots, [10]\}$:

- $[9] + [4] = [9 + 4] = [13] = [2]$
- $[10] + [10] = [10 + 10] = [20] = [9]$
- $[8] + [3] = [11] = [0]$

Mündlich: Damit wir sehen, welches Element von $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ die Lösung unserer Aufgabe ist, schreiben wir das Ergebnis immer in der Form $[a]$ mit $0 \leq a \leq 10$.

Vorgehen: Verschiedene SuS lösen verschiedene Aufgabenteile der folgenden Aufgabe. Die Ergebnisse werden an der Tafel zusammengetragen.

Aufgabe 5.1 (*Arbeitsblatt 5.1, Aufgabe 1*)

Summen derselben Elemente: Berechne alle Elemente der angegebenen Mengen. Beachte, dass ein Element nur ein Mal (und nicht mehrmals) in der Menge enthalten sein kann.

a) In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: $$\begin{aligned} M_1 &= \{[2], [2] + [2], [2] + [2] + [2], \ldots\}, \\ M_2 &= \{[3], [3] + [3], \ldots\}. \end{aligned}$$

b) In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $$\begin{aligned} M_3 &= \{[2], [2] + [2], [2] + [2] + [2], \ldots\}, \\ M_4 &= \{[3], [3] + [3], \ldots\}, \\ M_5 &= \{[5], [5] + [5], \ldots\}. \end{aligned}$$

c) In $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$: $$\begin{aligned} M_6 &= \{[2], [2] + [2], [2] + [2] + [2], \ldots\}, \\ M_7 &= \{[4], [4] + [4], \ldots\}, \\ M_8 &= \{[6], [6] + [6], \ldots\}. \end{aligned}$$

d) In $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$: $$\begin{aligned} M_9 &= \{[2], [2] + [2], [2] + [2] + [2], \ldots\}, \\ M_{10} &= \{[3], [3] + [3], \ldots\}, \\ M_{11} &= \{[6], [6] + [6], \ldots\}. \end{aligned}$$

e) In $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$: $$\begin{aligned} M_{12} &= \{[2], [2] + [2], [2] + [2] + [2], \ldots\}, \\ M_{13} &= \{[3], [3] + [3], \ldots\}, \\ M_{14} &= \{[5], [5] + [5], \ldots\}. \end{aligned}$$

Lösung: **a)** $M_1 = \{[0], [2]\},\ M_2 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

b) $M_3 = \{[0], [2], [4]\},\ M_4 = \{[0], [3]\},\ M_5 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

c) $M_6 = \{[0], [2], [4], [6]\},\ M_7 = \{[0], [4]\},\ M_8 = M_6$

d) $M_9 = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z},\ M_{10} = \{[0], [3], [6]\},\ M_{11} = M_9$

e) $M_{12} = \{[0], [2], [4], [6], [8]\},\ M_{13} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z},\ M_{14} = \{[0], [5]\}$

5.3 Restklassengruppen

Dauer: 25 min
Ziel: Beweis, dass $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe ist.
Material: Tafel, OH-Folie Gruppe, Arbeitsblatt 5.2

Tafelanschrieb

7. Restklassengruppen

Satz: Sei m eine natürliche Zahl. Dann ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ eine kommutative Gruppe.

OH-Folie Gruppe

Eine Gruppe $(G, \circ)$ besteht aus

- einer Menge G und
- einer Rechenoperation $\circ$.

Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a, b, c \in G$ erfüllt sein:

1) Abgeschlossenheit: $a \circ b \in G$ (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).

2) Assoziativgesetz: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) Neutrales Element: Es gibt ein NE $e \in G$, so dass $e \circ a = a \circ e = a$ für jedes $a \in G$.

4) Inverses Element: Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch das Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$, so heißt die Gruppe kommutative Gruppe.

Tafelanschrieb

Beweis: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq a, b, c \leq m-1$.

Abgeschlossenheit: Wir müssen zeigen, dass $[a] + [b]$ ein Element von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist.

Fall 1: $a + b \leq m - 1$: Dann gilt offensichtlich

$$[a] + [b] = \big[\underbrace{a+b}_{\text{zwischen } 0 \text{ und } m-1}\big] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Fall 2: $a + b \geq m$: Dann gilt $0 \leq a + b - m \leq (m-1) + (m-1) - m = m - 2$ und

$$[a] + [b] = [a+b] = [\underbrace{a+b-m}_{\text{zwischen } 0 \text{ und } m-1}] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

NE: Offenbar ist $[0]$ das NE, denn es gilt

$$[a] + [0] = [a+0] = [a] \text{ und } [0] + [a] = [0+a] = [a].$$

IE: Zu $[0]$ ist $[0]$ das IE. Für $1 \leq a \leq m-1$ ist das IE zu $[a]$ das Element $[m-a]$, denn es gilt $0 \leq m - a \leq m - 1$, also $[m-a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und

$$[a] + [m-a] = [a+m-a] = [m] = [0] \quad \text{und} \quad [m-a] + [a] = [m] = [0].$$

AG: Zu zeigen ist: $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$. Wir verwenden, dass für die Addition ganzer Zahlen das Assoziativitätsgesetz gilt:

$$\begin{aligned} \big([a] + [b]\big) + [c] &= [a+b] + [c] = [(a+b)+c] \\ &= [a+(b+c)] = [a] + [b+c] = [a] + \big([b] + [c]\big). \end{aligned}$$

KG: $[a] + [b] = [a+b] = [b+a] = [b] + [a]$. $\square$

Aufgabe 5.2 (*Arbeitsblatt 5.2, Aufgabe 2*)

Fülle die Verknüpfungstafel für $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ aus:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$						
$[1]$						
$[2]$						
$[3]$						
$[4]$						
$[5]$						

Welche Gruppeneigenschaften kann man an der Verknüpfungstafel direkt ablesen?

Lösung:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[5]$	$[5]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$

Abgeschlossenheit: In der Tafel kommen nur Elemente der Gruppe vor.
Neutrales Element: Erste und zweite Zeile stimmen überein, genauso erste und zweite Spalte.
Inverses Element: In jeder Zeile und in jeder Spalte tritt das neutrale Element genau ein Mal auf, und diese Einträge liegen symmetrisch zur Diagonalen (von links oben nach rechts unten).
Kommutativgesetz: Die Tabelle ist symmetrisch zur Diagonalen.

Aufgabe 5.3 (*Arbeitsblatt 5.2, Zusatzaufgabe 1*)

Durch $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$ wird in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ eine Multiplikation definiert.

a) Fülle die Verknüpfungstafel für $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \cdot)$ aus:

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$						
$[1]$						
$[2]$						
$[3]$						
$[4]$						
$[5]$						

b) Welches Element ist das neutrale Element in $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \cdot)$?

c) Warum ist $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \cdot)$ keine Gruppe?

d) Nun wird das Element $[0]$ aus $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ entfernt, betrachte $G := (\mathbb{Z}/6Z) \setminus \{[0]\}$. Welche Gruppeneigenschaften sind in $(G, \cdot)$ erfüllt, welche nicht?

Lösung: **a)**

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[0]$	$[3]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$	$[0]$	$[4]$	$[2]$
$[5]$	$[0]$	$[5]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

b) Offensichtlich gilt $[1] \cdot [a] = [a] = [a] \cdot [1]$ für jedes $[a] \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Also ist $[1]$ das NE.

c) Das Element $[0]$ besitzt kein inverses Element, da $[0] \cdot [a] = [0] \neq [1]$ für jedes $[a] \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gilt.

d)
- Abgeschlossenheit ist erfüllt, da in der Tabelle nur Elemente von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ vorkommen.
- Assoziativgesetz gilt: $[a] \cdot ([b] \cdot [c]) = [a] \cdot [b \cdot c] = [a \cdot (b \cdot c)] = [(a \cdot b) \cdot c] = [a \cdot b] \cdot [c] = ([a] \cdot [b]) \cdot [c]$.
- Es gibt ein NE: $[1] \in G$.

- $[1]$ besitzt ein IE: $\overline{[1]} = [1]$,
  $[5]$ besitzt ein IE: $\overline{[5]} = [5]$,
  $[2], [3], [4]$ besitzen kein IE, da in den zugehörigen Zeilen nirgends der Eintrag $[1]$ steht.

5.4 Untergruppen

Dauer: 35 min
Ziel: Untergruppen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ finden.
Material: Tafel, OH-Folie Gruppe, Arbeitsblatt 5.3

Tafelanschrieb

Untergruppen von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$:

OH-Folie Gruppe

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Teilmenge von G, so dass $(U, \circ)$ eine Gruppe ist. Man schreibt $U \leq G$, falls U eine Untergruppe von G ist.

Satz: Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Teilmenge, dann ist U genau dann eine Untergruppe, falls

1) Abgeschlossenheit: Für $u, v \in U$ gilt $u \circ v \in U$.

2) Neutrales Element: U enthält das neutrale Element $e \in G$.

3) Inverses Element: Für $u \in U$ gilt auch $u^{-1} \in U$.

Mündlich: Das Assoziativgesetz muss nicht mehr überprüft werden, da es in der Gruppe gilt und damit auch in der Untergruppe.

Mündlich: Damit die zweite Eigenschaft erfüllt ist, muss $[0] \in U$ gelten. Eine Menge U ohne das Element $[0]$ brauchen wir nicht zu betrachten.

Tafelanschrieb

Triviale Untergruppen:
$$U = \{[0]\}$$
$$U = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

Mündlich: Die trivialen Untergruppen gibt es immer.

Tafelanschrieb

$U = \{[0], [2]\}$ keine Untergruppe: $[2] + [2] = [4] \notin U$

$U = \{[0], [2], [4]\}$ $\Rightarrow$ $U \leq G$:

+	[0]	[2]	[4]
[0]	[0]	[2]	[4]
[2]	[2]	[4]	[0]
[4]	[4]	[0]	[2]

$U = \{[0], [3]\}$ $\Rightarrow$ $U \leq G$:

+	[0]	[3]
[0]	[0]	[3]
[3]	[3]	[0]

Mündlich: Aus der Verknüpfungstafel für die Untergruppe folgt einerseits die Abgeschlossenheit. Andererseits sieht man auch, dass jedes Element ein inverses Element besitzt: Das neutrale Element $[0]$ kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Mal vor, und diese Einträge liegen symmetrisch zur Diagonalen.

Aufgabe 5.4 (*Arbeitsblatt 5.3, Aufgabe 3*)

Finde nichttriviale Untergruppen von

a) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$, **b)** $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},+)$, **c)** $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$,

d) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},+)$, **e)** $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+)$, **f)** $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z},+)$,

g) $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z},+)$, **h)** $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z},+)$, **i)** $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+)$.

Lösung: **a)** $U=\{[0],[2]\}$.

b) Es gibt nur die trivialen Untergruppen.

c) $U=\{[0],[3]\}$ und $U=\{[0],[2],[4]\}$.

d) Es gibt nur die trivialen Untergruppen.

e) $U=\{[0],[4]\}$ und $U=\{[0],[2],[4],[6]\}$.

f) $U=\{[0],[3],[6]\}$.

g) $U=\{[0],[5]\}$ und $U=\{[0],[2],[4],[6],[8]\}$.

h) Es gibt nur die trivialen Untergruppen.

i) $U=\{[0],[6]\}$ und $U=\{[0],[4],[8]\}$ und $U=\{[0],[2],[4],[6],[8],[10]\}$.

Aufgabe 5.5 (*Arbeitsblatt 5.3, Zusatzaufgabe 2*)

Welche Untergruppen besitzt $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z},+)$?

Lösung: $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z},+)$ besitzt nichttriviale Untergruppen mit $2,4,5,10,20,25,50$ Elementen:

$U_1=\big\{[0],[50]\big\}$,

$U_2=\big\{[0],[25,[50],[75]\big\}$,

$U_3=\big\{[0],[20],[40],[60],[80]\big\}$,

$U_4=\big\{[0],[10],[20],[30],[40],[50],[60],[70],[80],[90]\big\}$,

$U_5=\big\{[0],[4],[8],[12],[16],\dots,[96]\big\}=\big\{[4k]:k=0,1,\dots,24\big\}$,

$U=\big\{[2k]:k=0,1,\dots,49\big\}$.

Mündlich: Wir sehen: Die Anzahl der Elemente einer Untergruppe ist ein Teiler der Anzahl der Elemente der Gruppe. Nächstes Mal werden wir darüber sprechen.

5.5 Ergänzung

Multiplikation in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\setminus\{[0]\}$:

$\cdot$	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[4]	[3]	[2]	[1]

Wir sehen:
$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\setminus\{[0]\},\cdot)$ ist eine Gruppe (ohne Beweis). Man kann beweisen: Ist p eine Primzahl, dann ist $\big(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\setminus\{[0]\},\cdot\big)$ eine Gruppe.

6 Unterrichtseinheit 6 - Der Satz von Lagrange

6.1 Vorbemerkungen

Inhalt dieser Einheit: Satz von Lagrange, Erzeugung von Untergruppen.

6.2 Wiederholung

Dauer:	20 min
Ziel:	Definition von Gruppe und Untergruppe wiederholen, Untergruppenbegriff üben
Material:	OH-Folien Wiederholung und Monstergruppe (nur obere Hälfte), Arbeitsblatt 6.1

OH-Folie Wiederholung

Gruppe und Untergruppe

Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ besteht aus

- einer Menge G und
- einer Rechenoperation $\circ$.

Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a, b, c \in G$ erfüllt sein:

1) **Abgeschlossenheit**: $a \circ b \in G$ (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).

2) **Assoziativgesetz**: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) **Neutrales Element**: Es gibt ein NE $e \in G$, so dass $e \circ a = a \circ e = a$ für jedes $a \in G$.

4) **Inverses Element**: Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch das **Kommutativgesetz**: $a \circ b = b \circ a$, so heißt die Gruppe **kommutative Gruppe**.

Eine **Untergruppe** U ist eine Teilmenge $U \subseteq G$, die selbst schon eine Gruppe ist.

Triviale Untergruppen jeder Gruppe G: $U = \{e\}$, $U = G$.

OH-Folie Monstergruppe

Die **Monstergruppe** hat ca. $8 \cdot 10^{53}$ Elemente.

Ausgeschrieben:

800000000000000000000000000000000000000000000000000000

Auf der Erde leben ca. $7 \cdot 10^9$ Menschen.

Ausgeschrieben: 7000000000 (Das sind 44 Nullen weniger!)

Sei nun eine Teilmenge $U \subseteq M$ gegeben mit 3239767741 Elementen.

Mündlich: Bei so riesigen Zahlen kann man keine Verknüpfungstafel aufstellen. Wir suchen eine Methode, mit der man leicht ausschließen kann, dass eine Untergruppe vorliegt.

> **Anmerkung**
> Die Monstergruppe heißt auch Fischer-Monster nach einem ihrer Entdecker. Es gibt 26 spezielle Gruppen, die außerhalb der Einteilung von (einfachen) Gruppen sind. Darunter gibt es auch ein Baby-Monster, ein Teil der speziellen Gruppen wird zu Happy Family zusammengefasst. In Wikipedia steht mehr dazu.

Mündlich: Beim letzten Treffen haben wir die Gruppen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit der Addition und Untergruppen davon betrachtet.

Aufgabe 6.1 (*OH-Folie/Arbeitsblatt 6.1, Aufgabe 1*)

In dieser Aufgabe sollen nichttriviale Untergruppen von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ bestimmt werden. Vervollständige die Tabelle. Du kannst Dich an den eingetragenen Beispielen orientieren.

Bezeichnung	G	nichttriviale Untergruppen $U \leq G$
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1]\}$	———
$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], [2]\}$	———
$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], [2], [3]\}$	{[0],[2]}
$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], [2], [3], [4]\}$	———
$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$	$\{[0], [2], [4]\}, \quad \{[0], [3]\}$
$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [5], [6]\}$	———
$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [6], [7]\}$	$\{[0], [2], [4], [6]\}, \quad \{[0], [4]\}$
$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [7], [8]\}$	{[0],[3],[6]}
$(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [8], [9]\}$	{[0],[2],[4],[6],[8]}, {[0],[5]}
$(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [9], [10]\}$	———
$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [10], [11]\}$	{[0],[2],[4],[6],[8],[10]} {[0],[4],[8]} {[0],[3],[6],[9]} {[0],[6]}

Vorgehen: Verschiedene S-Gruppen bearbeiten verschiedene Abschnitte in der Tabelle. Die Lösungen der SuS (in der Tabelle blau) werden auf einer OH-Folie notiert.

Mündlich: In welchem Verhältnis stehen die Größen der Gruppen und der Untergruppen zueinander?

6.3 Der Satz von Lagrange

Dauer: 30 min
Ziel: Satz von Lagrange kennenlernen und anwenden
Material: Arbeitsblatt 6.2, OH-Folie Monstergruppe (untere Hälfte)

Tafelanschrieb

8. Der Satz von Lagrange

Definition: Für eine Gruppe G mit endlich vielen Elementen heißt die Anzahl der Elemente von G die Gruppenordnung. Für die Gruppenordnung von G schreibt man $|G|$.

Mündlich: Die Gruppenordnung ist ein Name für etwas ganz einfaches. Trotzdem ist es ungeheuer geschickt, „Gruppenordnung von G“ oder kürzer nur „Ordnung von G“ anstelle von „Anzahl der Elemente von G“ zu sagen.

Mündlich: Gibt es auch unendliche Gruppen? Warum ist $\mathbb{N}$ bezüglich der Addition keine Gruppe?

Tafelanschrieb

Beispiel: $|\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}| = 6$ weil $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 6 verschiedene Elemente hat.

Satz von Lagrange: Sei G eine endliche Gruppe. Ist U eine Untergruppe von G, dann ist $|U|$ ein Teiler von $|G|$.

Beispiele: $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ U = \{[0],[2],[4]\}$. Dann gilt $U \leq G$ und $|U| = 3$, wobei 3 Teiler von $6 = |G|$ ist.
$G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ U = \{[0],[4]\}$. Dann gilt $U \leq G$ und $|U| = 2$, wobei 2 Teiler von $8 = |G|$ ist.

Aufgabe 6.2 (*Arbeitsblatt 6.2, Aufgabe 2*)

a) Welche Ordnung haben die Symmetriegruppe $\mathcal{D}_6$ des Sechsecks und die Gruppe $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$?

b) Bilden die angegebenen Mengen Untergruppen der Symmetriegruppe des Sechsecks? Begründe Deine Antworten!

b$_1$) $U_1 := \{D_0, D_{180}\}$,

b$_2$) $U_2 := \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_3, S_5\}$,

b$_3$) $U_3 := \{D_0, D_{60}, D_{180}\}$.

c) Bilden die angegebenen Mengen Untergruppen der Gruppe $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$? Begründe Deine Antworten!

c$_1$) $U_4 := \{[0],[8]\}$,

c$_2$) $U_5 = \{[0],[7],[14]\}$,

c$_3$) $U_6 = \{[0],[3],[6],[9],[12],[15]\}$.

Hinweis: Der Satz von Lagrange kann teilweise eine schnelle Antwort liefern.

Lösung: **a)** $|\mathcal{D}_6| = 12$, $|\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}| = 16$.

b) **b$_1$)** U_1 ist Untergruppe. Man sieht an der Verknüpfungstafel Abgeschlossenheit, Neutrales Element und Existenz des inversen Elements.

$\circ$	D_0	D_{180}
D_0	D_0	D_{180}
D_{180}	D_{180}	D_0

b$_2$) U_2 ist nach dem Satz von Lagrange keine Untergruppe, da $|U_2| = 5$ kein Teiler von $|\mathcal{D}_6| = 12$ ist.

b$_3$) U_3 ist keine Untergruppe: Sie ist nicht abgeschlossen, da $D_{60} \circ D_{180} = D_{240} \notin U_5$. (Oder: U_5 enthält nicht das inverse Element zu D_{60}, das wäre D_{240}.

c) **c$_1$)** U_4 ist Untergruppe. Man sieht an der Verknüpfungstafel Abgeschlossenheit, Neutrales Element und Existenz des inversen Elements.

$\circ$	$[0]$	$[8]$
$[0]$	$[0]$	$[8]$
$[8]$	$[8]$	$[0]$

c$_2$) U_5 ist nach dem Satz von Lagrange keine Untergruppe, da $|U_5| = 3$ kein Teiler von $|\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}| = 16$ ist.

c$_3$) U_6 ist nach dem Satz von Lagrange keine Untergruppe, da $|U_6| = 6$ kein Teiler von $|\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}| = 16$ ist.

Anmerkung
Auf dem Arbeitsblatt steht den SuS die Verknüpfungstafel für die Sechsecksymmetrien zur Verfügung.

Aufgabe 6.3 (*Arbeitsblatt 6.2, Zusatzaufgabe 1*)

Gibt es Gruppen, die sicher keine nichttrivialen Untergruppen haben? Begründe Deine Antwort.

Lösung: Ist $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $|G|$ eine Primzahl, so hat $|G|$ nur die Teiler 1 und $|G|$. Nach dem Satz von Lagrange gibt es nur Untergruppen U mit $|U| = 1$ und $|U| = |G|$. Dies sind genau die trivialen Untergruppen $U = \{e\}$ und $U = G$.

Aufgabe 6.4 (*Arbeitsblatt 6.2, Zusatzaufgabe 2*)

a) Formuliere den Umkehrsatz zum Satz von Lagrange.

b) Wie könnte man den Umkehrsatz widerlegen?

Lösung:

a) Umkehrsatz: Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $U \subseteq G$. Ist $|U|$ ein Teiler von $|G|$, so ist U eine Untergruppe von G.

b) Z.B. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $U = \{[1]\}$. Dann ist U keine Untergruppe, da das neutrale Element nicht enthalten ist. Aber $|U| = 1$ ist Teiler von $2 = |G|$.

Tafelanschrieb

Folgerungen: Sei $U \subseteq G$.

1) Ist $|U|$ kein Teiler von $|G|$, dann ist U keine Untergruppe von G.

2) Ist $|G|$ eine Primzahl, so besitzt G nur die trivialen Untergruppen $U = \{e\}$ und $U = G$.

Mündlich: Wie kann man den Satz von Lagrange auf die Teilmenge der Monstergruppe anwenden?

OH-Folie Monstergruppe

Primzahlzerlegung:

$|M| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

$|U| = 7^5 \cdot 17^2 \cdot 23 \cdot 29$

$\Rightarrow$ $|U|$ ist kein Teiler von $|M|$

$\Rightarrow$ U ist keine Untergruppe von M.

6.4 Beweisidee

Dauer: 10 min
Ziel: Beweisidee kennenlernen
Material: Arbeitsblatt 6.3 und OH-Folie dazu

Anmerkung
Der Beweis des Satzes von Lagrange wird im nächsten Arbeitsblatt an einem speziellen Beispiel erläutert. Im allgemeinen Fall funktioniert der Beweis genauso: Man betrachtet die Nebenklassen $a \circ U$ zur Untergruppe $U \leq G$ und zeigt, dass diese entweder gleich oder disjunkt sind, und dass jede Nebenklasse genau gleich viele Elemente wie U enthält. Die Vereinigung aller Nebenklassen ergibt G und ist somit ein ganzzahliges Vielfaches von $|U|$.

Vorgehen: Die SuS bekommen die Aufgabe und füllen die Lücken aus, während L. das Arbeitsblatt im L-S-Gespräch auf der OH-Folie ausfüllt.

Aufgabe 6.5 (*OH-Folie/Arbeitsblatt 6.3*)

Betrachte die Gruppe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ mit der Addition von Restklassen als Verknüpfung und die Untergruppe $U = \big\{[0],[4],[8]\big\}$.

Zu zeigen ist: $|U| = 3$ ist ein Teiler von $|\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}|$.

Beweis: Bestimme

$$\begin{aligned}
[0]+U &= \{[0]+[0],[0]+[4],[0]+[8]\} \;=\; \{[0],[4],[8]\}\\
[1]+U &= \{[1],[5],[9]\}\\
[2]+U &= \{[2],[6],[10]\}\\
[3]+U &= \{[3],[7],[11]\}\\
[4]+U &= \{[4],[8],[0] \;=\; [0]+U\\
[5]+U &= [1]+U\\
[6]+U &= [2]+U\\
&\vdots\\
[11]+U &= [3]+U
\end{aligned}$$

Dies sind 4 verschiedene Mengen mit leerem Schnitt.
Alle diese Mengen haben $|U|$ Elemente.
Die Vereinigung dieser Mengen ergibt $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
$\Rightarrow\;\; 4 \cdot |U| = |\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}|$
$\Rightarrow\;\; |U|$ ist Teiler von $|\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}|$.

Mündlich: Genauso kann der Satz von Lagrange für beliebige Gruppen bewiesen werden.

6.5 Erzeugung von Untergruppen

Dauer: 30 min
Ziel: Die von einer Teilmenge erzeugte Untergruppe bestimmen können
Material: Arbeitsblatt 6.4

Mündlich: Wir wollen nun zu Teilmengen M von Gruppen die kleinste Untergruppe U finden, die M enthält.

Tafelanschrieb

9. Erzeugen von Untergruppen

Kochrezept:

Gegeben sei eine Gruppe $(G, \circ)$ und eine Teilmenge $M \subseteq G$

1) Man fügt das neutrale Element hinzu $\to M_{\text{N}}$
2) Man fügt für jedes Element von M_{N} das inverse Element dazu $\to M_{\text{NI}}$
3) Man prüft die Abgeschlossenheit und fügt solange fehlende Elemente hinzu, bis die Menge abgeschlossen ist $\to M_{\text{NIA}}$

Bsp. $G = \mathcal{D}_6$,
$M = \{D_{120}, S_1\}$

$M_{\text{N}} = \{D_0, D_{120}, S_1\}$

$M_{\text{NI}} = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_1\}$

$\circ$	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_{120}	D_{240}	D_0	S_2	S_3	S_1
D_{240}	D_0	D_{120}	S_3	S_1	S_2
S_1	S_3	S_2	D_0	D_{240}	D_{120}
S_2	S_1	S_3	D_{120}	D_0	D_{240}
S_3	S_2	S_1	D_{240}	D_{120}	D_0

$\Rightarrow$ $M_{\text{NIA}} = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_1, S_2, S_3\}$ ist abgeschlossen und enthält NE und alle IE.

Vorgehen: Die Einträge in die Verknüpfungstafel können der Tabelle entnommen werden, die auf dem Arbeitsblatt 2 ausgedruckt ist.

Mündlich: Genau genommen sind jetzt wieder neue Elemente hinzugekommen. Müssen wir dann nicht kontrollieren ob die inversen Elemente der neuen Elemente auch dabei sind? (Nein, da vorher die inversen Element dabei waren, sind auch die Verknüpfungen der inversen Elemente dabei. Diese sind die inversen Elemente der dazugenommenen Elemente.)

Tafelanschrieb

Definition: M_{NIA} heißt die von M erzeugte Untergruppe.

Mündlich: Manchmal kann die erzeugte Gruppe sehr groß sein: Beim Zauberwürfel (Rubik's Cube) erzeugen 6 Basisdrehungen die gesamte Gruppe, die ungefähr $4,3 \cdot 10^{19}$ Elemente besitzt.

Aufgabe 6.6 (*Arbeitsblatt 6.4, Aufgabe 3*)

Welche Untergruppe von $\mathcal{D}_6$ wird durch die Teilmenge M erzeugt? Gib jeweils die Ordnung der erzeugten Untergruppe M_{NIA} an. Überprüfe mit dem Satz von Lagrange, ob die gefundene Menge eine Untergruppe sein kann.

a) $M = \{D_{120}\}$, **b)** $M = \{D_{60}\}$, **c)** $M = \{S_1\}$,

d) $M = \{S_1, S_2\}$, **e)** $M = \{S_3, S_4\}$, **f)** $M = \{S_6, D_{300}\}$,

Lösung: **a)** $M_{\text{N}} = \{D_0, D_{120}\}$, $M_{\text{NI}} = \{D_0, D_{120}, D_{240}\}$, $M_{\text{NIA}} = M_{\text{NI}}$,
$|M_{\text{NIA}}| = 3$ ist Teiler von $|\mathcal{D}_6| = 12$. ✓

b) $M_{\text{N}} = \{D_0, D_{60}\}$, $M_{\text{NI}} = \{D_0, D_{60}, D_{300}\}$, $M_{\text{NIA}} = \{D_0, D_{60}, D_{120}, D_{180}, D_{240}, D_{300}\}$,
$|M_{\text{NIA}}| = 6$ ist Teiler von $|\mathcal{D}_6|$. ✓

c) Hier ist bereits $M_{\mathsf{N}} = \{D_0, S_1\}$ die von M erzeugte Untergruppe,
$|M_{\mathsf{NIA}}| = 2$ ist Teiler von $|\mathcal{D}_6|$. ✓

d) $M_{\mathsf{N}} = \{D_0, S_1, S_2\}$, $M_{\mathsf{NI}} = M_{\mathsf{N}}$, $M_{\mathsf{NIA}} = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_1, S_2, S_3\}$,
$|M_{\mathsf{NIA}}| = 6$ ist Teiler von $|\mathcal{D}_6|$. ✓

e) $M_{\mathsf{N}} = \{D_0, S_3, S_4\}$, $M_{\mathsf{NI}} = M_{\mathsf{N}}$, $M_{\mathsf{NIA}} = \{D_0, D_{180}, S_3, S_4\}$,
$|M_{\mathsf{NIA}}| = 4$ ist Teiler von $|\mathcal{D}_6|$. ✓

f) $M_{\mathsf{N}} = \{D_0, S_6, D_{300}\}$, $M_{\mathsf{NI}} = \{D_0, S_6, D_{300}, D_{60}\}$, $M_{\mathsf{NIA}} = \mathcal{D}_6$, d.h. M erzeugt die ganze Gruppe, $|M_{\mathsf{NIA}}| = 12$. Hier muss nichts überprüft werden..

Anmerkung
Für das Knobelblatt ist es günstig, dass in dieser Aufgabe Untergruppen der Ordnungen $2, 3, 4, 6$ (alle nichttrivialen Teiler von 12) erzeugt werden.

6.6 Ergänzung

Anmerkung
Für den Inhalt dieses Arbeitsblattes reichte die Zeit leider nicht mehr. Das Arbeitsblatt enthält keinen neuen Stoff, aber alles, was bisher behandelt wurde, wird verwendet.

Anmerkung
Am Anfang des Arbeitsblattes steht der folgende Text:
Sascha behauptet: Mit dem Satz von Lagrange kann ich doch auch folgendes sagen: „Wenn G eine endliche Gruppe und n ein Teiler von $|G|$ ist, dann gibt es eine Untergruppe U mit $|U| = n$.“
Die folgenden Aufgaben helfen Dir, herauszufinden, ob diese Aussage richtig ist.

Aufgabe 6.7 (*Knobelblatt, Zusatzaufgabe 3*)

a) Gib die Ordnung der Symmetriegruppe des Sechsecks $\mathcal{D}_6$ und ihre nichttrivialen Teiler an.

b) Untersuche, ob es zu jedem nichttrivialen Teiler n von $|\mathcal{D}_6|$ eine Untergruppe von $\mathcal{D}_6$ mit der Ordnung n gibt.

Hinweis: Du kannst die Ergebnisse von Aufgabe 4 verwenden.

c) Gib die Ordnung der Gruppe $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ und ihre nichttrivialen Teiler an.

d) Untersuche, ob es zu jedem nichttrivialen Teiler von $|\mathbb{Z}_{24}|$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_{24}$ mit der Ordnung n gibt.

Lösung: **a)** $|\mathcal{D}_6| = 12$, die nichttrivialen Teiler sind $n = 2, 3, 4, 6$.

b) $n = 2:$ $\{D_0, S_1\}$ ist Untergruppe der Ordnung 2,
$n = 3:$ $\{D_0, D_{120}, D_{240}\}$ ist Untergruppe der Ordnung 3,
$n = 4:$ $\{D_0, D_{180}, S_3, S_4\}$ ist Untergruppe der Ordnung 4,
$n = 6:$ $\{D_0, D_{60}, D_{120}, D_{180}, D_{240}, D_{300}\}$ ist Untergruppe der Ordnung 6.

Zu jedem nichttrivialen Teiler n gibt es eine Untergruppe mit der Ordnung n.

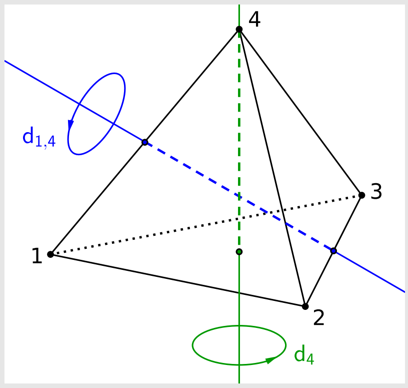
c) $|\mathbb{Z}_{24}| = 24$, die nichttrivialen Teiler sind $n = 2, 3, 4, 6, 12$.

d) $n = 2:$ $\{[0], [12]\}$ ist Untergruppe der Ordnung 2,
$n = 3:$ $\{[0], [8], [16]\}$ ist Untergruppe der Ordnung 3,
$n = 4:$ $\{[0], [6], [12], [18]\}$ ist Untergruppe der Ordnung 4,
$n = 6:$ $\{[0], [4], [8], [12], [16], [20]\}$ ist Untergruppe der Ordnung 6,
$n = 12:$ $\{[0], [3], [6], [9], [12], [15], [18], [21]\}$ ist Untergruppe der Ordnung 12,

Zu jedem nichttrivialen Teiler n gibt es eine Untergruppe mit der Ordnung n.

Aufgabe 6.8 (*Knobelblatt, Zusatzaufgabe 4*)

Die Symmetriegruppe des Tetraeders enthält nur Drehungen und wird mit $\mathcal{A}_4$ bezeichnet. Für die enthaltenen Abbildungen gelten folgende Bezeichnungen:



- e: Das neutrale Element (Drehung um 0°),
- $d_{1,4}$: Die $180°$-Drehung um die Gerade durch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{14}$ und $\overline{23}$,
- d_4: Die $120°$-Drehung um die Höhe durch den Eckpunkt 4,
- d_4^2: Die $240°$-Drehung um die Höhe durch den Eckpunkt 4 (also $d_4 \circ d_4$).

a) Die 12 Elemente von $\mathcal{A}_4$ sind (trage die fehlenden Zahlen ein):

b) Vervollständige die Verknüpfungstafel von $\mathcal{A}_4$:

Lösung: **a)**

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad d_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$d_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad d_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

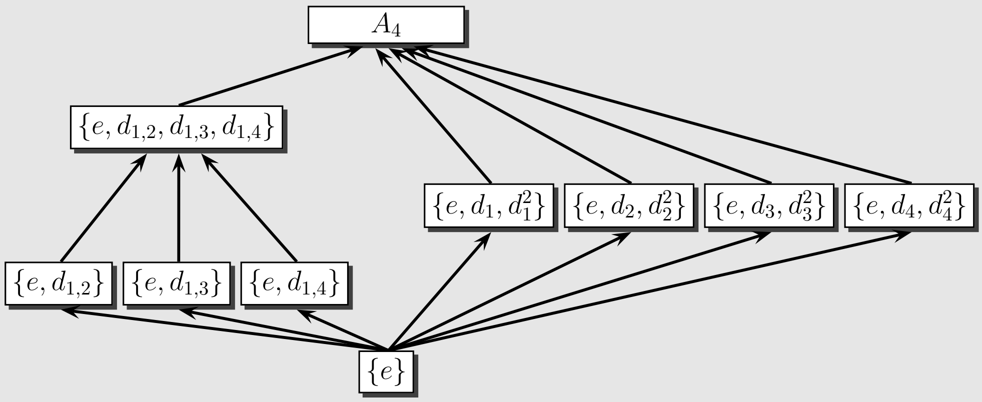
b)

$\circ$	e	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	d_1	d_1^2	d_2	d_2^2	d_3	d_3^2	d_4	d_4^2
e	e	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	d_1	d_1^2	d_2	d_2^2	d_3	d_3^2	d_4	d_4^2
$d_{1,2}$	$d_{1,2}$	e	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	d_4	d_3^2	d_3	d_4^2	d_2	d_1^2	d_1	d_2^2
$d_{1,3}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	e	$d_{1,2}$	d_2	d_4^2	d_1	d_3^2	d_4	d_2^2	d_3	d_1^2
$d_{1,4}$	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	e	d_3	d_2^2	d_4	d_1^2	d_1	d_4^2	d_2	d_3^2
d_1	d_1	d_3	d_4	d_2	d_1^2	e	d_3^2	$d_{1,3}$	d_4^2	$d_{1,4}$	d_2^2	$d_{1,2}$
d_1^2	d_1^2	d_4^2	d_2^2	d_3^2	e	d_1	$d_{1,4}$	d_4	$d_{1,2}$	d_2	$d_{1,3}$	d_3
d_2	d_2	d_4	d_3	d_1	d_4^2	$d_{1,3}$	d_2^2	e	d_1^2	$d_{1,2}$	d_3^2	$d_{1,4}$
d_2^2	d_2^2	d_3^2	d_1^2	d_4^2	$d_{1,4}$	d_3	e	d_2	$d_{1,3}$	d_4	$d_{1,2}$	d_1
d_3	d_3	d_1	d_2	d_4	d_2^2	$d_{1,4}$	d_4^2	$d_{1,2}$	d_3^2	e	d_1^2	$d_{1,3}$
d_3^2	d_3^2	d_2^2	d_4^2	d_1^2	$d_{1,2}$	d_4	$d_{1,3}$	d_1	e	d_3	$d_{1,4}$	d_2
d_4	d_4	d_2	d_1	d_3	d_3^2	$d_{1,2}$	d_1^2	$d_{1,4}$	d_2^2	$d_{1,3}$	d_4^2	e
d_4^2	d_4^2	d_1^2	d_3^2	d_2^2	$d_{1,3}$	d_2	$d_{1,2}$	d_3	$d_{1,4}$	d_1	e	d_4

Aufgabe 6.9 (*Knobelblatt, Zusatzaufgabe 5*)

a) Welche Ordnung hat $\mathcal{A}_4$? $|\mathcal{A}_4| =$ _____.

b) Das folgende Diagramm zeigt systematisch alle Untergruppen von $\mathcal{A}_4$4. Dabei bedeutet jeder Pfeil „ist Untergruppe von". Erkläre anhand des Diagramms, warum die Aussage von Sascha falsch ist.



Lösung: **a)** $|\mathcal{A}_4| = 12$.

b) Die Ordnung von $\mathcal{A}_4$ besitzt den Teiler $n = 6$, aber $\mathcal{A}_4$ besitzt keine Untergruppe mit der Ordnung 6.

7 Heftaufschrieb

Einheit 1

1. Gruppen

Wichtige Mengen:

$$\begin{array}{lcll} \mathbb{N} & = & \{1,2,3,\ldots\} & \text{Menge der natürlichen Zahlen} \\ \mathbb{Z} & = & \{\ldots,-1,0,1,2,\ldots\} & \text{Menge der ganzen Zahlen} \\ \mathbb{Q} & = & \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} & \text{Menge der rationalen Zahlen} \end{array}$$

Rechenregeln in $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{rcl|rcll} & \text{Addition} & & & \text{Multiplikation} & & \\ a+b & = & b+a & a\cdot b & = & b\cdot a & \text{KG Kommutativgesetz} \\ a+(b+c) & = & (a+b)+c & a\cdot(b\cdot c) & = & (a\cdot b)\cdot c & \text{AG Assoziativgesetz} \\ a+0 & = & a & a\cdot 1 & = & a & \text{NE Neutrales Element} \\ a+(-a) & = & 0 & a\cdot\frac{1}{a} & = & 1 \text{ falls } a\neq 0 & \text{IE Inverses Element} \end{array}$$

Definition: Eine Gruppe besteht aus einer Menge G und einer Rechenoperation $\circ$. Man schreibt $(G,\circ)$. Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a,b,c \in G$ erfüllt sein:

1) Abgeschlossenheit: $a \circ b \in G$ (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).

2) AG: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) NE: Es gibt ein NE $e \in G$, so dass $e \circ a = a \circ e = a$ für jedes $a \in G$.

4) IE: Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch KG: $a \circ b = b \circ a$, so heißt die Gruppe kommutative Gruppe.

Beispiele:

G	$\circ$	NE	IE	
$\mathbb{Z}$	$+$	0	$\overline{5} = -5$	kommutative Gruppe
$\mathbb{Z}$	$\cdot$	1		keine Gruppe, zu 4 gibt es kein IE in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	$+$	0	$\overline{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$	kommutative Gruppe
$\mathbb{Q}$	$\cdot$	1		keine Gruppe (0 hat kein IE)
$\underbrace{\mathbb{Q}\setminus\{0\}}$	$\cdot$	1	$\overline{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$	kommutative Gruppe

↑ Sprich: Q ohne Null
gemeint ist die Menge aller rationalen Zahlen ohne Null

Endliche Gruppe: Z.B. $G = \{a, b, c\}$
Definition der Verknüpfung durch Tabelle:

$\circ$	a	b	c
a	$a \circ a$	$a \circ b$	$a \circ c$
b	$b \circ a$	$b \circ b$	$b \circ c$
c	$c \circ a$	$c \circ b$	$c \circ c$

Beispiele:

1) $G = \{e, a\}$, e sei das neutrale Element
$\Rightarrow\ e \circ e = e,\ a \circ e = a = e \circ a.$
$a \circ a = ?$
Abgeschlossenheit $\Rightarrow\ a \circ a = a$ oder $a \circ a = e$
Falls $a \circ a = a\ \Rightarrow\ a$ hat kein inverses Element.
$\Rightarrow\ a \circ a = e$

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

Abgeschlossenheit: $e \circ e = e \in G,\ e \circ a = a \in G,\ a \circ e = a \in G,\ a \circ a = e \in G.$

AG: $e \circ (a \circ e) = e \circ a = a$ und $(e \circ a) \circ e = a \circ e = a.$
Genauso für alle anderen Möglichkeiten.

NE: e ist NE, denn $e \circ e = e,\ e \circ a = a \circ e = a.$

IE: $e^{-1} = e,\ a^{-1} = a.$

2) Die kleinste Gruppe: $G = \{e\}, \quad e \circ e = e.$

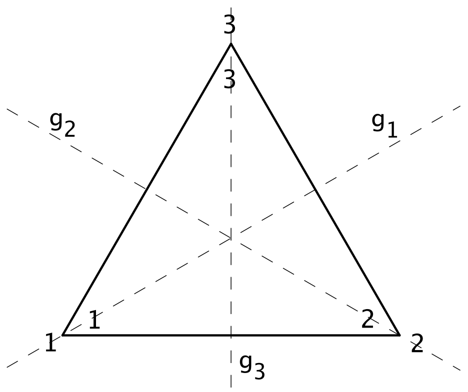
Hier wurde Arbeitsblatt 1.1 bearbeitet.

Einheit 2

2. Symmetrien

Definition: Eine ebene Symmetrie ist eine Spiegelung oder eine Drehung eines ebenen geometrischen Objekts, welche dieses Objekt mit sich selbst zur Deckung bringt.

Beispiel:

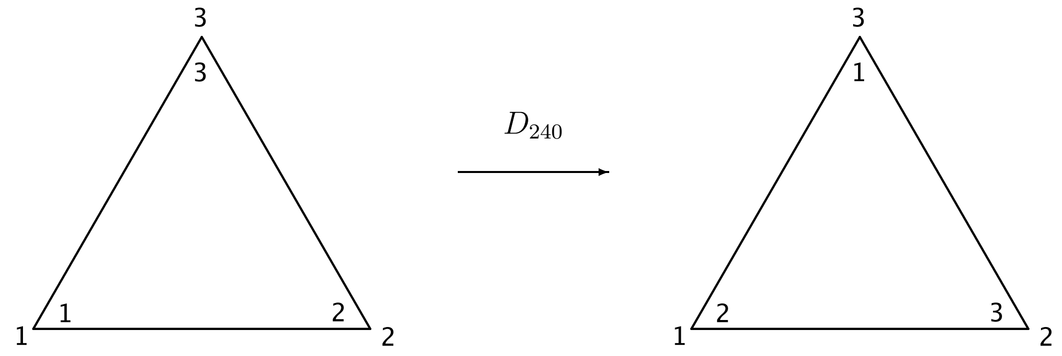


Symmetrien:
D_0: Drehung um $0°$ im Gegenuhrzeigersinn
D_{120}: Drehung um $120°$ im Gegenuhrzeigersinn
D_{240}: Drehung um $240°$ im Gegenuhrzeigersinn
S_1: Spiegelung an der Geraden g_1
S_2: Spiegelung an der Geraden g_2
S_3: Spiegelung an der Geraden g_3

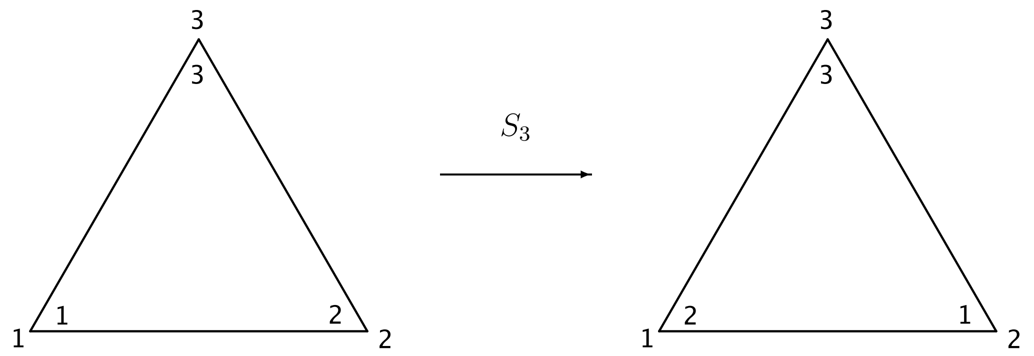
Hier wurde Arbeitsblatt 2.1 bearbeitet.

Graphisches Darstellen von Symmetrien:

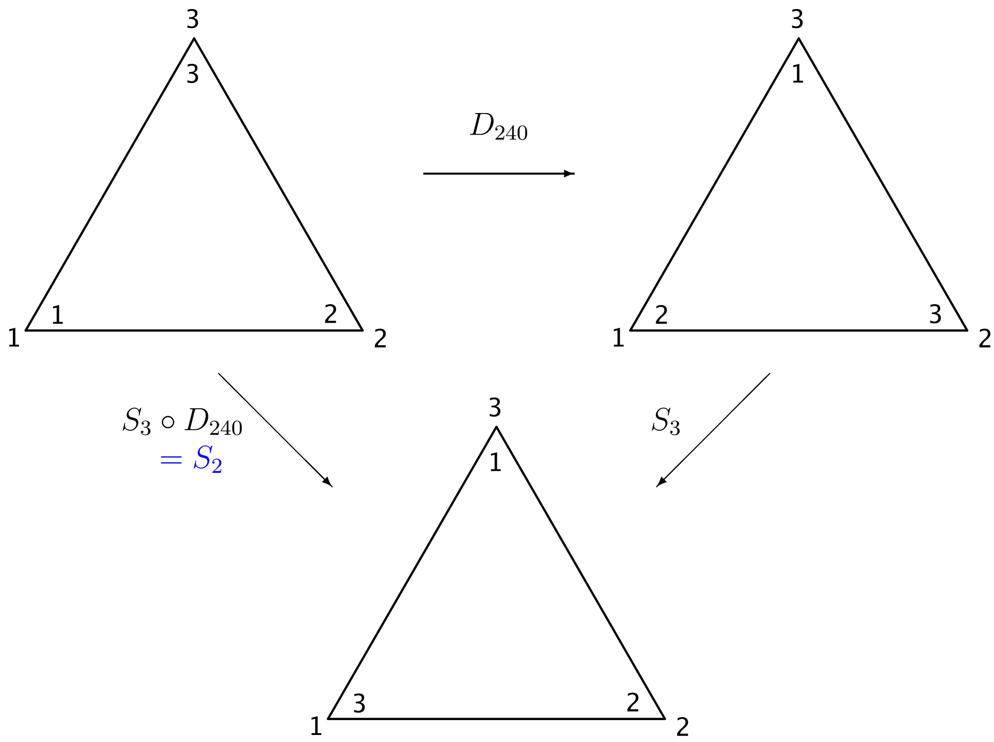
D_{240}:



S_3:



Hintereinanderausführung: Führt man nacheinander zwei Symmetrieabbildungen aus, z.B. zuerst D_{240} und danach S_3, so schreibt man $S_3 \circ D_{240}$. Achtung: Man liest von rechts nach links, die rechtsstehende Abbildung wird zuerst ausgeführt.



Hier wurde Arbeitsblatt 2.2 bearbeitet.

Abbildungstafeln: Man kann Symmetrieabbildungen auch durch Abbildungstafeln darstellen. Es reicht die Angabe, wohin die Ecken wandern:

$$D_{240} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad S_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hintereinanderausführung:

$$D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_3$$

Nun streicht man die mittlere Zeile und erhält

$$S_3 \circ D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_2$$

Hier wurden Arbeitsblatt 2.3 und 2.4 bearbeitet.

Einheit 3

Nach einer kurzen Wiederholung wurde Arbeitsblatt 3.1 bearbeitet.

Hier wurde Arbeitsblatt 3.2 mit Lückentext für Satz und Beweis (nächste Seite) bearbeitet.

3. Symmetriegruppe des Quadrats

Satz: Sei $G_{\text{Quadrat}} := \{D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ die Menge der Symmetrieabbildungen des Quadrats. Mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung bildet G_{Quadrat} eine Gruppe. Diese Gruppe ist nicht kommutativ.

Beweis: **1)** Gruppeneigenschaften

Eigenschaft	Beispiel	allgemein zu sehen an Verknüpfungstafel (VT)
Abgeschlossenheit	$S_2 \circ D_{90} = S_1$, $S_1 \in G_{\text{Quadrat}}$	In der VT kommen nur Gruppenelemente vor
Neutrales Element	D_0 ist NE	1. und 2. Zeile bzw. 1. und 2. Spalte stimmen überein
Inverses Element	$\overline{S_1} = S_1$, $\overline{D_{270}} = D_{90}$	NE kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vor
Assoziativgesetz	$D_{180} \circ (S_1 \circ D_{270}) =$ $= D_{180} \circ S_2 = S_4$ $(D_{180} \circ S_1) \circ D_{270} =$ $= S_3 \circ D_{270} = S_4$	Gilt bei Symmetrieabbildungen immer gleich

2) Das Kommutativgesetz gilt nicht:

$S_1 \circ D_{90} = S_4$
aber
$D_{90} \circ S_1 = S_2$.

Verknüpfungstafel für das Quadrat:

$\circ$	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_1	S_2	S_3	S_4
D_0	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_1	S_2	S_3	S_4
D_{90}	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0	S_2	S_3	S_4	S_1
D_{180}	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}	S_3	S_4	S_1	S_2
D_{270}	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}	S_4	S_1	S_2	S_3
S_1	S_1	S_4	S_3	S_2	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}
S_2	S_2	S_1	S_4	S_3	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}
S_3	S_3	S_2	S_1	S_4	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}
S_4	S_4	S_3	S_2	S_1	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0

Hier wurde Arbeitsblatt 3.3 bearbeitet.

4. Untergruppen

Definition: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Menge U mit folgenden Eigenschaften:

1) Jedes $u \in U$ ist auch Element von G, also $U \subseteq G$ (U ist Teilmenge von G).

2) $(U, \circ)$ ist eine Gruppe.

Man schreibt $U \leq G$, falls U eine Untergruppe von G ist.

Beispiele:

1) $G = G_{\text{Sechseck}}$= Symmetriegruppe des regulären Sechsecks, $U = G_{\text{Dreieck}}$ = Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks: $U \leq G$.

2) Jede Gruppe ist Untergruppe von sich selbst: $G \leq G$.

3) Für jede Gruppe G gilt $\{e\} \leq G$ ($e =$ neutrales Element in G).

Satz: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Teilmenge. Dann ist U genau dann eine Untergruppe, falls

1) Abgeschlossenheit: Für $u, v \in U$ gilt $u \circ v \in U$.

2) Neutrales Element: U enthält das neutrale Element $e \in G$.

3) Inverses Element: Für $u \in U$ gilt auch $u^{-1} \in U$.

Begründung: Das Assoziativgesetz gilt in G, also auch in U. Dann sind alle vier Eigenschaften einer Gruppe erfüllt.

Beispiel: $G = G_{\text{Sechseck}}$, $U = \{D_0, S_2\}$: $U \subseteq G$ und

1) Abgeschlossenheit: $\begin{array}{c|cc} \circ & D_0 & S_2 \\ \hline D_0 & D_0 & S_2 \\ S_2 & S_2 & D_0 \end{array} \Bigg\}$ Nur Elemente aus U

2) Neutrales Element: $D_0 \in U$.

3) Inverses Element: $D_0^{-1} = D_0 \in U$, $S_2^{-1} = S_2 \in U$.

Also: $U \leq G$.

Hier wurde Arbeitsblatt 3.4 bearbeitet.

Einheit 4

5. Kongruenz

Definition: Für ganze Zahlen a, b und $m \in \mathbb{N}$ sagt man a ist kongruent zu b modulo m:

$$a \equiv b \mod m,$$

falls $a - b$ durch m teilbar ist, d.h. $\dfrac{a-b}{m}$ ist eine ganze Zahl.

Beispiele:
$$2 \stackrel{?}{\equiv} 26 \mod 24: \quad \frac{2-26}{24} = -1, \quad \checkmark$$
$$5 \stackrel{?}{\equiv} -19 \mod 12: \quad \frac{5-(-19)}{12} = 2, \quad \checkmark$$
$$3 \stackrel{?}{\equiv} -3 \mod 12: \quad \frac{3-(-3)}{12} = \frac{1}{2}, \quad \text{Falsch!.}$$

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $a \equiv b \mod m$
(2) Es gibt eine ganze Zahl k, dass gilt: $a = b + k \cdot m$.
(3) Teilt man a und b durch m, so bleibt der selbe Rest.

Bedingung (2) an unseren Beispielen:

$$2 \stackrel{?}{\equiv} 26 \mod 24: \quad \frac{2-26}{24} = -1 \;\Leftrightarrow\; 2 - 26 = (-1)\cdot 24 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{2}_{a} = \underbrace{26}_{b} + \underbrace{(-1)}_{k} \cdot \underbrace{24}_{m}. \;\checkmark$$
$$5 \stackrel{?}{\equiv} -19 \mod 12: \quad \frac{5-(-19)}{12} = 2 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{5}_{a} = \underbrace{-19}_{b} + \underbrace{2}_{k} \cdot \underbrace{12}_{m}. \;\checkmark$$
$$3 \stackrel{?}{\equiv} -3 \mod 12: \quad \frac{3-(-3)}{12} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 3 = -3 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{k} \cdot 12 \;\lightning\; \text{(2) ist nicht erfüllt.}$$

Teilen mit Rest: Grundschule: $21 : 4 = 5R1$.
Als Gleichung: $21 = 5 \cdot 4 + \underbrace{1}_{\text{Rest}}$.

Definition: Gegeben sind ganze Zahlen a, m. Dann bedeutet $a : m = k$ Rest R, dass es Zahlen $k \in \mathbb{Z},\ R \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gibt, so dass

$$a \;=\; k \cdot m + R \text{ und } 0 \leq R \leq m - 1.$$

Die Zahl R heißt Rest: a geteilt durch m lässt den Rest R. Die Bedingung $0 \leq R \leq m-1$ garantiert, dass der Rest R eindeutig ist.

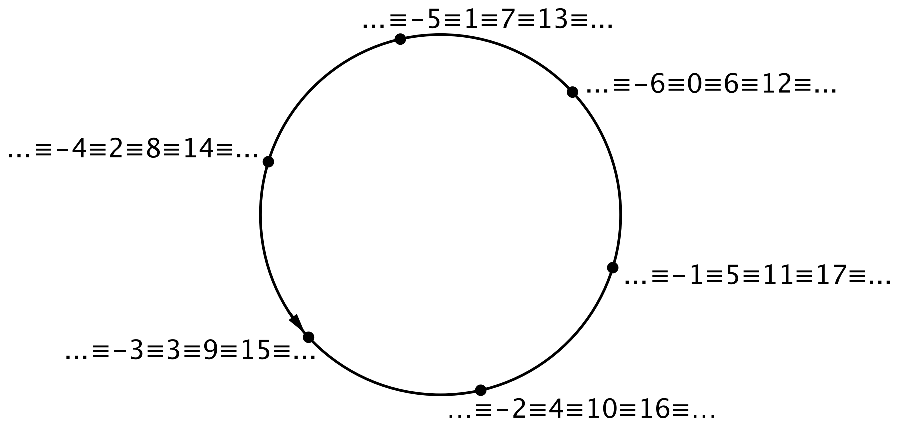
Bedingung (3) an Beispielen:

$2 = 0 \cdot 24 + 2,\ 26 = 1 \cdot 24 + 2$: Die Reste sind gleich,
$5 = 0 \cdot 12 + 5,\ -19 = (-2) \cdot 12 + 5$: Die Reste sind gleich,
$3 = 0 \cdot 12 + 3,\ -3 = (-1) \cdot 12 + 9$: Die Reste sind verschieden.

Hier wurde Arbeitsblatt 4.1 bearbeitet.

6. Restklassen

Die Uhr modulo 6: Schreibe alle Zahlen, die modulo 6 kongruent sind, in eine Kongruenzkette. Es gibt 6 solcher Ketten:



Definition: Als Restklasse $[a]$ von a bezeichnet man die Menge aller ganzen Zahlen, die kongruent zu a sind: $[a] = \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \mod m\}$ (Sprich: Die Menge alller b element Z, für die a kongruent b modulo m ist).

Es gilt also: $a \equiv b \mod m \;\Leftrightarrow\; [a] = [b]$.

Beispiel: Die Restklasse von 2 für Kongruenz modulo 5 ist: $[2] = \{... - 8, -3, 2, 7, 12, ...\}$. Alle Elemente von $[2]$ lassen beim Teilen durch 5 den Rest 2.

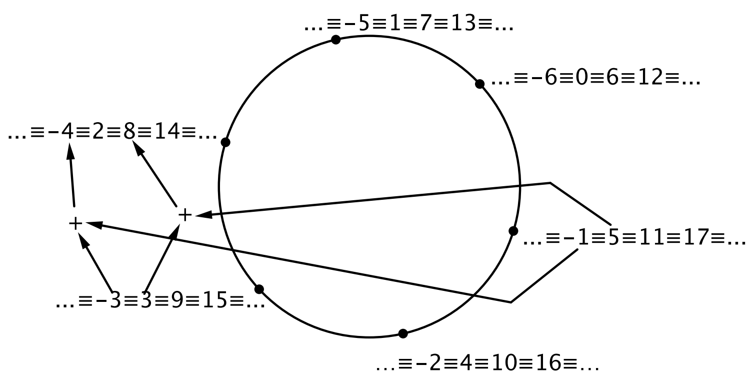
Hier wurde Arbeitsblatt 4.2 bearbeitet.

Definition:

1) Für die Menge der Restklassen modulo m schreiben wir $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \big\{[0], [1], ..., [m-1]\big\}$

2) Wir definieren auf der Menge der Restklassen eine Addition: $[a] + [b] \;:=\; [a+b]$.

Zur Addition von Restklassen:



Allgemein: $[a] = [c]$ und $[b] = [d] \;\Rightarrow\; [a+b] = [c+d]$.

Hier wurde Arbeitsblatt 4.3 bearbeitet.

Einheit 5

Zur Wiederholung wurde hier Arbeitsblatt 5.1 bearbeitet.

7. Restklassengruppen

Satz: Sei m eine natürliche Zahl. Dann ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ eine kommutative Gruppe.

Beweis: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq a, b, c \leq m-1$.

Abgeschlossenheit: Wir müssen zeigen, dass $[a] + [b]$ ein Element von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist.

Fall 1: $a + b \leq m - 1$: Dann gilt offensichtlich

$$[a] + [b] \;=\; [\underbrace{a+b}_{\text{zwischen } 0 \text{ und } m-1}] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Fall 2: $a + b \geq m$: Dann gilt $0 \leq a + b - m \leq (m-1) + (m-1) - m = m - 2$ und

$$[a] + [b] = [a+b] = [\underbrace{a+b-m}_{\text{zwischen } 0 \text{ und } m-1}] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

NE: Offenbar ist $[0]$ das NE, denn es gilt

$$[a] + [0] = [a+0] = [a] \text{ und } [0] + [a] = [0+a] = [a].$$

IE: Zu $[0]$ ist $[0]$ das IE. Für $1 \leq a \leq m-1$ ist das IE zu $[a]$ das Element $[m-a]$, denn es gilt $0 \leq m - a \leq m - 1$, also $[m-a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und

$$[a] + [m-a] = [a+m-a] = [m] = [0] \quad \text{und} \quad [m-a] + [a] = [m] = [0].$$

AG: Zu zeigen ist: $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$. Wir verwenden, dass für die Addition ganzer Zahlen das Assoziativitätsgesetz gilt:

$$\begin{aligned}\big([a] + [b]\big) + [c] &= [a+b] + [c] = [(a+b)+c] \\ &= [a+(b+c)] = [a] + [b+c] = [a] + \big([b] + [c]\big).\end{aligned}$$

KG: $[a] + [b] = [a+b] = [b+a] = [b] + [a].$ $\square$

Hier wurde Arbeitsblatt 5.2 bearbeitet.

Untergruppen von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$:

Triviale Untergruppen: $U = \{[0]\}$
$U = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$U = \{[0], [2]\}$ keine Untergruppe: $[2] + [2] = [4] \notin U$

$U = \{[0], [2], [4]\}$ $\Rightarrow U \leq G$:

+	[0]	[2]	[4]
[0]	[0]	[2]	[4]
[2]	[2]	[4]	[0]
[4]	[4]	[0]	[2]

$U = \{[0], [3]\}$ $\Rightarrow U \leq G$:

+	[0]	[3]
[0]	[0]	[3]
[3]	[3]	[0]

Hier wurde Arbeitsblatt 5.3 bearbeitet.

Einheit 6

Zur Wiederholung wurde hier Arbeitsblatt 6.1 bearbeitet.

8. Der Satz von Lagrange

Definition: Für eine Gruppe G mit endlich vielen Elementen heißt die Anzahl der Elemente von G die Gruppenordnung. Für die Gruppenordnung von G schreibt man $|G|$.

Beispiel: $|\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}| = 6$ weil $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 6 verschiedene Elemente hat.

Satz von Lagrange: Sei G eine endliche Gruppe. Ist U eine Untergruppe von G, dann ist $|U|$ ein Teiler von $|G|$.

Beispiele: $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ U = \{[0], [2], [4]\}$. Dann gilt $U \leq G$ und $|U| = 3$, wobei 3 Teiler von $6 = |G|$ ist.
$G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ U = \{[0], [4]\}$. Dann gilt $U \leq G$ und $|U| = 2$, wobei 2 Teiler von $8 = |G|$ ist.

Hier wurde Arbeitsblatt 6.2 bearbeitet.

Folgerungen: Sei $U \subseteq G$.

1) Ist $|U|$ kein Teiler von $|G|$, dann ist U keine Untergruppe von G.

2) Ist $|G|$ eine Primzahl, so besitzt G nur die trivialen Untergruppen $U = \{e\}$ und $U = G$.

Zur Illustration der Beweisidee wurde hier Arbeitsblatt 6.3 bearbeitet.

9. Erzeugen von Untergruppen

Kochrezept:

Gegeben sei eine Gruppe $(G, \circ)$ und eine Teilmenge $M \subseteq G$

Bsp. $G = \mathcal{D}_6$, $M = \{D_{120}, S_1\}$

1) Man fügt das neutrale Element hinzu $\to M_{\mathsf{N}}$

$M_{\mathsf{N}} = \{D_0, D_{120}, S_1\}$

2) Man fügt für jedes Element von M_{N} das inverse Element dazu $\to M_{\mathsf{NI}}$

$M_{\mathsf{NI}} = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_1\}$

3) Man prüft die Abgeschlossenheit und fügt solange fehlende Elemente hinzu, bis die Menge abgeschlossen ist $\to M_{\mathsf{NIA}}$

$\circ$	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_{120}	D_{240}	D_0	S_2	S_3	S_1
D_{240}	D_0	D_{120}	S_3	S_1	S_2
S_1	S_3	S_2	D_0	D_{240}	D_{120}
S_2	S_1	S_3	D_{120}	D_0	D_{240}
S_3	S_2	S_1	D_{240}	D_{120}	D_0

$\Rightarrow\ M_{\mathsf{NIA}} = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_1, S_2, S_3\}$ ist abgeschlossen und enthält NE und alle IE.

Definition: M_{NIA} heißt die von M erzeugte Untergruppe.

Hier wurde Arbeitsblatt 6.4 bearbeitet.

8 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 1: Gruppen

8.1 Stundenverlauf

Zeit	Unterrichtsschritte bzw. Unterrichtsarrangement	Sozialform L-S-Tätigkeit Methode	Was ich brauche
17:00	Begrüßung, Vorstellung		
17:05	Wichtige Mengen, Rechenregeln in $\mathbb{Q}$	Fragend entwickelnd	
17:15	Definition einer Gruppe.	Tafelvortrag	
	Anwendung auf $+, \cdot$ in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$	Fragend-entwickelnd	
17:30	Zwei Beispiele für endliche Gruppen	Tafelvortrag, L-S-Gespräch	
17:45	Aufgabe 1 wird gemeinsam gelöst	L-S-Gespräch	Arbeitsblatt 1.1, OH-Folie zu Aufgabe 1
17:50	Übungsphase	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 1.1
18:15	Besprechung der Aufgaben	L-S-Gespräch	OH-Folien zu den Aufgaben
18.30	Verabschiedung		

8.2 Tafelanschriebe

1. Gruppen

Wichtige Mengen:

$\mathbb{N}$	$=$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	$=$	$\{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	$=$	$\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$	Menge der rationalen Zahlen

Rechenregeln in $\mathbb{Q}$:

Addition	Multiplikation	
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	KG Kommutativgesetz
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	AG Assoziativgesetz
$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	NE Neutrales Element
$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ falls $a \neq 0$	IE Inverses Element

Definition: Eine Gruppe besteht aus einer Menge G und einer Rechenoperation $\circ$. Man schreibt $(G, \circ)$. Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a, b, c \in G$ erfüllt sein:

1) Abgeschlossenheit: $a \circ b \in G$ (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).

2) AG: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) NE: Es gibt ein NE $e \in G$, so dass $e \circ a = a \circ e = a$ für jedes $a \in G$.

4) IE: Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch KG: $a \circ b = b \circ a$, so heißt die Gruppe kommutative Gruppe.

Beispiele:

G	$\circ$	NE	IE	
$\mathbb{Z}$	$+$	0	$\overline{5} = -5$	kommutative Gruppe
$\mathbb{Z}$	$\cdot$	1		keine Gruppe, zu 4 gibt es kein IE in $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	$+$	0	$\overline{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$	kommutative Gruppe
$\mathbb{Q}$	$\cdot$	1		keine Gruppe (0 hat kein IE)
$\underbrace{\mathbb{Q} \setminus \{0\}}$	$\cdot$	1	$\overline{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$	kommutative Gruppe

↑ Sprich: Q ohne Null
gemeint ist die Menge aller rationalen Zahlen ohne Null

Endliche Gruppe: Z.B. $G = \{a, b, c\}$
Definition der Verknüpfung durch Tabelle:

$\circ$	a	b	c
a	$a \circ a$	$a \circ b$	$a \circ c$
b	$b \circ a$	$b \circ b$	$b \circ c$
c	$c \circ a$	$c \circ b$	$c \circ c$

Beispiele:

1) $G = \{e, a\}$, e sei das neutrale Element
$\Rightarrow \; e \circ e = e, \; a \circ e = a = e \circ a.$
$a \circ a = ?$
Abgeschlossenheit $\Rightarrow \; a \circ a = a$ oder $a \circ a = e$
Falls $a \circ a = a \;\Rightarrow\; a$ hat kein inverses Element.
$\Rightarrow \; a \circ a = e$

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

Abgeschlossenheit: $e \circ e = e \in G, \; e \circ a = a \in G, \; a \circ e = a \in G, \; a \circ a = e \in G.$

AG: $e \circ (a \circ e) = e \circ a = a$ und $(e \circ a) \circ e = a \circ e = a.$
Genauso für alle anderen Möglichkeiten.

NE: e ist NE, denn $e \circ e = e, \; e \circ a = a \circ e = a.$

IE: $e^{-1} = e, \; a^{-1} = a.$

2) Die kleinste Gruppe: $G = \{e\}, \quad e \circ e = e.$

8.3 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

a)
$$\begin{array}{c|ccc} \circ & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & b & e \\ b & b & e & a \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c|ccc} \circ & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & b & e \\ b & b & e & a \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{c|ccc} \circ & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & b & e \\ b & b & e & a \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{c|ccc} \circ & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & b & e \\ b & b & e & a \end{array}$$

a$_1$)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	b	a	e
b	a	e	b

a$_2$)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	c

a$_3$)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	a	e

b)

$\circ$	f	g	h
f	h	f	g
g	f	g	h
h	g	h	f

a)

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
D_0	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{60}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{120}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{180}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{240}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{300}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$

d)

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}
D_0	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{120}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$
D_{240}	$D_{\square}$	$D_{\square}$	$D_{\square}$

Gruppeneigenschaften und Verknüpfungstafeln

Aufgabe 1

Gegeben ist die Gruppe $(G, \circ)$, definiert durch

$G = \{e, a, b\}$,

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Wie sieht man an der Tabelle (ohne Rechnen)

a) die Abgeschlossenheit?

b) das neutrale Element?

c) die Existenz des inversen Elements?

d) das Kommutativgesetz?

Aufgabe 2

a) Es sei $G = \{e, a, b\}$. Vergleiche jeweils die angegebene Verknüpfungstafel mit der aus Aufgabe 1. Finde jeweils einen Widerspruch zu einer der Gruppeneigenschaften Abgeschlossenheit, NE, IE.

a₁)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	b	a	e
b	a	e	b

a₂)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	c

a₃)

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	a	e

b) Für $G = \{f, g, h\}$ sei die Verknüpfung durch die rechts stehende Tabelle definiert. Stelle fest, welches das neutrale Element ist. Wie hängt die Verknüpfungstafel mit Aufgabe 1 zusammen?

$\circ$	f	g	h
f	h	f	g
g	f	g	h
h	g	h	f

Aufgabe 3

Ist

a) $(\mathbb{N}, +)$,

b) $(\mathbb{N}, \cdot)$,

c) $(G, +)$ mit $G := \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ (Menge der geraden Zahlen)

eine Gruppe? Begründe Deine Antworten.

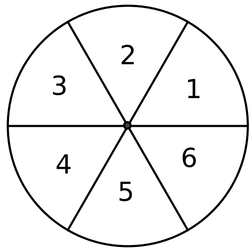
Aufgabe 4

Kannst Du weitere Gruppen mit unendlich vielen Elementen angeben?

Zusatzblatt Drehgruppen

Zusatzaufgabe 1

Ein Rad ist mit den Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ beschriftet (siehe Skizze). Dreht man das Rad wiederholt um $60°$, so gibt es 6 verschiedene Stellungen.
Dreht man das Rad um $60°$ im Gegenuhrzeigersinn, und dann nochmal um $180°$ im Gegenuhrzeigersinn, so ergibt das eine Drehung um $240°$. Man sagt: Die Hintereinanderausführung der Drehungen um $60°$ und $180°$ ergibt eine Drehung um $240°$ und schreibt



$$D_{180} \circ D_{60} = D_{240}.$$

Nach einer Drehung um $360°$ ist das Rad wieder in seiner Anfangsstellung. Man kann nicht unterscheiden, ob D_0 oder D_{360} ausgeführt wurde. Wir schreiben z.B. $D_{300} \circ D_{120} = D_{60}$. Daher können wir uns nun auf die Menge der sechs Drehungen $G = \{D_0, D_{60}, D_{120}, D_{180}, D_{240}, D_{300}\}$ beschränken.

Für die Verknüpfung „Hintereinanderausführung" ist das AG sehr einfach zu beweisen: Sind α, β, γ drei Drehwinkel, so gilt für die zugehörigen Drehungen

$$D_\alpha \circ (D_\beta \circ D_\gamma) = D_\alpha \circ D_{\beta+\gamma} = D_{\alpha+\beta+\gamma} = D_{\alpha+\beta} \circ D_\gamma = (D_\alpha \circ D_\beta) \circ D_\gamma.$$

Damit ist das AG bewiesen (eventuell muss man $360°$ oder $720°$ von $\alpha + \beta + \gamma$ abziehen).

a) Fülle die Verknüpfungstafel aus:

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}
D_0	D	D	D	D	D	D
D_{60}	D	D	D	D	D	D
D_{120}	D	D	D	D	D	D
D_{180}	D	D	D	D	D	D
D_{240}	D	D	D	D	D	D
D_{300}	D	D	D	D	D	D

b) Welche Gruppeneigenschaften sind erfüllt?

c) Ergänze den Satz: $(G, \circ)$ ist eine ...

d) Zusatzaufgabe: Stelle die entsprechende Verknüpfungstafel für $G = \{D_0, D_{120}, D_{240}\}$ auf und vergleiche mit Aufgabe 1.

Zusatzaufgabe 2

Gegeben ist die Verknüpfungstafel der Gruppe $G = \{e, a, b, c\}$

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

a) Warum ist die Gruppe kommutativ?

b) Denke Dir eine weitere Verknüpfungstafel für G aus. Ist sie kommutativ?

Hinweis: Wir werden später sehen, dass bei einer Gruppe in der Verknüpfungstafel jedes Element in jeder Spalte und in jeder Zeile genau ein Mal vorkommmen muss.

9 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 2: Symmetrien

9.1 Stundenverlauf

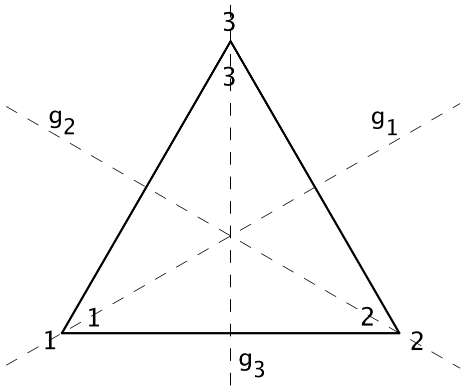
Zeit	Unterrichtsschritte bzw. Unterrichtsarrangement	Sozialform L-S-Tätigkeit Methode	Was ich brauche
17:00	Begrüßung und Vorstellung		
17:05	Definition einer Symmetrie, am Beipiel des gleichseitigen Dreiecks, graphisches Darstellen	Fragend entwickelnd	Pappdreiecke, Arbeitsblatt 2.1
17:30	Hintereinanderausführung	Tafelvortrag, Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 2.2, OH-Folie zu AB2.2
17:55	Abbildungstafeln, Anwendung bei Hintereinanderausführung	Tafelvortrag	
18:05	Übungsphase	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 2.3, Arbeitsblatt 2.4
18:25	Besprechung der Ergebnisse an Verknüpfungstafel, eventuell Verknüpfung der Drehungen eintragen	L-S-Gespräch	OH-Folie zu AB2.4
18.30	Verabschiedung		

9.2 Tafelanschriebe

2. Symmetrien

Definition: Eine ebene Symmetrie ist eine Spiegelung oder eine Drehung eines ebenen geometrischen Objekts, welche dieses Objekt mit sich selbst zur Deckung bringt.

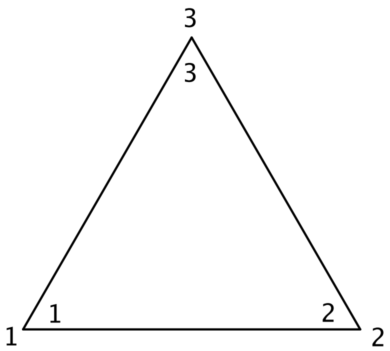
Beispiel:



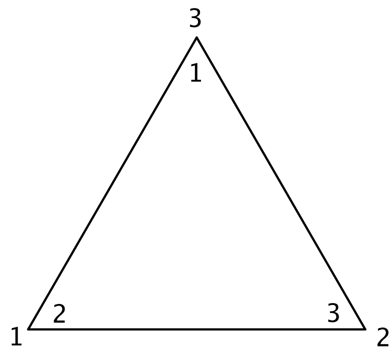
Symmetrien:
D_0: Drehung um $0°$ im Gegenuhrzeigersinn
D_{120}: Drehung um $120°$ im Gegenuhrzeigersinn
D_{240}: Drehung um $240°$ im Gegenuhrzeigersinn
S_1: Spiegelung an der Geraden g_1
S_2: Spiegelung an der Geraden g_2
S_3: Spiegelung an der Geraden g_3

Graphisches Darstellen von Symmetrien:

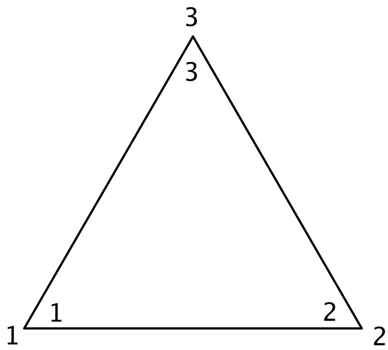
D_{240}:



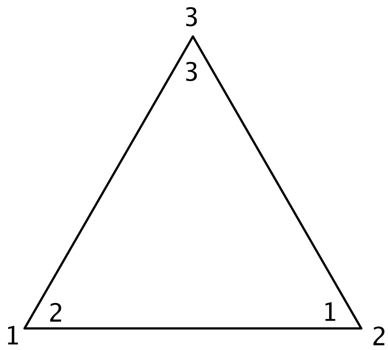
$\xrightarrow{D_{240}}$



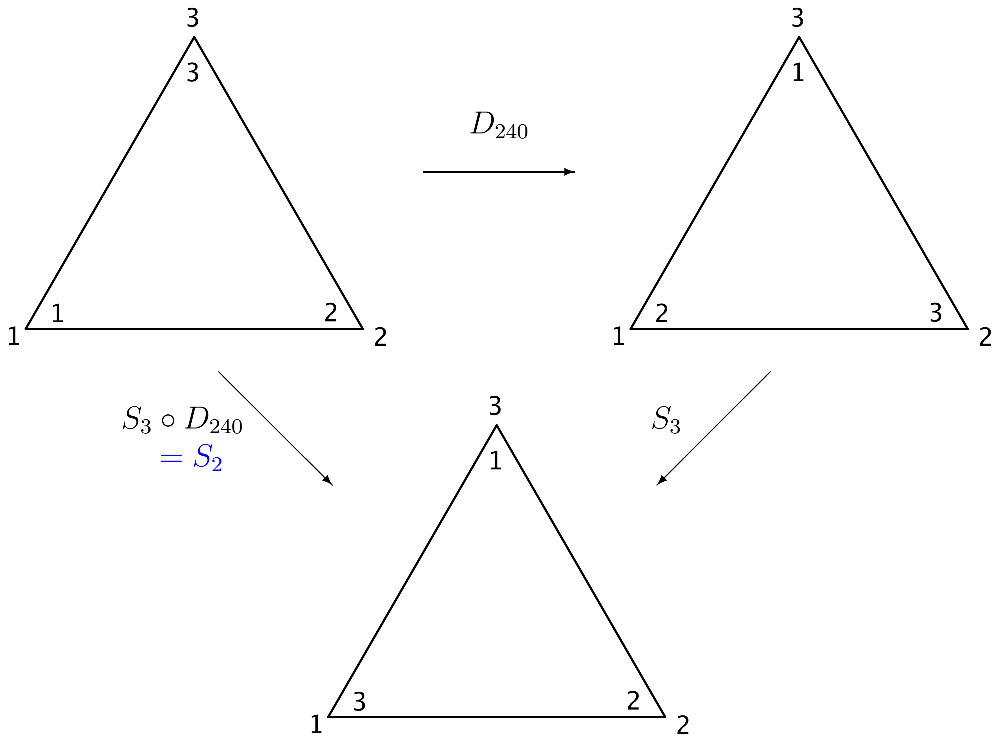
S_3:



$\xrightarrow{S_3}$



Hintereinanderausführung: Führt man nacheinander zwei Symmetrieabbildungen aus, z.B. zuerst D_{240} und danach S_3, so schreibt man $S_3 \circ D_{240}$. Achtung: Man liest von rechts nach links, die rechtsstehende Abbildung wird zuerst ausgeführt.



Abbildungstafeln: Man kann Symmetrieabbildungen auch durch Abbildungstafeln darstellen. Es reicht die Angabe, wohin die Ecken wandern:

$$D_{240} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hintereinanderausführung:

$$D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_3$$

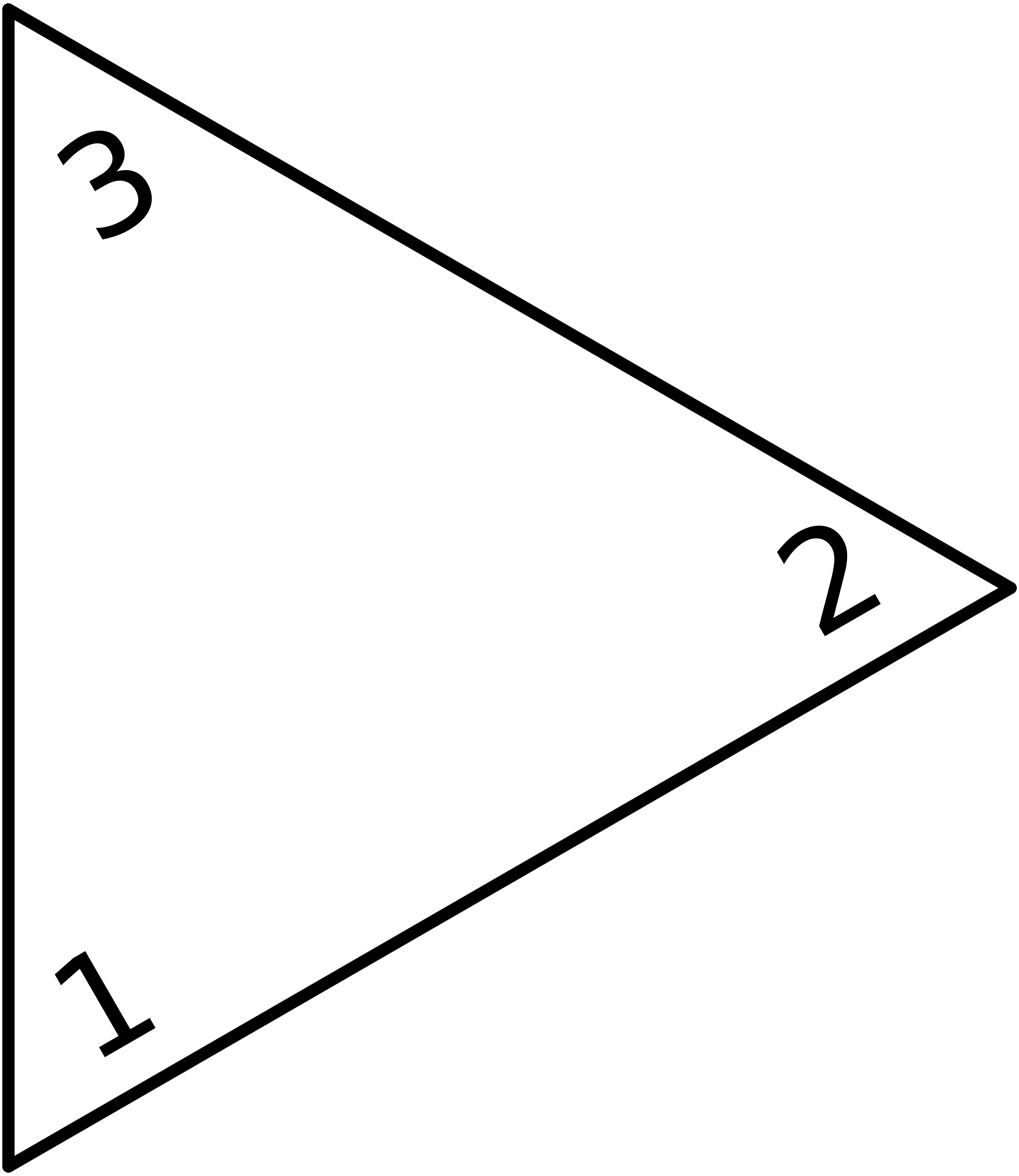
Nun streicht man die mittlere Zeile und erhält

$$S_3 \circ D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_2$$

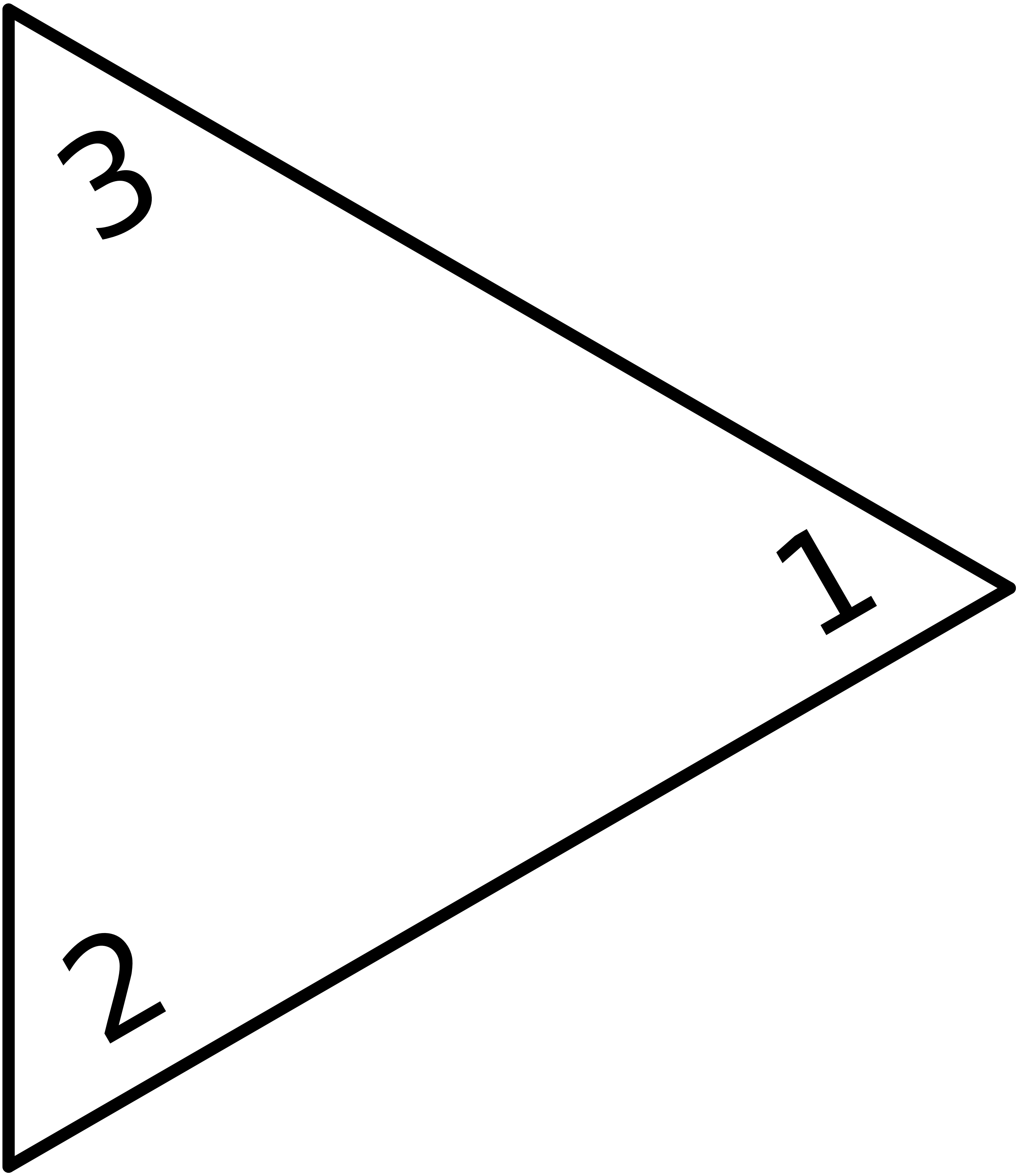
9.3 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

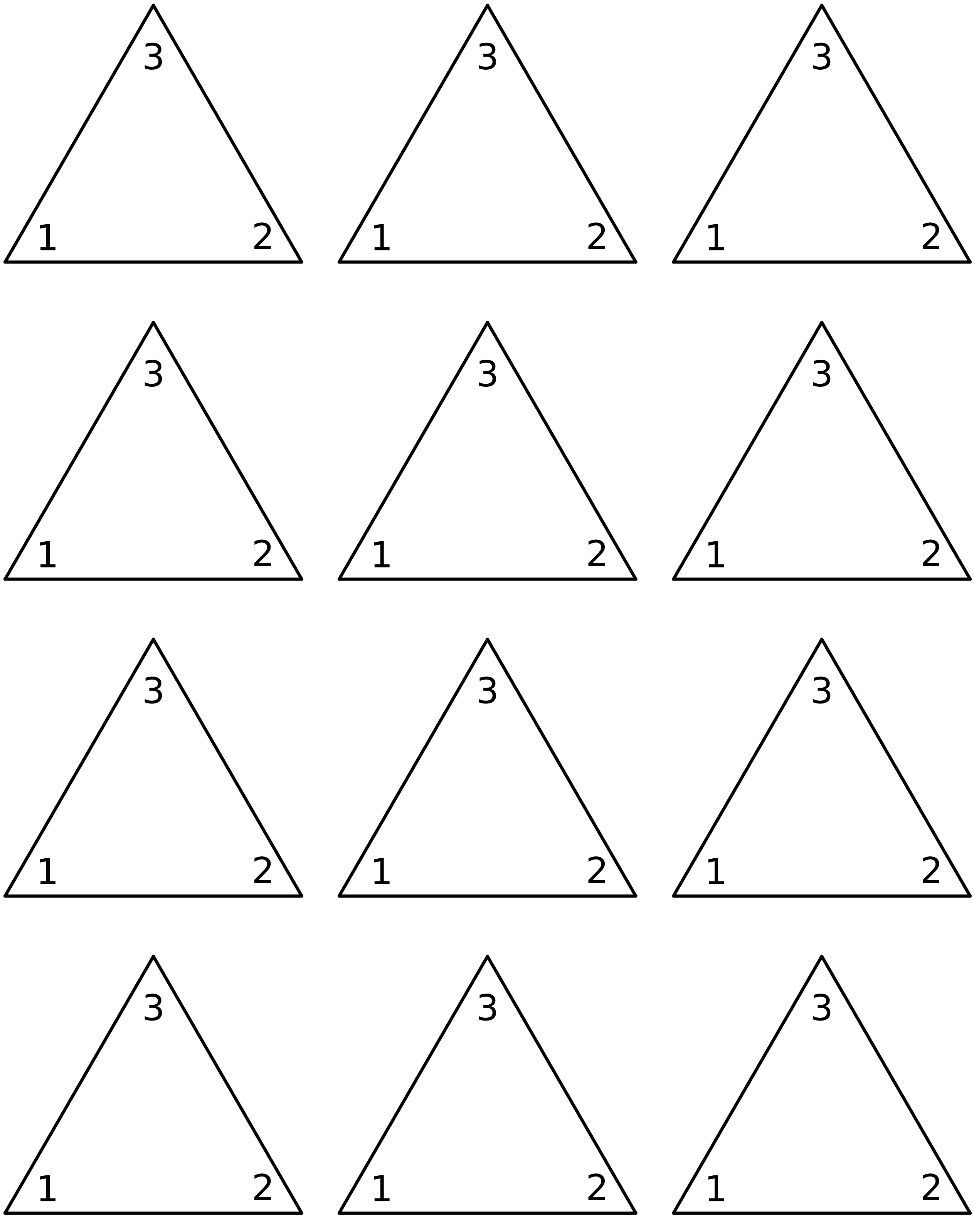
Dreieck zur Tafelpräsentation: Vorderseite



Dreieck zur Tafelpräsentation: Rückseite



Dreiecke zu AB 2 auschneiden



$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_0						
D_{120}						
D_{240}						
S_1						
S_2						
S_3						

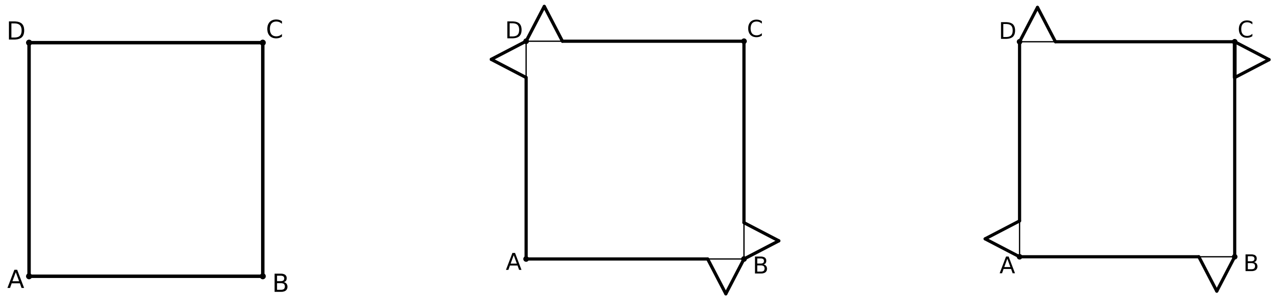
Verknüpfungstafel für das regelmäßige Sechseck:

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_0												
D_{60}												
D_{120}												
D_{180}												
D_{240}												
D_{300}												
S_1												
S_2												
S_3												
S_4												
S_5												
S_6												

Symmetrien am Quadrat

Aufgabe 1

Welche Symmetrien besitzt das Quadrat? Welche Symmetrien besitzen die beiden anderen Figuren, bei denen zum Quadrat jeweils vier gleiche Dreiecke hinzugefügt wurden?



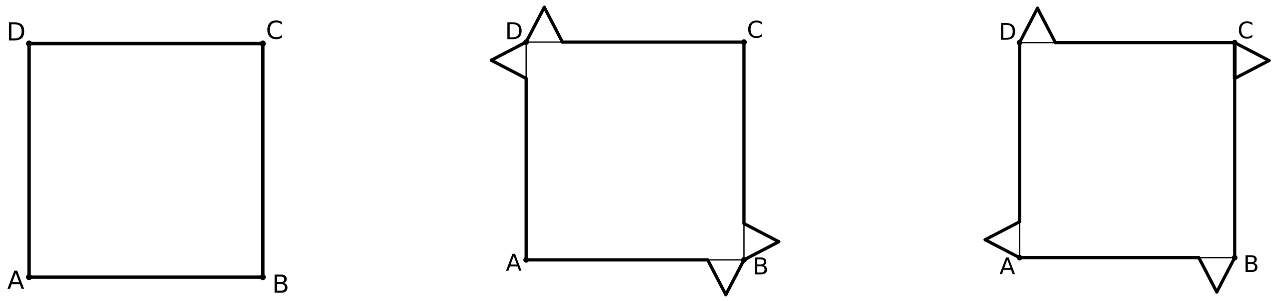
Hinweis: Zeichne als erstes die Symmetrieachsen im Quadrat ein und bezeichne sie geeignet.

Symmetrien und Gruppen Arbeitsblatt 2.1

Symmetrien am Quadrat

Aufgabe 1

Welche Symmetrien besitzt das Quadrat? Welche Symmetrien besitzen die beiden anderen Figuren, bei denen zum Quadrat jeweils vier gleiche Dreiecke hinzugefügt wurden?



Hinweis: Zeichne als erstes die Symmetrieachsen im Quadrat ein und bezeichne sie geeignet.

Schülerzirkel Mathematik: `www.f08.uni-stuttgart.de/schulen/schuelerzirkel-mathematik/`

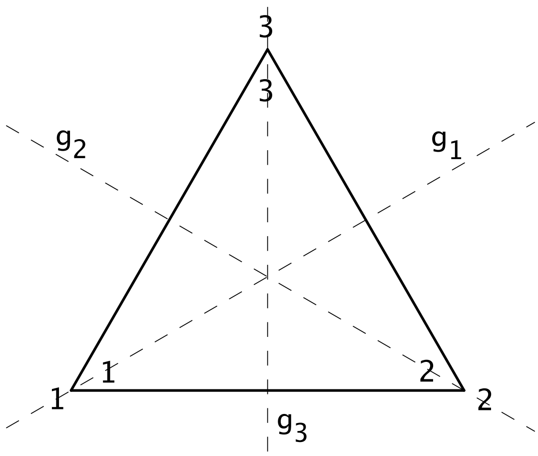
Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks

Aufgabe 2

Fülle die Verknüpfungstafel für die Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks aus. Zuerst wird die Symmetrie in der ersten **Zeile** ausgeführt, danach die Symmetrie in der ersten **Spalte**.

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_0						
D_{120}						
D_{240}						
S_1						
S_2						
S_3						

In der nebenstehenden Graphik kannst Du die Abbildungen durch Drauflegen eines Papierdreiecks veranschaulichen



Zusatzaufgabe 1

a) Finde geometrische Figuren, die nur die drei Drehsymmetrien und keine Spiegelsymmetrien besitzen.

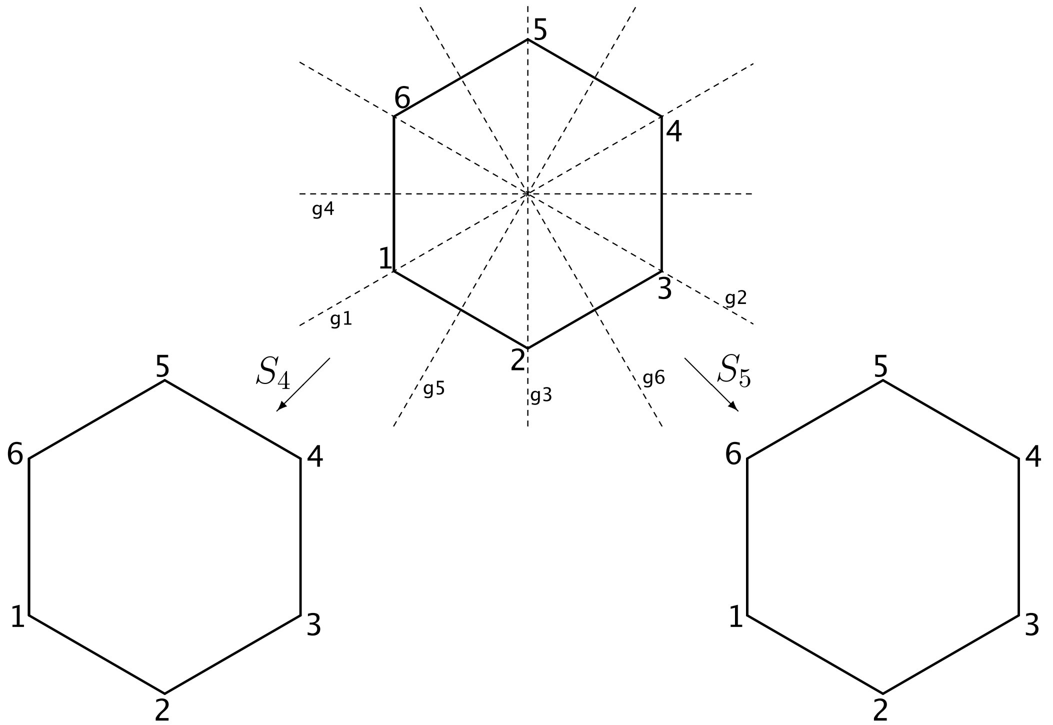
b) Begründe, warum es keine Figuren gibt, die nur die Spiegelsymmetrien $S_1,\ S_2,\ S_3$ besitzen und keine Drehsymmetrien (außer D_0, denn jede Figur besitzt die Symmetrie D_0).

Symmetrien des regelmäßigen Sechsecks

Aufgabe 3

a) Erstelle die Abbildungstafeln für S_4 und S_5 am regulären Sechseck.

Hinweis: Trage zunächst in die untenstehende Graphik ein, auf welcher Position die Ecken nach Ausführung der Abbildung sind.

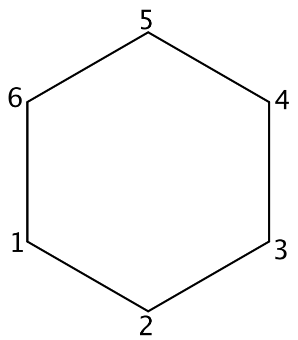


$$S_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix} \qquad S_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

b) Stelle die Hintereinanderausführung $S_5 \circ S_4$ (d.h. zuerst S_4, dann S_5) mithilfe der Abbildungstafeln aus Teil a) dar.

$$S_5 \circ S_4 : \qquad \begin{array}{l} S_4 \left\{ \right. \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \left. \right\} S_5 \end{array}$$

c) Trage mithilfe der Abbildungstafel aus b) die Position der Ecken nach Ausführung von $S_5 \circ S_4$ ein (in der Vorlage unten). Überlege anhand des Bildes, welche Symmetrie durch $S_5 \circ S_4$ entsteht.

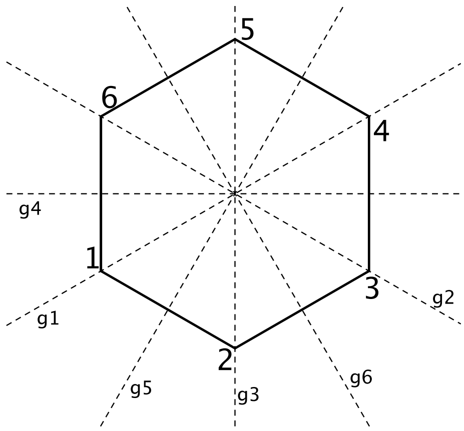


$$\Rightarrow \; S_5 \circ S_4 =$$

Hintereinanderausführung mit Abbildungstafeln

Aufgabe 4

Bestimme mit Hilfe der untenstehenden Abbildungstafeln für die Sechsecksymmetrien die Hintereinanderausführungen:



a) $S_1 \circ D_{60}$, **b)** $S_2 \circ D_{60}$,

c) $S_3 \circ D_{60}$, **d)** $S_4 \circ D_{60}$,

e) $S_5 \circ D_{60}$, **f)** $S_6 \circ D_{60}$.

Hinweis: S_j bezeichnet die Spiegelung an g_j.

Abbildungstafeln der Symmetrien des regelmäßigen Sechsecks:

$$D_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D_{60} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{120} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D_{180} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D_{240} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D_{300} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad S_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$S_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad S_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad S_6 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Verknüpfungstafel für die Symmetrien des regelmäßigen Sechsecks:

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_0												
D_{60}												
D_{120}												
D_{180}												
D_{240}												
D_{300}												
S_1												
S_2												
S_3												
S_4												
S_5												
S_6												

10 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 3: Untergruppen

10.1 Stundenverlauf

Zeit	Unterrichtsschritte bzw. Unterrichtsarrangement	Sozialform L-S-Tätigkeit Methode	Was ich brauche
17:00	Wiederholung	L-S-Gespräch	OH-Folien
17:10	Wiederholungsblatt	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 3.1 OH-Folie Symmetriegruppe des Quadrats
17:20	Symmetriegruppe des Quadrats	Tafelvortrag/ Lückentext/ L-S-Gespräch	OH-Folie Symmetriegruppe des Quadrats, Arbeitsblatt 3.2
17:35	Einführende Aufgabe zu Untergruppe	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 3.3, OH-Folie zu AB 3.3
17:45	Untergruppen	Tafelvortrag	
18:05	Übungen	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 3.4
18:20	Besprechung der Lösungen	S-Vortrag	
18.30	Verabschiedung		

10.2 Tafelanschriebe

3. Symmetriegruppe des Quadrats

Satz: Sei $G_{\text{Quadrat}} := \{D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ die Menge der Symmetrieabbildungen des Quadrats. Mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung bildet G_{Quadrat} eine Gruppe. Diese Gruppe ist nicht kommutativ.

Beweis: **1)** Gruppeneigenschaften

Eigenschaft	Beispiel	allgemein zu sehen an Verknüpfungstafel (VT)
Abgeschlossenheit	$S_2 \circ D_{90} = S_1$, $S_1 \in G_{\text{Quadrat}}$	In der VT kommen nur Gruppenelemente vor
Neutrales Element	D_0 ist NE	1. und 2. Zeile bzw. 1. und 2. Spalte stimmen überein
Inverses Element	$\overline{S_1} = S_1$, $\overline{D_{270}} = D_{90}$	NE kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vor
Assoziativgesetz	$D_{180} \circ (S_1 \circ D_{270}) = D_{180} \circ S_2 = S_4$ $(D_{180} \circ S_1) \circ D_{270} = S_3 \circ D_{270} = S_4$	Gilt bei Symmetrieabbildungen immer gleich

2) Das Kommutativgesetz gilt nicht:

$S_1 \circ D_{90} = S_4$
aber
$D_{90} \circ S_1 = S_2$.

4. Untergruppen

Definition: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Menge U mit folgenden Eigenschaften:

1) Jedes $u \in U$ ist auch Element von G, also $U \subseteq G$ (U ist Teilmenge von G).

2) $(U, \circ)$ ist eine Gruppe.

Man schreibt $U \leq G$, falls U eine Untergruppe von G ist.

Beispiele:

1) $G = G_{\text{Sechseck}}$= Symmetriegruppe des regulären Sechsecks, $U = G_{\text{Dreieck}}$ = Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks: $U \leq G$.

2) Jede Gruppe ist Untergruppe von sich selbst: $G \leq G$.

3) Für jede Gruppe G gilt $\{e\} \leq G$ (e = neutrales Element in G).

Satz: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Teilmenge. Dann ist U genau dann eine Untergruppe, falls

1) Abgeschlossenheit: Für $u, v \in U$ gilt $u \circ v \in U$.

2) Neutrales Element: U enthält das neutrale Element $e \in G$.

3) Inverses Element: Für $u \in U$ gilt auch $u^{-1} \in U$.

Begründung: Das Assoziativgesetz gilt in G, also auch in U. Dann sind alle vier Eigenschaften einer Gruppe erfüllt.

Beispiel: $G = G_{\text{Sechseck}}$, $U = \{D_0, S_2\}$: $U \subseteq G$ und

1) Abgeschlossenheit: $\left.\begin{array}{c|cc} \circ & D_0 & S_2 \\ \hline D_0 & D_0 & S_2 \\ S_2 & S_2 & D_0 \end{array}\right\}$ Nur Elemente aus U

2) Neutrales Element: $D_0 \in U$.

3) Inverses Element: $D_0^{-1} = D_0 \in U$, $S_2^{-1} = S_2 \in U$.

Also: $U \leq G$.

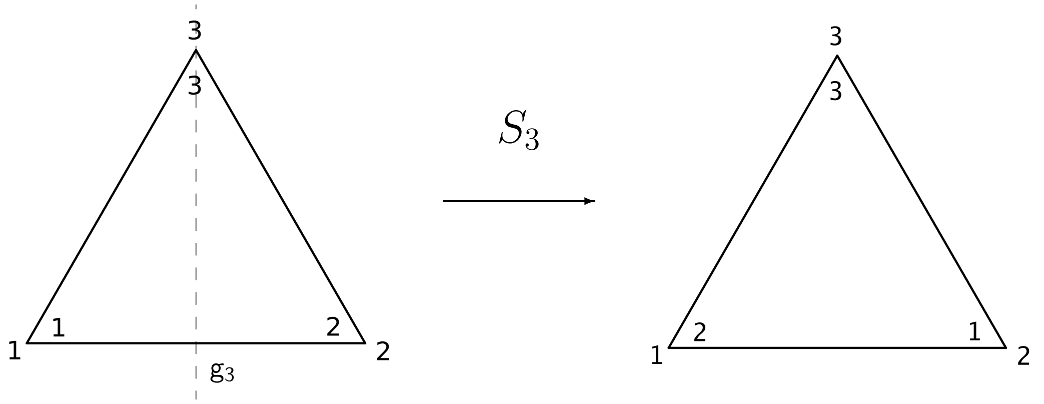
10.3 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

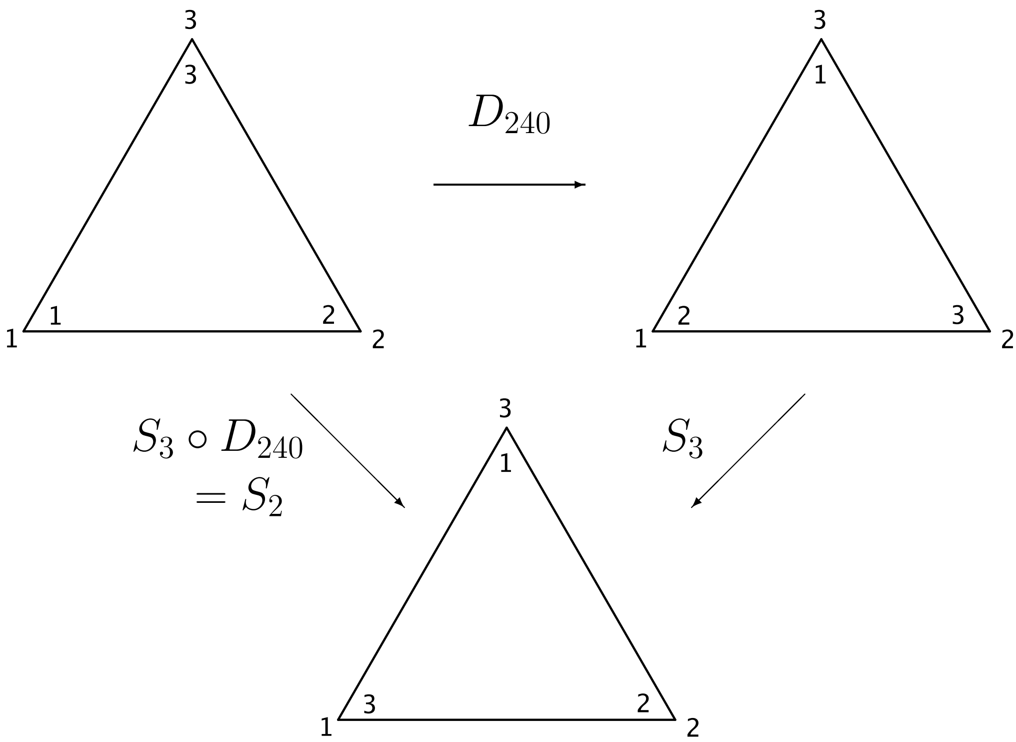
Wiederholung

Ebene Symmetrien sind Drehungen oder Achsenspiegelungen, die ein ebenes Objekt in sich überführen.

Beispiel:

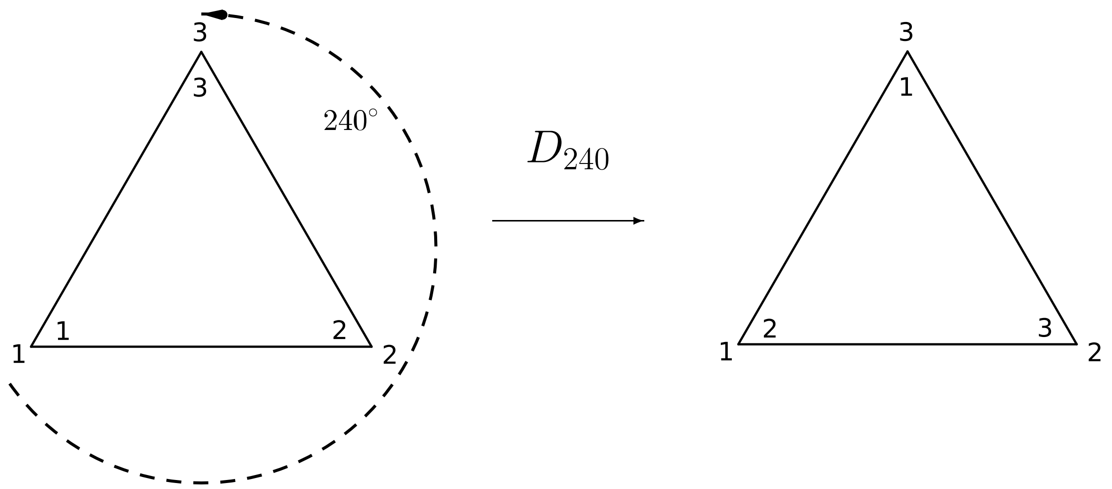


Hintereinanderausführung: Führt man zwei Symmetreiabbildungen nacheinander aus, z.B. zuerst D_{240} und dann S_3, so schreibt man $S_3 \circ D_{240}$. Sprich: „S_3 nach D_{240}“, die rechte Abbildung wird zuerst ausgeführt.



Man kann Symmetrieabbildungen auch mit *Abbildungstafeln* darstellen.

Beispiel:



$$D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ecke 1 liegt jetzt an Position 3, Ecke 2 liegt jetzt an Position 1, Ecke 3 liegt jetzt an Position 2.

Abbildungstafeln können miteinander kombiniert werden:

$$D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_3$$

$$\text{Also:} \quad S_3 \circ D_{240} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = S_2$$

Verknüpfungstafel für das Quadrat:

$\circ$	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_1	S_2	S_3	S_4
D_0	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_1	S_2	S_3	S_4
D_{90}	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0	S_2	S_3	S_4	S_1
D_{180}	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}	S_3	S_4	S_1	S_2
D_{270}	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}	S_4	S_1	S_2	S_3
S_1	S_1	S_4	S_3	S_2	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}
S_2	S_2	S_1	S_4	S_3	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}
S_3	S_3	S_2	S_1	S_4	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}
S_4	S_4	S_3	S_2	S_1	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0

Definition: Eine **Gruppe** besteht aus einer Menge G und einer Rechenoperation $\circ$. Man schreibt $(G, \circ)$. Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a, b, c \in G$ erfüllt sein:

1) **Abgeschlossenheit**: $a \circ b \in G$

   (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).

2) **AG** (Assoziativgesetz): $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) **NE** (Neutrales Element): Es gibt ein NE $e \in G$, so dass für jedes $a \in G$: $e \circ a = a \circ e = a$.

4) **IE** (Inverses Element): Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch **KG** (Kommutativgesetz): $a \circ b = b \circ a$,
so heißt die Gruppe **kommutative Gruppe**.

Symmetrien des Dreiecks:

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_0	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_{120}	D_{120}	D_{240}	D_0	S_3	S_1	S_2
D_{240}	D_{240}	D_0	D_{120}	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	D_0	D_{120}	D_{240}
S_2	S_2	S_3	S_1	D_{240}	D_0	D_{120}
S_3	S_3	S_1	S_2	D_{120}	D_{240}	D_0

Symmetrien des Sechsecks:

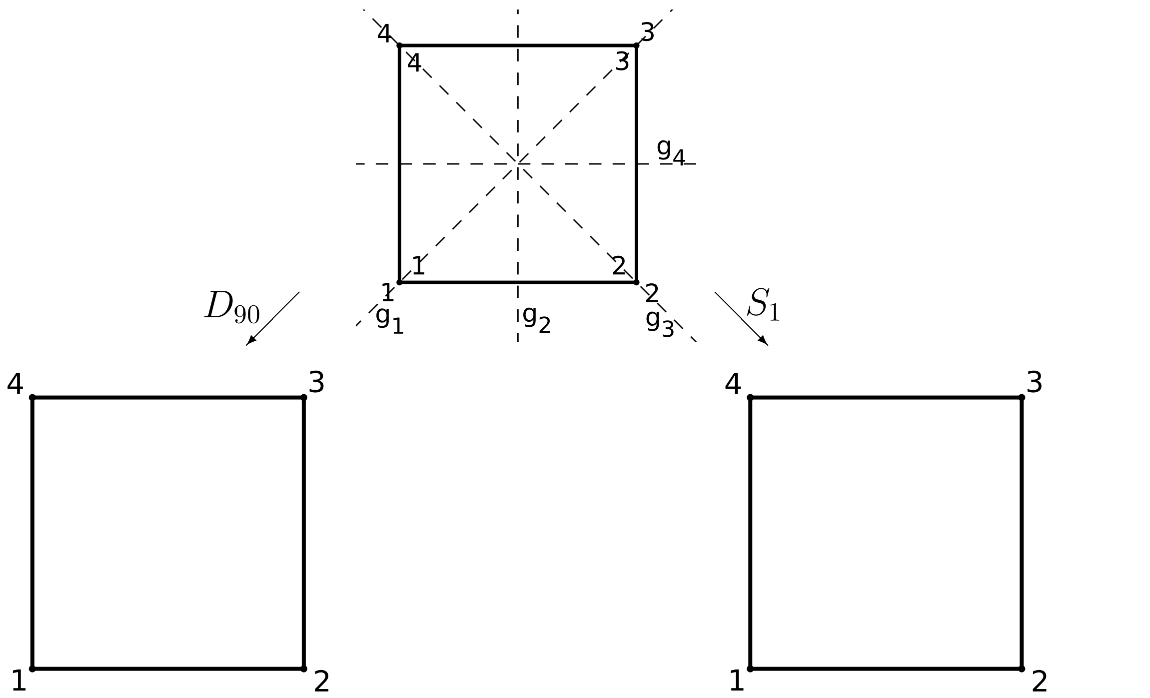
$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_0	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	S_5	S_4	S_6	S_1	S_3	S_2
D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	S_3	S_1	S_2	S_5	S_6	S_4
D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1
D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	S_2	S_3	S_1	S_6	S_4	S_5
D_{300}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	S_4	S_6	S_5	S_2	S_1	S_3
S_1	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	D_0	D_{120}	D_{240}	D_{60}	D_{300}	D_{180}
S_2	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	D_{240}	D_0	D_{120}	D_{300}	D_{180}	D_{60}
S_3	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	D_{120}	D_{240}	D_0	D_{180}	D_{60}	D_{300}
S_4	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	D_{300}	D_{60}	D_{180}	D_0	D_{240}	D_{120}
S_5	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	D_{60}	D_{180}	D_{300}	D_{120}	D_0	D_{240}
S_6	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	D_{180}	D_{300}	D_{60}	D_{240}	D_{120}	D_0

Symmetrien des Quadrats

Aufgabe 1

a) Erstelle die Abbildungstafeln für D_{90} und S_1 am Quadrat.

Hinweis: Trage zunächst in die untenstehende Graphik ein, auf welcher Position die Ecken nach Ausführung der Abbildungen sind.

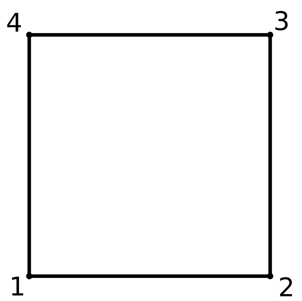


$$D_{90}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \qquad S_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

b) Stelle die Hintereinanderausführung $S_1 \circ D_{90}$ (d.h. zuerst D_{90}, dann S_1) mithilfe der Abbildungstafeln aus Teil a) dar.

$$S_1 \circ D_{90}: \qquad D_{90}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \right\} S_1$$

c) Trage mithilfe der Abbildungstafel aus b) die Position der Ecken nach Ausführung von $S_1 \circ D_{90}$ ein (in der Vorlage unten). Überlege anhand des Bildes, welche Symmetrie durch $S_1 \circ D_{90}$ entsteht.

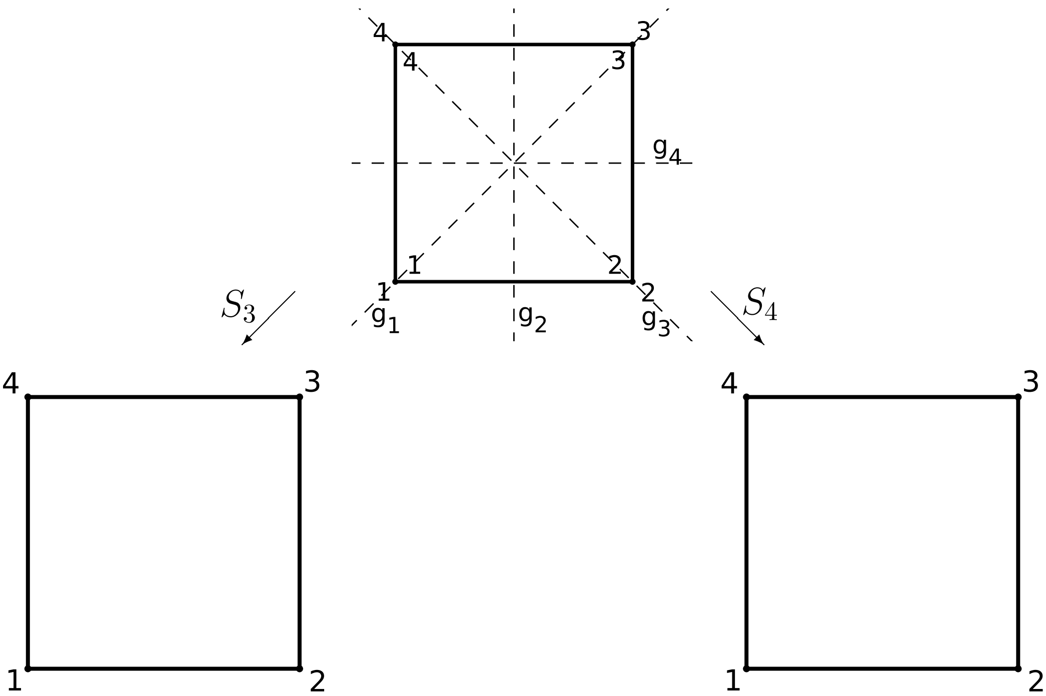


$$\Rightarrow \quad S_1 \circ D_{90} =$$

Aufgabe 2

a) Erstelle die Abbildungstafeln für S_3 und S_4 am Quadrat.

Hinweis: Trage zunächst in die untenstehende Graphik ein, auf welcher Position die Ecken nach Ausführung der Abbildungen sind.

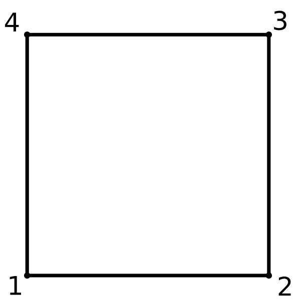


$$S_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \qquad S_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

b) Stelle die Hintereinanderausführung $S_4 \circ S_3$ (d.h. zuerst S_3, dann S_4) mithilfe der Abbildungstafeln aus Teil a) dar.

$$S_4 \circ S_3 : \qquad S_3 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ & & & \end{pmatrix} \right\} S_4$$

c) Trage mithilfe der Abbildungstafel aus b) die Position der Ecken nach Ausführung von $S_4 \circ S_3$ ein (in der Vorlage unten). Überlege anhand des Bildes, welche Symmetrie durch $S_4 \circ S_3$ entsteht.



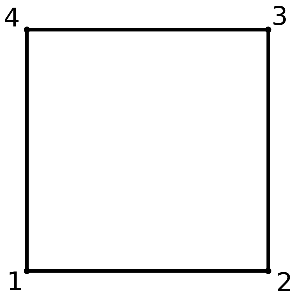
$$\Rightarrow \; S_4 \circ S_3 =$$

Zusatzaufgabe 1

Bestimme mit Hilfe der Abbildungstafeln aus den letzten beiden Aufgaben (jeweils in Teil a)) die folgenden Hintereinanderausführungen:

a) $$D_{90} \circ S_1 : \qquad S_1 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\} D_{90}$$

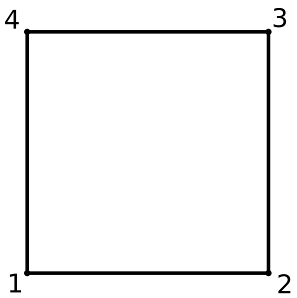
$D_{90} \circ S_1 :$



$\Rightarrow \; D_{90} \circ S_1 =$

b) $$S_3 \circ S_4 : \qquad S_4 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\} S_3$$

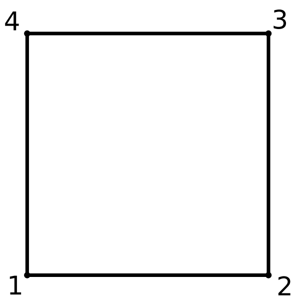
$S_3 \circ S_4 :$



$\Rightarrow \; S_3 \circ S_4 =$

c) $$D_{90} \circ S_4 : \qquad S_4 \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \right\} D_{90}$$

$D_{90} \circ S_4 :$



$\Rightarrow \; D_{90} \circ S_4 =$

3. Symmetriegruppe des Quadrats

Satz: Sei $G_{\text{Quadrat}} := \{ \qquad \}$

die Menge der Symmetrieabbildungen des Quadrats. Mit der Hintereinanderausführung $\circ$ als Verknüpfung bildet G_{Quadrat} eine Gruppe. Diese Gruppe ist nicht

1) Eigenschaft	Beispiel	allgemein zu sehen an Verknüpfungstafel (VT)

2) Das

gilt nicht:

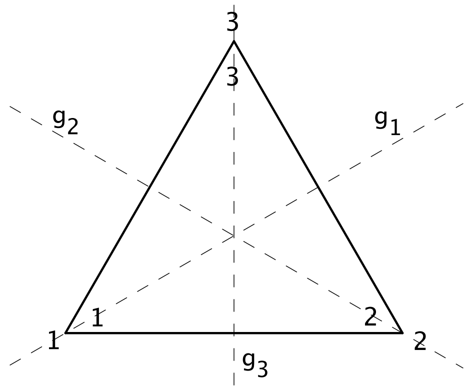
Verknüpfungstafel für das Quadrat:

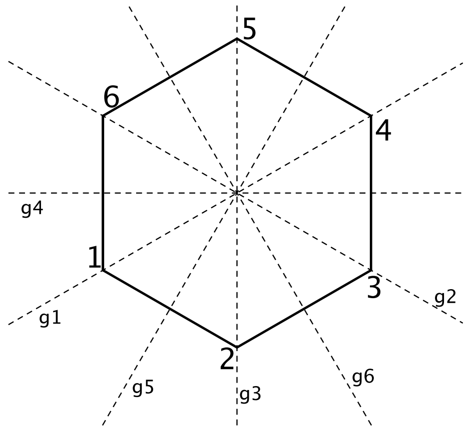
$\circ$	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_1	S_2	S_3	S_4
D_0	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}	S_1	S_2	S_3	S_4
D_{90}	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0	S_2	S_3	S_4	S_1
D_{180}	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}	S_3	S_4	S_1	S_2
D_{270}	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}	S_4	S_1	S_2	S_3
S_1	S_1	S_4	S_3	S_2	D_0	D_{90}	D_{180}	D_{270}
S_2	S_2	S_1	S_4	S_3	D_{270}	D_0	D_{90}	D_{180}
S_3	S_3	S_2	S_1	S_4	D_{180}	D_{270}	D_0	D_{90}
S_4	S_4	S_3	S_2	S_1	D_{90}	D_{180}	D_{270}	D_0

Gruppe in der Gruppe

Aufgabe 3

Gegeben sind ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Sechseck mit ihren Symmetrieachsen:





Verknüpfungstafel für die Symmetrien des Dreiecks:

$\circ$	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_0	D_0	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_{120}	D_{120}	D_{240}	D_0	S_3	S_1	S_2
D_{240}	D_{240}	D_0	D_{120}	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	D_0	D_{120}	D_{240}
S_2	S_2	S_3	S_1	D_{240}	D_0	D_{120}
S_3	S_3	S_1	S_2	D_{120}	D_{240}	D_0

Verknüpfungstafel für die Symmetrien des Sechsecks:

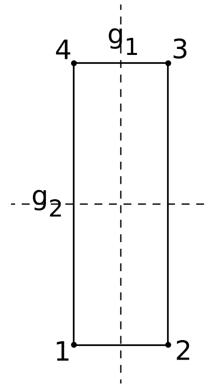
$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_0	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	S_5	S_4	S_6	S_1	S_3	S_2
D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	S_3	S_1	S_2	S_5	S_6	S_4
D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1
D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	S_2	S_3	S_1	S_6	S_4	S_5
D_{300}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	S_4	S_6	S_5	S_2	S_1	S_3
S_1	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	D_0	D_{120}	D_{240}	D_{60}	D_{300}	D_{180}
S_2	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	D_{240}	D_0	D_{120}	D_{300}	D_{180}	D_{60}
S_3	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	D_{120}	D_{240}	D_0	D_{180}	D_{60}	D_{300}
S_4	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	D_{300}	D_{60}	D_{180}	D_0	D_{240}	D_{120}
S_5	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	D_{60}	D_{180}	D_{300}	D_{120}	D_0	D_{240}
S_6	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	D_{180}	D_{300}	D_{60}	D_{240}	D_{120}	D_0

Vergleiche die Verknüpfungstafel des Dreiecks mit den entsprechenden Teilen der Verknüpfungstafel des Sechsecks. Markiere Gemeinsamkeiten mit einem Marker.

Betrachte das gleichseitige Dreieck und das reguläre Sechseck und überlege, was die Ursache für deine Beobachtung ist.

Zusatzaufgabe 2

Gegeben ist ein Rechteck, das kein Quadrat ist, mit den Symmetrieachsen wie nebenstehend skizziert.



a) Bestimme die Menge G_{Rechteck} aller Symmetrien des Rechtecks.

b) Schreibe die Verknüpfungstafel auf.

c) Zeige, dass G_{Rechteck} mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine kommutative Gruppe bildet.

Untergruppen

Aufgabe 4

Sei G_{Dreieck} die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks, G_{Sechseck} die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Sechsecks und G eine beliebige Gruppe.

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründe Deine Antwort!

a) $U_1 := \{D_0, S_1\} \ \leq \ G_{\text{Dreieck}}$

b) $U_2 := \{D_0, D_{180}\} \ \leq \ G_{\text{Sechseck}}$

c) $U_3 := \{D_0, D_{120}, D_{240}\} \ \leq \ G_{\text{Dreieck}}$

d) $U_4 := \{D_0, S_1, S_2, S_3\} \ \leq \ G_{\text{Dreieck}}$

e) $U_5 := \{D_0, D_{120}, D_{180}, D_{240}\} \ \leq \ G_{\text{Sechseck}}$

f) $U_6 := \{D_0, D_{180}\} \ \leq \ G_{\text{Dreieck}}$

g) $U_7 := \{D_0, S_2, D_{180}\} \ \leq \ G_{\text{Sechseck}}$

h) $U_8 := \{D_0, S_1, S_6, D_{180}\} \ \leq \ G_{\text{Sechseck}}$

i) $U_9 := \{\ldots, -40, -20, -10, 0, 10, 20, 40, \ldots\} \ \leq \ \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ (bezüglich Addition)

j) $U_{10} := \{\ldots, -5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, \ldots\} \ \leq \ \mathbb{Z}$ (Verknüpfung: Addition)

k) $U_{11} := \{x \in \mathbb{Q} \text{ mit } x > 0\} \ \leq \ \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (Verknüpfung: Multiplikation)

Zusatzaufgabe 3

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $h \in G$ ein fest gewähltes Element mit inversem Element $\overline{h}$ und

$$G^h = \{h \circ g \circ \overline{h} \text{ mit beliebigem } g \in G\}.$$

Zeige, dass $G^h \leq G$ gilt.

11 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 4: Rechnen mit Restklassen

11.1 Stundenverlauf

Zeit	**Unterrichtsschritte bzw. Unterrichtsarrangement**	**Sozialform L-S-Tätigkeit Methode**	**Was ich brauche**
17:00	Einstieg: Uhrzeiten	L-S-Gespräch	OH-Folie
17:05	Definition Kongruenz, Satz über äquivalente Eigenschaften, Teilen mit Rest	Tafelvortrag	
17:30	Übungs-/Vertiefung	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 4.1
17:40	Definition Restklasse	Tafelvortrag	
17:50	Übungs-/Vertiefungsphase	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 4.2
18:00	Besprechung Teil b):	S-Tafelvortrag	
18:05	Addition von Restklassen	Tafelvortrag	OH-Folie, Arbeitsblatt 4.3
18:15	Übungsphase	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 4.3
18.30	Verabschiedung		

11.2 Tafelanschriebe

5. Kongruenz

Definition: Für ganze Zahlen a, b und $m \in \mathbb{N}$ sagt man a ist kongruent zu b modulo m:

$$a \equiv b \mod m,$$

falls $a - b$ durch m teilbar ist, d.h. $\frac{a-b}{m}$ ist eine ganze Zahl.

Beispiele:

$2 \overset{?}{\equiv} 26 \mod 24$: $\frac{2-26}{24} = -1$, ✓

$5 \overset{?}{\equiv} -19 \mod 12$: $\frac{5-(-19)}{12} = 2$, ✓

$3 \overset{?}{\equiv} -3 \mod 12$: $\frac{3-(-3)}{12} = \frac{1}{2}$, Falsch!.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $a \equiv b \mod m$
(2) Es gibt eine ganze Zahl k, dass gilt: $a = b + k \cdot m$.
(3) Teilt man a und b durch m, so bleibt der selbe Rest.

Bedingung (2) an unseren Beispielen:

$2 \overset{?}{\equiv} 26 \mod 24$: $\frac{2-26}{24} = -1 \Leftrightarrow 2 - 26 = (-1) \cdot 24 \Leftrightarrow \underbrace{2}_{a} = \underbrace{26}_{b} + \underbrace{(-1)}_{k} \cdot \underbrace{24}_{m}$. ✓

$5 \overset{?}{\equiv} -19 \mod 12$: $\frac{5-(-19)}{12} = 2 \Leftrightarrow \underbrace{5}_{a} = \underbrace{-19}_{b} + \underbrace{2}_{k} \cdot \underbrace{12}_{m}$. ✓

$3 \overset{?}{\equiv} -3 \mod 12$: $\frac{3-(-3)}{12} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 = -3 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{k} \cdot 12$ ↯ (2) ist nicht erfüllt.

Teilen mit Rest: Grundschule: $21 : 4 = 5\text{R}1$.
Als Gleichung: $21 = 5 \cdot 4 + \underbrace{1}_{\text{Rest}}$.

Definition: Gegeben sind ganze Zahlen a, m. Dann bedeutet $a : m = k$ Rest R, dass es Zahlen $k \in \mathbb{Z},\ R \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gibt, so dass

$$a = k \cdot m + R \text{ und } 0 \leq R \leq m - 1.$$

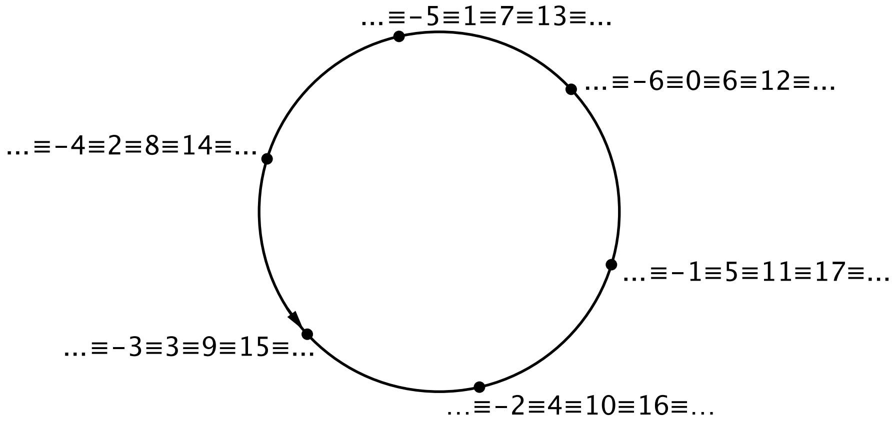
Die Zahl R heißt Rest: a geteilt durch m lässt den Rest R. Die Bedingung $0 \leq R \leq m - 1$ garantiert, dass der Rest R eindeutig ist.

Bedingung (3) an Beispielen:

$2 = 0 \cdot 24 + 2,\ 26 = 1 \cdot 24 + 2$:	Die Reste sind gleich,
$5 = 0 \cdot 12 + 5,\ -19 = (-2) \cdot 12 + 5$:	Die Reste sind gleich,
$3 = 0 \cdot 12 + 3,\ -3 = (-1) \cdot 12 + 9$:	Die Reste sind verschieden.

6. Restklassen

Die Uhr modulo 6: Schreibe alle Zahlen, die modulo 6 kongruent sind, in eine Kongruenzkette. Es gibt 6 solcher Ketten:



Definition: Als Restklasse $[a]$ von a bezeichnet man die Menge aller ganzen Zahlen, die kongruent zu a sind: $[a] = \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \mod m\}$ (Sprich: Die Menge alller b element Z, für die a kongruent b modulo m ist).

Es gilt also: $a \equiv b \mod m \;\Leftrightarrow\; [a] = [b]$.

Beispiel: Die Restklasse von 2 für Kongruenz modulo 5 ist: $[2] = \{... - 8, -3, 2, 7, 12, ...\}$. Alle Elemente von $[2]$ lassen beim Teilen durch 5 den Rest 2.

Definition:

1) Für die Menge der Restklassen modulo m schreiben wir $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \big\{[0], [1], ..., [m-1]\big\}$

2) Wir definieren auf der Menge der Restklassen eine Addition: $[a] + [b] \;:=\; [a + b]$.

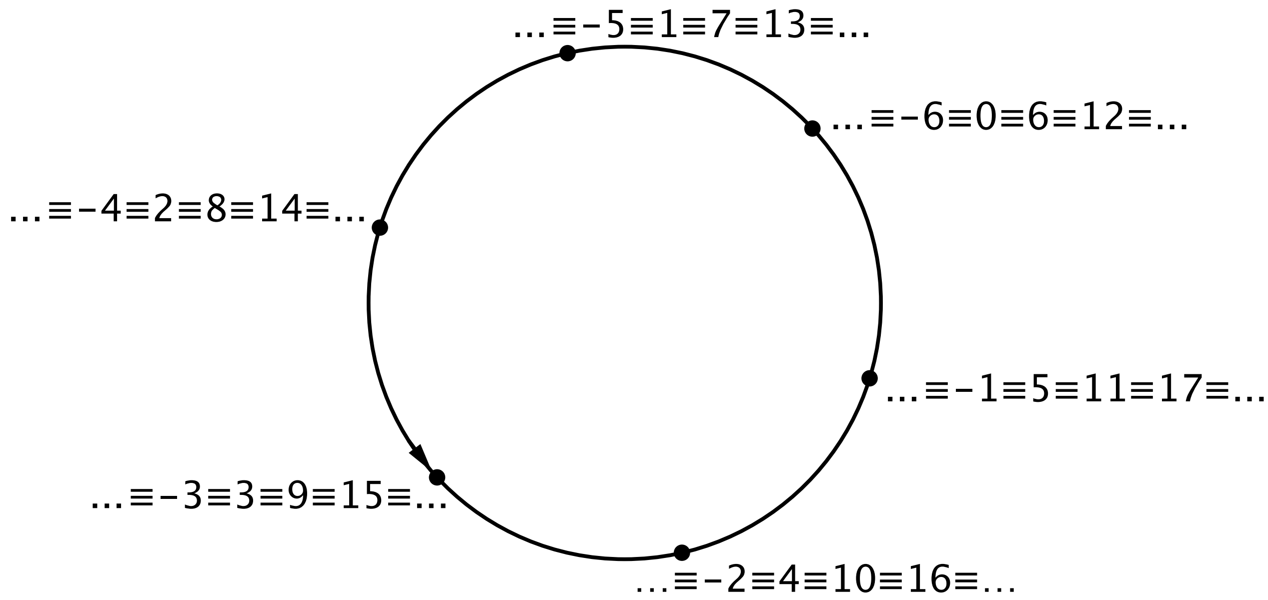
11.3 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Alfred und Bianca sind gemeinsam in Stuttgart unterwegs. Sie trennen sich um 21.00 Uhr und vereinbaren, sich in 5 Stunden wieder zu treffen.

Daraufhin behauptet Bianca: „Dann gilt $2 = 26$, oder?“

Zur Addition von Restklassen:



Allgemein:

Kongruenzen

Aufgabe 1

a) Überprüfe jeweils mit allen drei Bedingungen, ob die folgenden Kongruenzen gelten:

a₁) $17 \overset{?}{\equiv} 94 \mod 11$,

a₂) $-32 \overset{?}{\equiv} 54 \mod 8$.

b) Bestimme alle ganzen Zahlen x, für welche die Kongruenz $x \equiv 12 \mod 4$ erfüllt ist.

Zusatzaufgabe 1

Sei m eine fest gewählte natürliche Zahl. Zeige, dass „kongruent sein" die drei Eigenschaften einer sogenannten Äquivalenzrelation erfüllt. Diese sind:

a) Reflexivität: $a \equiv a \mod m$ für jede ganze Zahl a,

b) Symmetrie: Aus $a \equiv b \mod m$ folgt $b \equiv a \mod m$,

c) Transitivität: Aus $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m$ folgt $a \equiv c \mod m$.

Restklassen

Aufgabe 2

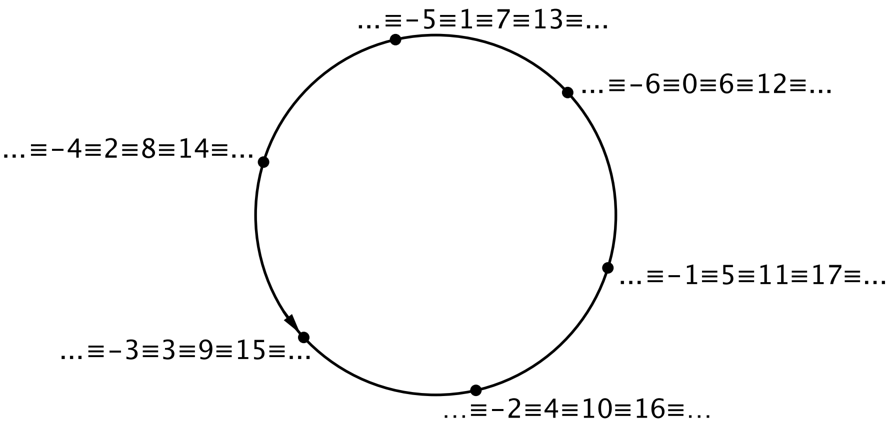
In dieser Aufgabe werden Kongruenzen modulo $m = 5$ untersucht.

a) Gib alle fünf Restklassen an:

$$[0] = \{ \qquad \}$$
$$[1] = \{ \qquad \}$$
$$[2] = \{ \qquad \}$$
$$[3] = \{ \qquad \}$$
$$[4] = \{ \qquad \}$$

b) Wähle zwei verschiedene Elemente a, b aus $[3]$ und zwei verschiedene Elemente c, d aus $[4]$. Bilde die Summen $a + c, a + d, b + c, b + d$ und stelle fest, in welchen Äquivalenzklassen die Summen liegen.

Addition von Restklassen



Allgemein:

Aufgabe 3

Rechne in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Berechne das Ergebnis und schreibe es in der Form $[a]$ mit $0 \leq a \leq m-1$ auf:

a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$[3]+[3] =$$
$$[4]+[4] =$$
$$[8]+[2] =$$

b) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$:

$$[4]+[8] =$$
$$[9]+[1] =$$
$$[5]+[6] =$$

c) $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$:

$$[20]+[20]+[15]+[11] =$$
$$[3]-[5]-[8]-[7] =$$
$$[1]-[20]-[30]-[7] =$$

Zusatzaufgabe 2

Gleichungen in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: Bestimme jeweils die Lösung. Der Wert der Variablen soll wieder zwischen 0 und $m-1$ liegen.

a) In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$$[3]+[x] = [0]$$
$$[5]+[y] = [2]$$
$$[4]+[z] = [0]$$

b) In $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$:

$$[7]+[w] = [6]$$
$$[4]+[x] = [3]$$
$$[9]+[y] = [3]$$
$$[4]+[z] = [0]$$

12 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 5: Restklassengruppen

12.1 Stundenverlauf

Zeit	Unterrichtsschritte bzw. Unterrichtsarrangement	Sozialform L-S-Tätigkeit Methode	Was ich brauche
17:00	Wiederholung	L-S-Gespräch	OH-Folien Wiederholung 1 und 2
17:10	Übungsphase	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 5.1
17:25	Besprechung	L-S-Gespräch	Tafel
17:30	$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist eine Gruppe	L-Vortrag	Tafel OH-Folie Gruppe
17:45	Übungsphase	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 5.2
17:50	Besprechung	S-Vortrag	OH-Folie zu AB 5.2
17:55	Untergruppen	L-Vortrag	OH-Folie Gruppe Tafel
18:10	Übungsphase	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 5.3
18:25	Besprechung	L-Vortrag	Tafel
18.30	Verabschiedung		

12.2 Tafelanschriebe

7. Restklassengruppen

Satz: Sei m eine natürliche Zahl. Dann ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ eine kommutative Gruppe.

Beweis: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq a, b, c \leq m-1$.

Abgeschlossenheit: Wir müssen zeigen, dass $[a] + [b]$ ein Element von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist.

Fall 1: $a + b \leq m - 1$: Dann gilt offensichtlich

$$[a] + [b] \;=\; [\underbrace{a+b}_{\text{zwischen } 0 \text{ und } m-1}] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Fall 2: $a + b \geq m$: Dann gilt $0 \leq a + b - m \leq (m-1) + (m-1) - m = m - 2$ und

$$[a] + [b] = [a+b] = [\underbrace{a+b-m}_{\text{zwischen } 0 \text{ und } m-1}] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

NE: Offenbar ist $[0]$ das NE, denn es gilt

$$[a] + [0] = [a+0] = [a] \text{ und } [0] + [a] = [0+a] = [a].$$

IE: Zu $[0]$ ist $[0]$ das IE. Für $1 \leq a \leq m-1$ ist das IE zu $[a]$ das Element $[m-a]$, denn es gilt $0 \leq m - a \leq m - 1$, also $[m-a] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und

$$[a] + [m-a] = [a+m-a] = [m] = [0] \quad \text{und} \quad [m-a] + [a] = [m] = [0].$$

AG: Zu zeigen ist: $([a]+[b])+[c] = [a]+([b]+[c])$. Wir verwenden, dass für die Addition ganzer Zahlen das Assoziativitätsgesetz gilt:

$$\begin{aligned} \big([a]+[b]\big)+[c] &= [a+b]+[c] = [(a+b)+c] \\ &= [a+(b+c)] = [a]+[b+c] = [a]+\big([b]+[c]\big). \end{aligned}$$

KG: $[a] + [b] = [a+b] = [b+a] = [b] + [a]$. $\square$

Untergruppen von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$:

Triviale Untergruppen: $U = \{[0]\}$, $U = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$U = \{[0], [2]\}$ keine Untergruppe: $[2] + [2] = [4] \notin U$

$U = \{[0], [2], [4]\}$ $\Rightarrow$ $U \leq G$:

$+$	$[0]$	$[2]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$
$[2]$	$[2]$	$[4]$	$[0]$
$[4]$	$[4]$	$[0]$	$[2]$

$U = \{[0], [3]\}$ $\Rightarrow$ $U \leq G$:

$+$	$[0]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[3]$
$[3]$	$[3]$	$[0]$

12.3 OH-Folien und Arbeitsblätter

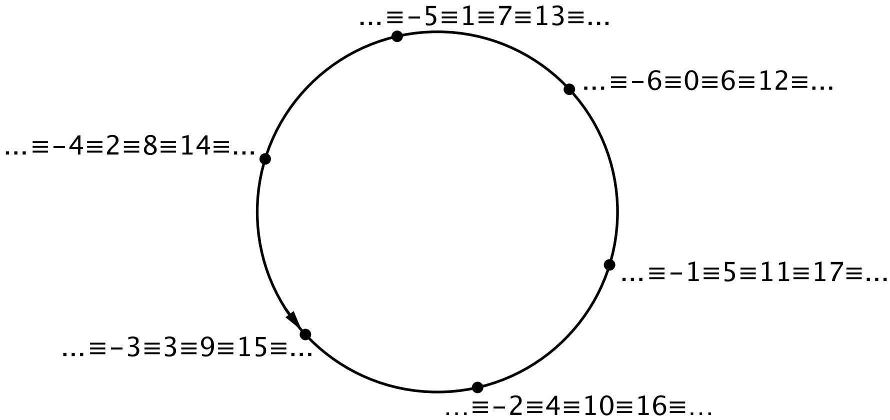
Siehe folgende Seiten

Definition: Für ganze Zahlen a, b und $m \in \mathbb{N}$ sagt man

a ist kongruent zu b modulo m: $a \equiv b \mod m$,

falls $a - b$ durch m teilbar ist, d.h. $\frac{a-b}{m}$ ist eine ganze Zahl.

Beispiel: Kongruenzen modulo 6:



Man schreibt alle Zahlen, die zueinander kongruent sind, in eine Menge, die Restklasse:

z.B. $[1] = \{\ldots -5, 1, 7, 13, \ldots\} = [-5] = [7] = \ldots$

z.B. $[0] = \{\ldots -6, 0, 6, 12, \ldots\} = [-6] = [12] = \ldots$

Definition:

1) Für die Menge der Restklassen modulo m schreibt man $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], ..., [m-1]\}$

2) Auf der Menge der Restklassen ist eine Addition definiert:

$$[a] + [b] = [a + b].$$

Rechnen in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} = \big\{[0], [1], [2], \ldots, [10]\big\}$:

- $[9] + [4] = [9 + 4] = [13] = [2]$
- $[10] + [10] = [10 + 10] = [20] = [9]$
- $[8] + [3] = [11] = [0]$

Eine Gruppe $(G, \circ)$ besteht aus

- einer Menge G und
- einer Rechenoperation $\circ$.

Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a, b, c \in G$ erfüllt sein:

1) Abgeschlossenheit: $a \circ b \in G$ (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).

2) Assoziativgesetz: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) Neutrales Element: Es gibt ein NE $e \in G$, so dass $e \circ a = a \circ e = a$ für jedes $a \in G$.

4) Inverses Element: Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch das Kommutativgesetz: $a \circ b = b \circ a$, so heißt die Gruppe kommutative Gruppe.

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine Untergruppe von G ist eine Teilmenge von G, so dass $(U, \circ)$ eine Gruppe ist. Man schreibt $U \leq G$, falls U eine Untergruppe von G ist.

Satz: Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Teilmenge, dann ist U genau dann eine Untergruppe, falls

1) Abgeschlossenheit: Für $u, v \in U$ gilt $u \circ v \in U$.

2) Neutrales Element: U enthält das neutrale Element $e \in G$.

3) Inverses Element: Für $u \in U$ gilt auch $u^{-1} \in U$.

Addition von Restklassen

Aufgabe 1

Summen derselben Elemente: Berechne alle Elemente der angegebenen Mengen. Beachte, dass ein Element nur ein Mal (und nicht mehrmals) in der Menge enthalten sein kann.

a) In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}: \quad M_1 = \{[2], [2]+[2], [2]+[2]+[2], \ldots\},$

$M_2 = \{[3], [3]+[3], \ldots\}.$

b) In $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}: \quad M_3 = \{[2], [2]+[2], [2]+[2]+[2], \ldots\},$

$M_4 = \{[3], [3]+[3], \ldots\},$

$M_5 = \{[5], [5]+[5], \ldots\}.$

c) In $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}: \quad M_6 = \{[2], [2]+[2], [2]+[2]+[2], \ldots\},$

$M_7 = \{[4], [4]+[4], \ldots\},$

$M_8 = \{[6], [6]+[6], \ldots\}.$

d) In $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}: \quad M_9 = \{[2], [2]+[2], [2]+[2]+[2], \ldots\},$

$M_{10} = \{[3], [3]+[3], \ldots\},$

$M_{11} = \{[6], [6]+[6], \ldots\}.$

e) In $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}: \quad M_{12} = \{[2], [2]+[2], [2]+[2]+[2], \ldots\},$

$M_{13} = \{[3], [3]+[3], \ldots\},$

$M_{14} = \{[5], [5]+[5], \ldots\}.$

Restklassen und Gruppeneigenschaften

Aufgabe 2

Fülle die Verknüpfungstafel für $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ aus:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$						
$[1]$						
$[2]$						
$[3]$						
$[4]$						
$[5]$						

Welche Gruppeneigenschaften kann man an der Verknüpfungstafel direkt ablesen?

Zusatzaufgabe 1

Durch $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$ wird in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ eine Multiplikation definiert.

a) Fülle die Verknüpfungstafel für $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \cdot)$ aus:

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$
$[0]$						
$[1]$						
$[2]$						
$[3]$						
$[4]$						
$[5]$						

b) Welches Element ist das neutrale Element in $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \cdot)$?

c) Warum ist $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \cdot)$ keine Gruppe?

d) Nun wird das Element $[0]$ aus $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ entfernt, betrachte $G := (\mathbb{Z}/6Z) \setminus \{[0]\}$. Welche Gruppeneigenschaften sind in $(G, \cdot)$ erfüllt, welche nicht?

Restklassen und Untergruppen

Aufgabe 3

Finde nichttriviale Untergruppen von

a) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$, **b)** $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$, **c)** $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$,

d) $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$, **e)** $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$, **f)** $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$,

g) $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$, **h)** $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +)$, **i)** $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Zusatzaufgabe 2

Welche Untergruppen besitzt $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}, +)$?

13 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 6: Der Satz von Lagrange

13.1 Stundenverlauf

Zeit	Unterrichtsschritte bzw. Unterrichtsarrangement	Sozialform L-S-Tätigkeit Methode	Was ich brauche
17:00	Wiederholung und Monstergruppe	L-S-Gespräch	OH-Folie Wiederholung, OH-Folie Monstergruppe (nur obere Hälfte)
17:10	Untergruppen finden	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 6.1
17:15	Besprechung	L-S-Gespräch	OH-Folie zu Aufgabe 1
17:20	Definition Gruppenordnung und Satz von Lagrange	L-Vortrag	Tafel
17:30	Übungen	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 6.2
17:40	Besprechung der Aufgabe, Erklärung der Anwendung des Satzes von Lagrange, Folgerungen, Anwendung auf Monstergruppe	L-S-Gespräch	Tafel, OH-Folie Monstergruppe (untere Hälfte)
17:50	Beweisidee	L-S-Gespräch	Arbeitsblatt 6.3, OH-Folie dazu
18:00	Erzeugung von Untergruppen	L-Vortrag	Tafel
18:10	Übungsphase	Einzel-/ Partnerarbeit	Arbeitsblatt 6.4
18:25	Besprechung	L-S-Gespräch	Tafel
18.30	Verabschiedung		

13.2 Tafelanschriebe

8. Der Satz von Lagrange

Definition: Für eine Gruppe G mit endlich vielen Elementen heißt die Anzahl der Elemente von G die Gruppenordnung. Für die Gruppenordnung von G schreibt man $|G|$.

Beispiel: $|\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}| = 6$ weil $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 6 verschiedene Elemente hat.

Satz von Lagrange: Sei G eine endliche Gruppe. Ist U eine Untergruppe von G, dann ist $|U|$ ein Teiler von $|G|$.

Beispiele: $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ U = \{[0],[2],[4]\}$. Dann gilt $U \leq G$ und $|U| = 3$,
wobei 3 Teiler von $6 = |G|$ ist.
$G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ U = \{[0],[4]\}$. Dann gilt $U \leq G$ und $|U| = 2$,
wobei 2 Teiler von $8 = |G|$ ist.

Folgerungen: Sei $U \subseteq G$.

1) Ist $|U|$ kein Teiler von $|G|$, dann ist U keine Untergruppe von G.

2) Ist $|G|$ eine Primzahl, so besitzt G nur die trivialen Untergruppen $U = \{e\}$ und $U = G$.

9. Erzeugen von Untergruppen

Kochrezept:

Gegeben sei eine Gruppe $(G, \circ)$ und eine Teilmenge $M \subseteq G$

1) Man fügt das neutrale Element hinzu $\to M_{\mathsf{N}}$
2) Man fügt für jedes Element von M_{N} das inverse Element dazu $\to M_{\mathsf{NI}}$
3) Man prüft die Abgeschlossenheit und fügt solange fehlende Elemente hinzu, bis die Menge abgeschlossen ist $\to M_{\mathsf{NIA}}$

Bsp. $G = \mathcal{D}_6$,
$M = \{D_{120}, S_1\}$

$M_{\mathsf{N}} = \{D_0, D_{120}, S_1\}$

$M_{\mathsf{NI}} = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_1\}$

$\circ$	D_{120}	D_{240}	S_1	S_2	S_3
D_{120}	D_{240}	D_0	S_2	S_3	S_1
D_{240}	D_0	D_{120}	S_3	S_1	S_2
S_1	S_3	S_2	D_0	D_{240}	D_{120}
S_2	S_1	S_3	D_{120}	D_0	D_{240}
S_3	S_2	S_1	D_{240}	D_{120}	D_0

$\Rightarrow\ M_{\mathsf{NIA}} = \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_1, S_2, S_3\}$ ist abgeschlossen und enthält NE und alle IE.

Definition: M_{NIA} heißt die von M erzeugte Untergruppe.

13.3 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Gruppe und Untergruppe

Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ besteht aus

- einer Menge G und
- einer Rechenoperation $\circ$.

Folgende Rechenregeln müssen für beliebige $a, b, c \in G$ erfüllt sein:

1) **Abgeschlossenheit**: $a \circ b \in G$ (Das Ergebnis von $a \circ b$ muss wieder ein Element der Gruppe sein).
2) **Assoziativgesetz**: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
3) **Neutrales Element**: Es gibt ein NE $e \in G$, so dass $e \circ a = a \circ e = a$ für jedes $a \in G$.
4) **Inverses Element**: Zu jedem $a \in G$ existiert ein IE $\overline{a} \in G$, so dass $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = e$.

Gilt zusätzlich noch das **Kommutativgesetz**: $a \circ b = b \circ a$, so heißt die Gruppe **kommutative Gruppe**.

Eine **Untergruppe** U ist eine Teilmenge $U \subseteq G$, die selbst schon eine Gruppe ist.
Triviale Untergruppen jeder Gruppe G: $U = \{e\}$, $U = G$.

Die **Monstergruppe** hat ca. $8 \cdot 10^{53}$ Elemente.

Ausgeschrieben:

800000000000000000000000000000000000000000000000000000

Auf der Erde leben ca. $7 \cdot 10^9$ Menschen.

Ausgeschrieben: 7000000000 (Das sind 44 Nullen weniger!)

Sei nun eine Teilmenge $U \subseteq M$ gegeben mit 3239767741 Elementen.

____

Primzahlzerlegung:

$|M| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

$|U| = 7^5 \cdot 17^2 \cdot 23 \cdot 29$

$\Rightarrow$ ________________________________

$\Rightarrow$ ________________________________

Bezeichnung	G	nichttriviale Untergruppen $U \leq G$
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1]\}$	———
$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],[2]\}$	———
$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],[2],[3]\}$	
$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$	———
$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$	$\{[0],[2],[4]\}, \quad \{[0],[3]\}$
$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],...,[5],[6]\}$	
$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],...,[6],[7]\}$	$\{[0],[2],[4],[6]\}, \quad \{[0],[4]\}$
$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],...,[7],[8]\}$	
$(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],...,[8],[9]\}$	
$(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],...,[9],[10]\}$	———
$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+)$	$\{[0],[1],...,[10],[11]\}$	

Betrachte die Gruppe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ mit der Addition von Restklassen als Verknüpfung und die Untergruppe $U = \{[0], [4], [8]\}$.

Zu zeigen ist: $|U| = 3$ ist ein Teiler von $|\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}|$.

Beweis: Bestimme

$$[0] + U = \{[0] + [0], [0] + [4], [0] + [8]\} = \{ \qquad \}$$

$$[1] + U = \{ \qquad \}$$

$$[2] + U = \{ \qquad \}$$

$$[3] + U = \{ \qquad \}$$

$$[4] + U = \{ \qquad \}$$

$$[5] + U =$$

$$[6] + U =$$

$$\vdots$$

$$[11] + U = \{ \qquad \}$$

Dies sind verschiedene Mengen mit leerem Schnitt.

Alle diese Mengen haben Elemente

Die Vereinigung dieser Mengen ergibt

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Untergruppen von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe sollen nichttriviale Untergruppen von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ bestimmt werden. Vervollständige die Tabelle. Du kannst Dich an den eingetragenen Beispielen orientieren.

Bezeichnung	G	nichttriviale Untergruppen $U \leq G$
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1]\}$	———
$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], [2]\}$	———
$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], [2], [3]\}$	
$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], [2], [3], [4]\}$	———
$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$	$\{[0], [2], [4]\}, \quad \{[0], [3]\}$
$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [5], [6]\}$	
$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [6], [7]\}$	$\{[0], [2], [4], [6]\}, \quad \{[0], [4]\}$
$(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [7], [8]\}$	
$(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [8], [9]\}$	
$(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [9], [10]\}$	———
$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$	$\{[0], [1], ..., [10], [11]\}$	

Untergruppen

Aufgabe 2

a) Welche Ordnung haben die Symmetriegruppe $\mathcal{D}_6$ des Sechsecks und die Gruppe $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$?

$$|\mathcal{D}_6| = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \ , \ |\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}| = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \ .$$

b) Bilden die angegebenen Mengen Untergruppen der Symmetriegruppe des Sechsecks? Begründe Deine Antworten!

b$_1$) $U_1 := \{D_0, D_{180}\}$,
b$_2$) $U_2 := \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_3, S_5\}$,
b$_3$) $U_3 := \{D_0, D_{60}, D_{180}\}$.

c) Bilden die angegebenen Mengen Untergruppen der Gruppe $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$? Begründe Deine Antworten!

c$_1$) $U_4 := \{[0], [8]\}$,
c$_2$) $U_5 = \{[0], [7], [14]\}$,
c$_3$) $U_6 = \{[0], [3], [6], [9], [12], [15]\}$.

Hinweis: Der Satz von Lagrange kann teilweise eine schnelle Antwort liefern.

Zusatzaufgabe 1

Gibt es Gruppen, die sicher keine nichttrivialen Untergruppen haben? Begründe Deine Antwort.

Zusatzaufgabe 2

a) Formuliere den Umkehrsatz zum Satz von Lagrange.

b) Wie könnte man den Umkehrsatz widerlegen?

Verknüpfungstafel für die Sechsecksymmetrien:

$\circ$	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_0	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	S_5	S_4	S_6	S_1	S_3	S_2
D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	S_3	S_1	S_2	S_5	S_6	S_4
D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1
D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	S_2	S_3	S_1	S_6	S_4	S_5
D_{300}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	S_4	S_6	S_5	S_2	S_1	S_3
S_1	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	D_0	D_{120}	D_{240}	D_{60}	D_{300}	D_{180}
S_2	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	D_{240}	D_0	D_{120}	D_{300}	D_{180}	D_{60}
S_3	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	D_{120}	D_{240}	D_0	D_{180}	D_{60}	D_{300}
S_4	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	D_{300}	D_{60}	D_{180}	D_0	D_{240}	D_{120}
S_5	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	D_{60}	D_{180}	D_{300}	D_{120}	D_0	D_{240}
S_6	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	D_{180}	D_{300}	D_{60}	D_{240}	D_{120}	D_0

Beweis des Satzes von Lagrange

Betrachte die Gruppe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ mit der Addition von Restklassen als Verknüpfung und die Untergruppe $U = \{[0], [4], [8]\}$.

Zu zeigen ist: $|U| = 3$ ist ein Teiler von $|\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}|$.

Beweis: Bestimme

$$[0] + U = \{[0] + [0], [0] + [4], [0] + [8]\} \ = \ \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$[1] + U = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$[2] + U = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$[3] + U = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$[4] + U = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$[5] + U =$$

$$[6] + U =$$

$$\vdots$$

$$[11] + U = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

Dies sind verschiedene Mengen mit leerem Schnitt.

Alle diese Mengen haben Elemente

Die Vereinigung dieser Mengen ergibt

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Untergruppen erzeugen

Aufgabe 3

Welche Untergruppe von $\mathcal{D}_6$ wird durch die Teilmenge M erzeugt? Gib jeweils die Ordnung der erzeugten Untergruppe M_{NIA} an. Überprüfe mit dem Satz von Lagrange, ob die gefundene Menge eine Untergruppe sein kann.

a) $M = \{D_{120}\}$, **b)** $M = \{D_{60}\}$, **c)** $M = \{S_1\}$,

d) $M = \{S_1, S_2\}$, **e)** $M = \{S_3, S_4\}$, **f)** $M = \{S_6, D_{300}\}$,

Knobelblatt

Sascha behauptet: Mit dem Satz von Lagrange kann ich doch auch folgendes sagen: „Wenn G eine endliche Gruppe und n ein Teiler von $|G|$ ist, dann gibt es eine Untergruppe U mit $|U| = n$.“

Die folgenden Aufgaben helfen Dir, herauszufinden, ob diese Aussage richtig ist.

Zusatzaufgabe 3

a) Gib die Ordnung der Symmetriegruppe des Sechsecks $\mathcal{D}_6$ und ihre nichttrivialen Teiler an.

b) Untersuche, ob es zu jedem nichttrivialen Teiler n von $|\mathcal{D}_6|$ eine Untergruppe von $\mathcal{D}_6$ mit der Ordnung n gibt.

Hinweis: Du kannst die Ergebnisse von Aufgabe 4 verwenden.

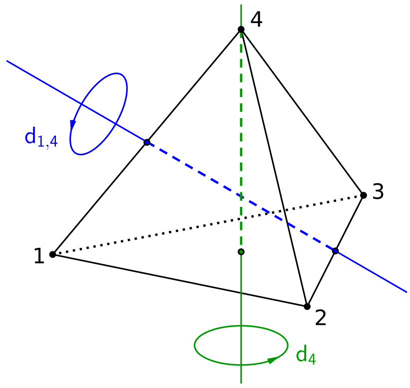
c) Gib die Ordnung der Gruppe $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ und ihre nichttrivialen Teiler an.

d) Untersuche, ob es zu jedem nichttrivialen Teiler von $|\mathbb{Z}_{24}|$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_{24}$ mit der Ordnung n gibt.

Zusatzaufgabe 4

Die Symmetriegruppe des Tetraeders enthält nur Drehungen und wird mit $\mathcal{A}_4$ bezeichnet. Für die enthaltenen Abbildungen gelten folgende Bezeichnungen:

- e: Das neutrale Element (Drehung um 0°),
- $d_{1,4}$: Die $180°$-Drehung um die Gerade durch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{14}$ und $\overline{23}$,
- d_4: Die $120°$-Drehung um die Höhe durch den Eckpunkt 4,
- d_4^2: Die $240°$-Drehung um die Höhe durch den Eckpunkt 4 (also $d_4 \circ d_4$).



a) Die 12 Elemente von $\mathcal{A}_4$ sind (trage die fehlenden Zahlen ein):

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \quad d_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix},$$

$$d_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad d_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}.$$

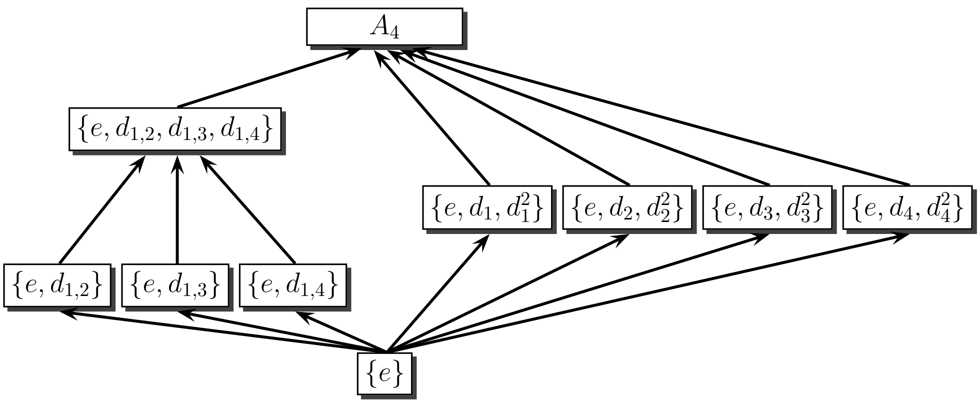
b) Vervollständige die Verknüpfungstafel von $\mathcal{A}_4$:

$\circ$	e	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	d_1	d_1^2	d_2	d_2^2	d_3	d_3^2	d_4	d_4^2
e	e	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	d_1	d_1^2	d_2	d_2^2	d_3	d_3^2	d_4	d_4^2
$d_{1,2}$	$d_{1,2}$	e	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	d_4	d_3^2	d_3	d_4^2	d_2	d_1^2	d_1	d_2^2
$d_{1,3}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	e	$d_{1,2}$	d_2	d_4^2	d_1	d_3^2	d_4	d_2^2	d_3	d_1^2
$d_{1,4}$	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	e	d_3	d_2^2	d_4	d_1^2	d_1	d_4^2	d_2	d_3^2
d_1	d_1	d_3	d_4	d_2			d_3^2	$d_{1,3}$	d_4^2			$d_{1,2}$
d_1^2	d_1^2	d_4^2	d_2^2	d_3^2	e	d_1	$d_{1,4}$	d_4	$d_{1,2}$	d_2	$d_{1,3}$	d_3
d_2	d_2	d_4	d_3	d_1	d_4^2		d_2^2	e	d_1^2	$d_{1,2}$	d_3^2	$d_{1,4}$
d_2^2	d_2^2	d_3^2	d_1^2	d_4^2	$d_{1,4}$		e	d_2	$d_{1,3}$	d_4	$d_{1,2}$	d_1
d_3	d_3	d_1	d_2	d_4	d_2^2	$d_{1,4}$	d_4^2	$d_{1,2}$	d_3^2	e	d_1^2	$d_{1,3}$
d_3^2	d_3^2	d_2^2	d_4^2	d_1^2	$d_{1,2}$	d_4	$d_{1,3}$	d_1	e		$d_{1,4}$	d_2
d_4	d_4	d_2	d_1	d_3	d_3^2	$d_{1,2}$	d_1^2	$d_{1,4}$	d_2^2	$d_{1,3}$	d_4^2	e
d_4^2	d_4^2	d_1^2	d_3^2	d_2^2	$d_{1,3}$	d_2	$d_{1,2}$	d_3	$d_{1,4}$	d_1		d_4

Zusatzaufgabe 5

a) Welche Ordnung hat $\mathcal{A}_4$? $|\mathcal{A}_4| =$ _____.

b) Das folgende Diagramm zeigt systematisch alle Untergruppen von $\mathcal{A}_4$4. Dabei bedeutet jeder Pfeil „ist Untergruppe von". Erkläre anhand des Diagramms, warum die Aussage von Sascha falsch ist.



Begründung: