Warum stehen im Pascalschen Dreieck die Binomialkoeffizienten?

1. Das Pascalsche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

Das Pascalsche Dreieck wird folgendermaßen gebildet: Man fängt mit der Eins oben an, schreibt darunter zwei Einsen, so dass die obere Eins in der Mitte darüber steht. Dann ergänzt man von Zeile zu Zeile schräg links außen und schräg rechts außen jeweils eine Eins. Dazwischen schreibt man jeweils die Summen, die aus zwei nebeneinanderliegenden Zahlen der Zeile darüber gebildet werden.

2. Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit $0 \leq k \leq n$ definiert man den Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

3. Das Pascalsche Dreieck und Binomialkoeffizienten

Die Behauptung ist nun, dass im Pascalschen Dreieck die Binomialkoeffizienten stehen: Beginnt man die Zeilen im Pascalschen Dreieck mit 0 zu zählen und die Plätze in jeder Zeile ebenfalls mit 0, so steht in der n-ten Zeile am k-ten Platz (von links her gezählt, geht aber auch von rechts, die Binomialkoeffizienten sind ja symmetrisch: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$) der Binomialkoefizient $\binom{n}{k}$, wie rechts in der fünften Zeile eingezeichnet.

$$\begin{array}{lccccccccccc} \text{Zeile Nr. 0} &&&&&& 1 &&&&& \\ \text{Zeile Nr. 1} &&&&& 1 && 1 &&&& \\ \text{Zeile Nr. 2} &&&& 1 && 2 && 1 &&& \\ \text{Zeile Nr. 3} &&& 1 && 3 && 3 && 1 && \\ \text{Zeile Nr. 4} && 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ \text{Zeile Nr. 5} & 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\ & \uparrow && \uparrow && \uparrow && \uparrow && \uparrow && \uparrow \\ & \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} \end{array}$$

4. Warum ist das so?

Zunächst beweist man folgende Rekursionsformel: Für $n, k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{1}$$

Beweis: Man beachte $k! = k \cdot (k-1)!$ (auch im Fall $k = 1$ wegen $0! = 1$).

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{k \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k+1)!}\Big(\underbrace{k + (n-k+1)}_{=n+1}\Big) \\ &= \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Diese Formel spiegelt genau den Aufbau des Pascalschen Dreiecks wider: Addiert man in der n-ten Zeile das $(k-1)$-te zum k-ten Element, so erhält man das k-te Element der $(n+1)$-ten Zeile. Damit sehen wir, wie die „inneren“ Elemente jeder Zeile entstehen. Aber noch hängt unsere Betrachtung in der Luft, da wir nur von einer Zeile zur nächsten kommen.

Nun stellen wir noch fest: Mit $0! = 1$ gelten

(2) $$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = 1, \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1.$$

Durch Anwendung von (1) und (2) ist zumindest von der Anschauung her klar, warum im Pascalschen Dreieck die Binomialkoeffizienten stehen:

$$\binom{1}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{1}{1} = \mathbf{1}$$

$$+$$

$$\binom{2}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{2}{1} = \mathbf{2} \qquad \binom{2}{2} = \mathbf{1}$$

$$+ \qquad +$$

$$\binom{3}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{3}{1} = \mathbf{3} \qquad \binom{3}{2} = \mathbf{3} \qquad \binom{3}{3} = \mathbf{1}$$

$$+ \qquad + \qquad +$$

$$\binom{4}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{4}{1} = \mathbf{4} \qquad \binom{4}{2} = \mathbf{6} \qquad \binom{4}{3} = \mathbf{4} \qquad \binom{4}{4} = \mathbf{1}$$

5. Der Beweis

Entsprechend der vorigen Überlegungen kann nun der Induktionsbeweis geführt werden:

Induktionsanfang: Wir starten bei $n = 1$: Es gilt $\binom{1}{0} = 1$ und $\binom{1}{1} = 1$. Damit stehen in der Zeile mit der Nummer 1 die beiden Binomialkoeffizienten $\binom{1}{0}$ und $\binom{1}{1}$.

Induktionsschritt: Es sei bewiesen, dass in der n-ten Zeile von links nach rechts die Binomialkoeffizienten stehen:

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}.$$

Wir beweisen, dass dann in der $(n+1)$-ten Zeile die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{0} \quad \binom{n+1}{1} \quad \binom{n+1}{2} \quad \cdots \quad \binom{n+1}{n-1} \quad \binom{n+1}{n} \quad \binom{n+1}{n+1}$$

stehen. Dazu Fallunterscheidung:

Fall $k = 0$ oder $k = n+1$: An der ersten und die letzten Stelle der $(n+1)$-ten Zeile steht 1, und es gilt $1 = \binom{n+1}{0}$ und $1 = \binom{n+1}{n+1}$. Also stehen hier die Binomialkoeffizienten.

Fall $1 \leq k \leq n$: An der k-ten Stelle der $(n+1)$-ten Zeile steht die Summe aus den zwei darüberliegenden Einträgen an der $(k-1)$-ten und k-ten Stelle der n-ten Zeile. Nach unserer ersten Rechnung gilt für diese Summe

$$\underbrace{\binom{n}{k-1}}_{(k-1)\text{-ter Eintrag in Zeile } n} + \underbrace{\binom{n}{k}}_{k\text{-ter Eintrag in Zeile } n} = \binom{n+1}{k}$$

Damit stehen an allen Plätzen der $(n+1)$-ten Zeile die Binomialkoeffizienten $\binom{n+1}{k}$.

Induktionsschluss: Für beliebiges n steht im Pascalschen Dreieck in der n-ten Zeile am k-ten Platz der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$.