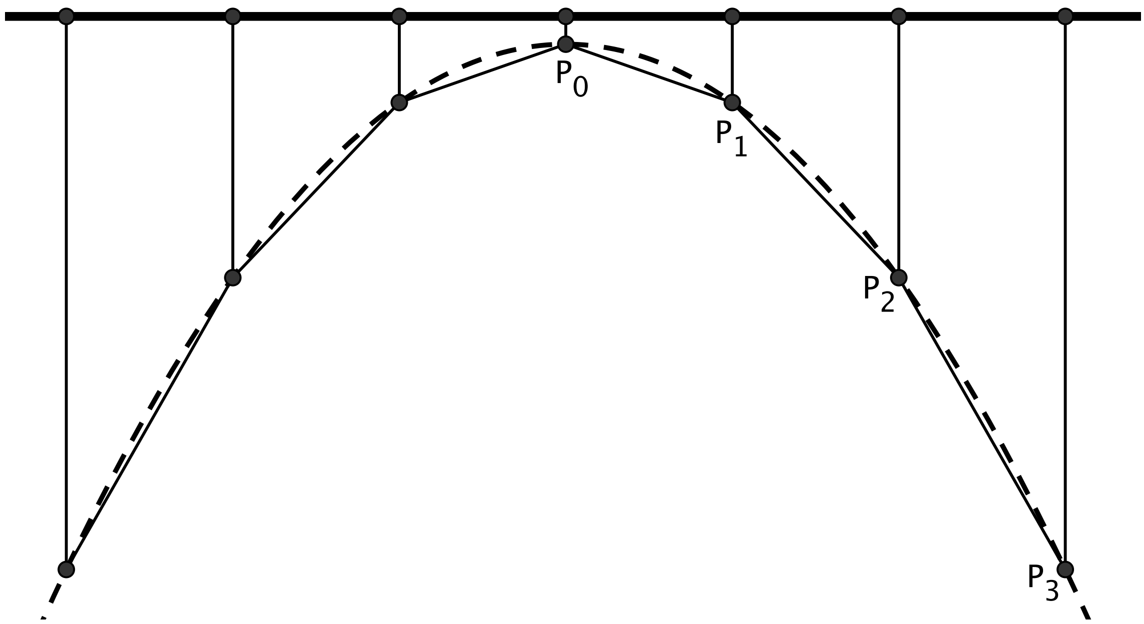
Lehrermaterial
PD. Dr. P. Lesky

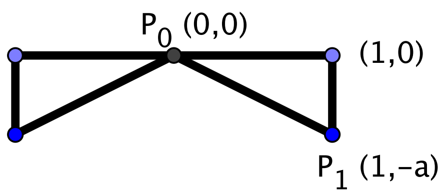
# Parabel im Brückenbau

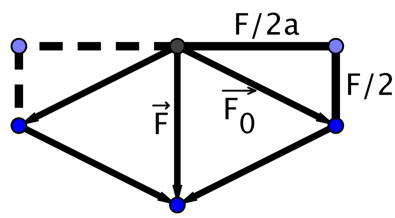



Eine Brücke ist wie in obiger Skizze durch senkrechte und schräge Balken abgestützt. Die senkrechten Stützen sind äquidistant, die Endpunkte der schrägen Balken liegen auf einer Parabel. Wir nehmen an, dass jede der senkrechten Stützen mit derselben Kraft senkrecht nach unten drückt. Dann können wir nachrechnen: In jedem der Stützpunkte $P_j$ verläuft die resultierende Kraft parallel zum schrägen Balken $P_jP_{j+1}$. Das bedeutet, dass keine Scherkräfte auftreten. Man sagt, der Polygonzug verläuft entlang der Stützlinie.

Für die Rechnung verwenden wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in $P_0$, dessen $x$-Achse parallel zum oberen Brückenrand verläuft. Die Einheiten werden so gewählt, dass die Punkte $P_j$ die $x$-Koordinaten $j$ haben. Die Parabel soll die Gleichung $y = -a\,x^2$ mit festem $a > 0$ haben. Dann sind die Koordinaten der Punkte $P_j$ $(j, -a\,j^2)$. In jedem der Punkte $P_j$ soll die Kraft $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}$ angreifen.

Die Kraft $\overrightarrow{F}$, die im Punkt $P_0$ wirkt, teilt sich in zwei Kräfte auf, die parallel zu den nach links und rechts unten verlaufenden Balken wirken:




Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

$$\overrightarrow{F_0} = \begin{pmatrix} \frac{F}{2a} \\ -\frac{F}{2} \end{pmatrix} = \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix}$$

Um die resultierende Kraft im Punkt $P_1$ zu erhalten, muss nun die Kraft $\begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}$ addiert werden. Wir sehen

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} = \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} + \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} = \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -3a \end{pmatrix},$$

und diese ist parallel zum Vektor $\overrightarrow{P_1\,P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3a \end{pmatrix}$.

Für die resultierende Kraft im Punkt $P_2$ dasselbe:

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -3a \end{pmatrix} + \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 0 \\ -2a \end{pmatrix} = \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -5a \end{pmatrix},$$

und diese ist wieder parallel zu $\overrightarrow{P_2\,P_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5a \end{pmatrix}$.

Faszinierend ist, dass dies für jede Parabel $y = -a\,x^2$ klappt. Außerdem gilt die Parallelität von Kraft $\overrightarrow{F_j}$ und Vektor $\overrightarrow{P_j\,P_{j+1}}$ auch, wenn die Parabel in $x$-Richtung verschoben wird, also keine Symmetrie zur Senkrechten durch $P_0$ mehr gegeben ist. Zur Berechnung im allgemeinen Fall siehe nächste Seite.

Zum Schluss noch ein paar Hinweise:

**Modellierung:** Zunächst ist nur die Brücke gegeben. Nun muss man überlegen, wie die Situtation mit Formeln beschrieben werden kann. Hier kann diskutiert werden, ob es wirklich allgemein genug ist, wenn die Punkte $P_j$ den $x$-Abstand 1 haben. Im Prinzip genügt es sogar, im Modell eine Normalparabel zu betrachten, wenn man die $y$-Koordinaten entsprechend wählt.

**Anwendung:** Was bringt die Konstruktion? Gibt es Brücken, die auf diese Weise konstruiert wurden? Der Vorteil unserer Konstruktion ist der, dass in den Balken keine Biegemomente auftreten, sondern nur Druckkräfte. Man kann also materialsparend arbeiten. Ein schönes Beispiel dafür ist die Alleenbrücke in Tübingen. Hier sind die schrägen Stützteile wirklich Ebenenstücke ohne Krümmung und relativ dünn. Allerdings ist hier die Parabel nicht symmetrisch zu der Lage der Stützpunkte. (`http://www.karl-gotsch.de/Album/Neckar2.htm`)

Sehr schöne parabelförmige Stützbögen findet man auch unter der Friedensbrücke bei Leonberg. Hier sind (wohl aus Schönheitsgründen) keine Knicke in den Punkten $P_j$.
`http://www.karl-gotsch.de/Monatsbruecken/2005Nov.htm`

Die betrachtete Konstruktion kann auch anders angewandt werden: Man kann die Parabel höher setzen und dann die Brücke daran aufhängen. Die Rechnung bleibt dieselbe. Ein Beispiele dafür ist der Berger Steg in Stuttgart . (`http://www.karl-gotsch.de/Album/Neckar3.htm`)

Eine weitere Anwendung sind die sogenannten Fischbauchträger. Hier wird die Parabel gespiegelt, so dass sie nach oben geöffnet ist, und die Brücke auf der Parabel abgestützt. Anstelle von Druckkräften treten hier nur Zugkräfte auf. Es würde also theoretisch genügen, die Parabelsehnen durch ein Seil zu bilden. (`http://www.karl-gotsch.de/Monatsbruecken/2007Jul.htm`)

**Literatur:** IngenieurbauFührer Baden-Württemberg / hrsg. von der Ingenieurkammer Baden-Württemberg. Jörg Schlaich; Matthias Schüller. - 1. Aufl.. - Berlin:Bauwerk-Verl. (1999)

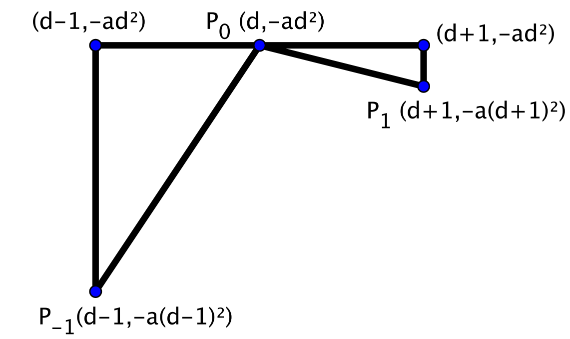
**Photos:** Eigene Bilder werden nach und nach im passwortgeschützten Lehrerbereich des Schülerzirkels zur Verfügung gestellt. Genauere Hinweise auf der Seite
`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/schuelerzirkel/lehrer.html`

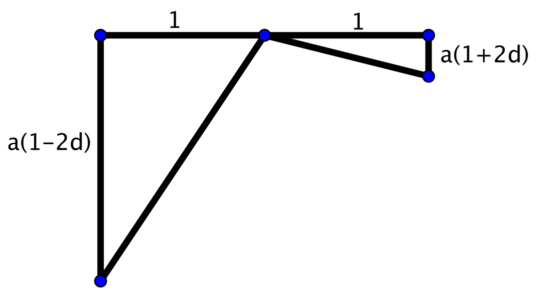
**Grafiken:** Die Grafiken wurden mit GeoGebra erstellt

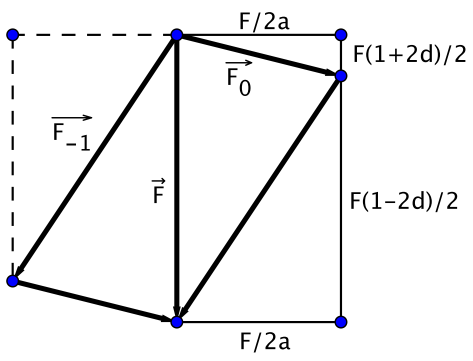
Auf dieser letzten Seite wird nun nachgerechnet, dass auch bei einer Verschiebung der Stützpunkte auf der Parabel, solange die Punkte nur bezüglich der $x$-Koordinate äquidistant liegen, die Kräfte immer entlang der Stützbalken verlaufen.

Wir nehmen wieder an, dass die Stützpunkte $P_j$ auf der Parabel $y = -a\,x^2$ liegen. Die $x$-Koordinaten der Stützpunkte seien $(d+j)$, wobei $d \in ]-1, 0]$ fest ist. D.h. die Stützpunkte sind nach links verschoben. Wir haben also $P_j\ \big((j+d), -a(j+d)^2\big)$.

Die im Punkt $P_0$ wirkende Kraft $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix}$ muss wieder entsprechend der Richtung der schrägen Stützbalken aufgespalten werden:




Die oberste der Skizzen zeigt die Punkte $P_{-1}, P_0, P_1$ mit Angabe der Koordinaten, die mittlere zeigt dieselben Dreiecke, aber mit Angabe der notwendigen Seitenlängen, die unterste Skizze zeigt schließlich das Kräfteparallelogramm für den Punkt $P_0$.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke und der Länge $F$ des Vektors $\overrightarrow{F}$ folgen die in der untersten Skizze angegebenen Seitenlängen. Zur Kontrolle:

$$\begin{aligned}
\frac{F(1+2d)}{2} + \frac{F(1-2d)}{2} &= F, \\
\frac{F(1+2d)/2}{F/2a} &= \frac{a(1+2d)}{1}, \\
\frac{F(1-2d)/2}{F/2a} &= \frac{a(1-2d)}{1}.
\end{aligned}$$

Damit folgen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_1} &= \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -a(1+2d) \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{F_2} &= \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F} = \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -a(3+2d) \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{F_3} &= \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F} = \frac{F}{2a}\begin{pmatrix} 1 \\ -a(5+2d) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Diese Vektoren sind parallel zu den Balken

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} &= \begin{pmatrix} 2+d \\ -a(2+d)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+d \\ -a(1+d)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -a(3+2d) \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{P_2P_3} &= \begin{pmatrix} 3+d \\ -a(3+d)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+d \\ -a(2+d)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -a(5+2d) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Genauso kann man die Parallelität der anderen Kraftvektoren zu den Vektoren $\overrightarrow{P_j\,P_{j+1}}$ nachweisen.