Trigonometrie

Im Schülerseminar für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 8 – 10 wurde die Trigonometrie innerhalb der Einheit über komplexe Zahlen behandelt, um sie gleich bei der Potenzierung komplexer Zahlen anwenden zu können. Daher ist dieses Skript ein Ausschnitt aus dem Skript zu dem komplexen Zahlen.

Das vorliegende Skript enthält eine Zusammenstellung der Materialien, die für das Schülerseminar in mehreren Durchgängen erarbeitet wurden. Das Schülerseminar wird meist im Rahmen von Fachdidaktischen Übungen von Lehramtsstudierenden abgehalten. In diesem Zusammenhang möchte ich Fau Meike Opitz erwähnen, von der die Aufgaben 1, 2, 3, 10, 11, 12 und 14 beigesteuert wurden. Die Anwendungsaufgaben 15 – 17 wurden erst nachträglich ergänzt und nie im Schülerseminar gestellt.

Das Material ist in drei Abschnitte gegliedert: Im ersten werden die Inhalte und Aufgaben ohne Lösung vorgestellt. Der zweite Abschnitt enthält einen geometrischen Beweis der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus für beliebige Winkel. Der dritte Abschnitt beinhaltet alle Aufgaben mit ausführlichen Lösungen.

Über Rückmeldungen und Verbesserungsvorschläge per Email an `lesky@math.uni-stuttgart.de` freue ich mich.

Stuttgart, 27. Mai 2013 Peter Lesky

Trigonometrie

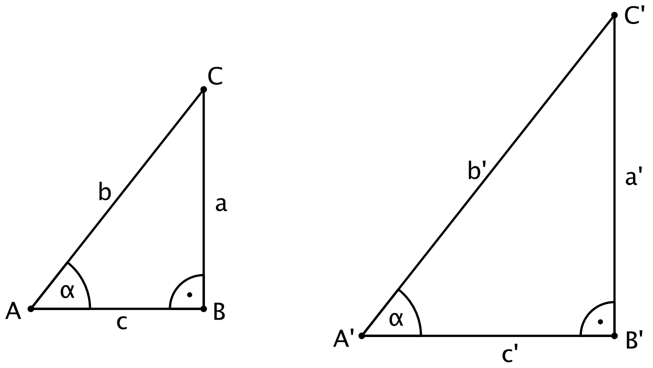
Wiederholung

Definition: Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen **ähnlich**, wenn man das Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung so vergrößern oder verkleinern kann, dass das daraus entstehende Bilddreieck zu dem Dreieck $A'B'C'$ kongruent ist.

Satz: Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind genau dann ähnlich, wenn entsprechende Winkel gleich groß sind.

Satz: Sind zwei Dreiecke ähnlich, dann stimmen die Verhältnisse der Längen entsprechender Seiten überein.

Rechtwinklige Dreiecke



Die Dreicke sind ähnlich, also gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{|BC|}{|AC|} &= \frac{|B'C'|}{|A'C'|} \\
\frac{|BC|}{|AB|} &= \frac{|B'C'|}{|A'B'|} \\
\frac{|AB|}{|AC|} &= \frac{|A'B'|}{|A'C'|}
\end{aligned}
$$

Für rechtwinklige Dreiecke definiert man Abkürzungen für die Seitenverhältnisse.

Definition: In einem Dreieck ABC mit Winkel $\beta = 90°$ definieren wir:

$$
\begin{aligned}
\frac{|BC|}{|AC|} &=: \sin\alpha \qquad \textbf{Sinus} \\
\frac{|BC|}{|AB|} &=: \tan\alpha \qquad \textbf{Tangens} \\
\frac{|AB|}{|AC|} &=: \cos\alpha \qquad \textbf{Cosinus}
\end{aligned}
$$

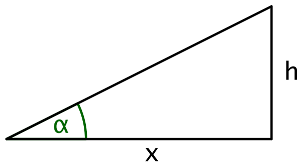
Merke: $\sin\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete(nlänge)}}{\text{Hypotenuse(nlänge)}}, \quad \cos\alpha = \dfrac{\text{Ankathete(nlänge)}}{\text{Hypotenuse(nlänge)}}$

Satz: In einem Dreieck ABC mit $\beta = 90°$ gelten:

$$
\tan\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|AC|}\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}
$$

Aufgabe 1

Um die Entfernung x eines Schiffes zu einem Leuchtturm zu bestimmen, haben die Seemänner früher mit einem Sextanten den Winkel α gemessen, unter dem sie die Leuchtturmspitze über dem Horizont sahen. Die Leichtturmhöhe h konnte aus den Seekarten abgelesen werden. Sei nun $\alpha = 5°$ und $h = 50$m. Berechne die Entfernung des Schiffes zum Leuchtturm.



Geogebra-Datei: leuchtturm1

Aufgabe 2

Ein Quader besitzt die Kantenlängen $a = 8,5$ cm; b=$4,2$ cm; $c = 5,9$cm. Wie groß sind die Winkel zwischen

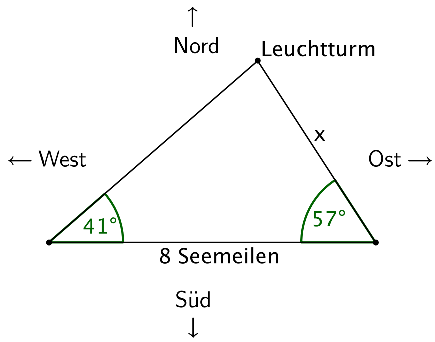
a) den Flächendiagonalen und den Kanten?

b) einer Raumdiagonale und den Kanten?

Hinweis: Fertige eine Skizze an.

Aufgabe 3

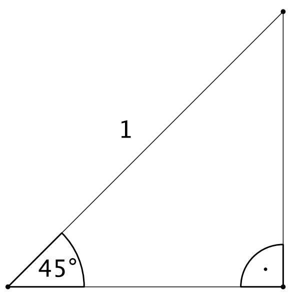
Ein Schiff fährt genau auf ostwärts gerichtetem Kurs. Ein Leuchtturm wird zunächst unter einem Winkel von $41°$ zur Ostrichtung gesehen. Nachdem das Schiff 8 Seemeilen zurückgelegt hat, muss man zum Leuchtturm zurück sehen. Nun beträgt der Winkel zur Westrichtung $57°$. Berechne, welche Entfernung x das Schiff vom Leuchtturm hat (in Seemeilen).
Hinweis: Zeichne im Dreieck eine geeignete Höhe ein (nicht irgendeine Höhe).



Geogebra-Datei: schiff-leuchtturm1

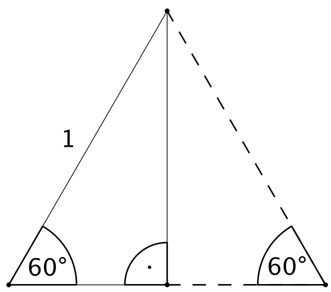
Aufgabe 4

a) Bestimme die exakten Werte von $\sin 45°$, $\cos 45°$.



Geogebra-Datei: sinus-45

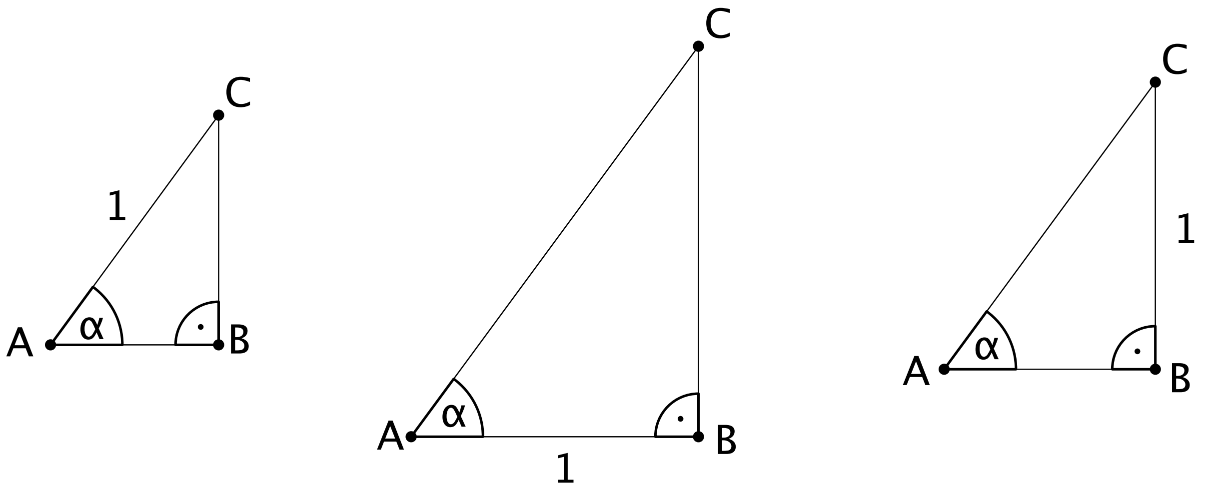
b) Bestimme die exakten Werte von $\sin 60°$, $\cos 60°$, $\sin 30°$, $\cos 30°$.



Geogebra-Datei: sinus-60

Aufgabe 5

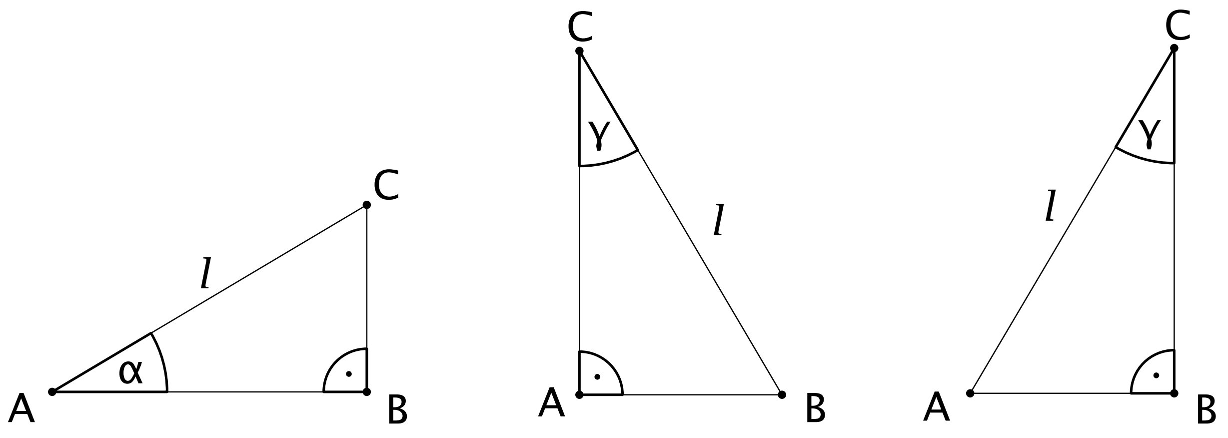
Bei den folgenden Dreiecken ist eine der Seitenlängen 1(LE) wie angegeben. Schreibe jeweils an die anderen beiden Seiten die Länge als Funktion von α:



Geogebra-Datei: sinus-cosinus-1

Aufgabe 6

Bei den folgenden Dreiecken ist eine der Seitenlängen l(LE) wie angegeben. Schreibe jeweils an die anderen beiden Seiten die Länge als Funktion von l und dem angegebenen Winkel:



Geogebra-Datei: sinus-cosinus-2

Aufgabe 7

Ein regelmäßiges Fünfeck habe die Seitenlänge 4cm. Berechne den Radius des Umkreises mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen (Taschenrechner nötig).
Zeichne zuerst den Umkreis mit dem berechneten Radius und dann das Fünfeck, indem Du die Seitenlänge mit dem Zirkel entlang des Umkreises abträgst.
Tipp: Fertige eine Skizze, zeichne die Verbindungslinien von den Ecken zum Umkreismittelpunkt ein. Eine Höhenlinie in einem der entstehenden Dreiecke kann hilfreich sein.

Satz: **1)** Für $0 < \alpha < 90°$ gelten:
$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \sin(90° - \alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90° - \alpha) &= \sin\alpha \end{aligned}$$

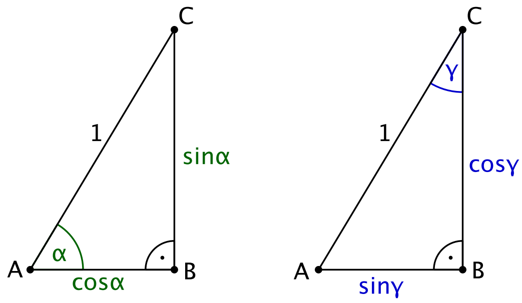
2) Folgende Werte für Sinus und Cosinus können exakt angegeben werden:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Beweis: **1)** Für die Gleichung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ wende Pythagoras im ersten Dreieck von Aufgabe 5 an.

Die zweite und dritte Gleichung folgen aus nebenstehender Skizze unter Beachtung von $\gamma = 90° - \alpha$.

2) Die Werte in der Tabelle wurden in Aufgabe 4 berechnet.



Sinus und Cosinus als Funktionen

Aufgabe 8

Es sei P_α der Schnittpunkt der Halbgeraden g_α, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht, mit dem Einheitskreis. Skizziere jeweils den Einheitskreis, die Halbgerade g_α, und bestimme die Koordinaten (x, y) von P_α. Verwende für a) bis d) die Tabelle aus dem letzten Satz.

a) $\alpha = 30°$,

b) $\alpha = 210°$,

c) $\alpha = 120°$,

d) $\alpha = -30°$,

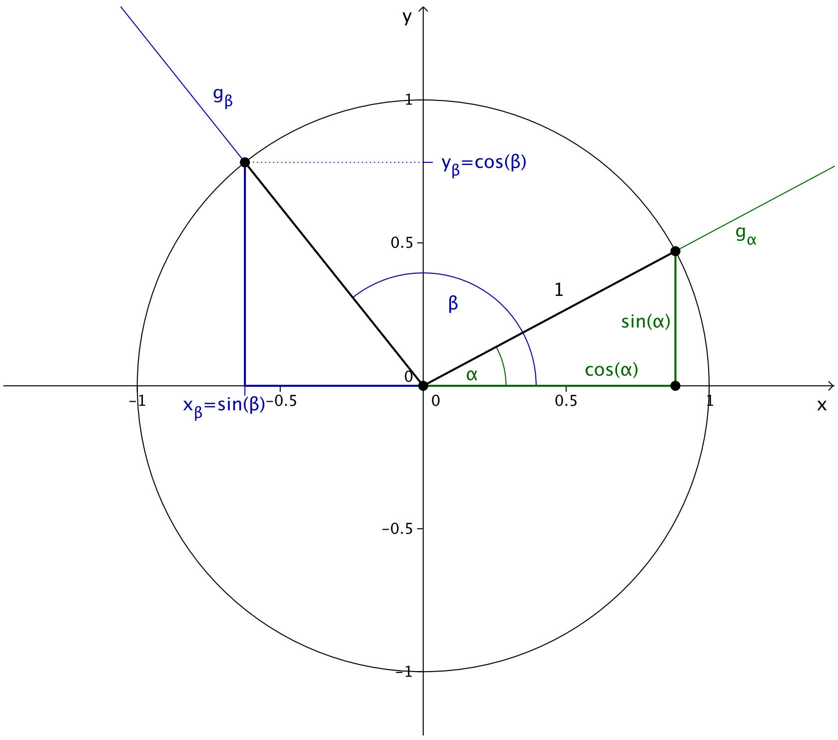
e) $\alpha = 190°$ (mit Taschenrechner),

f) $\alpha = 280°$ (mit Taschenrechner).

Satz: Es sei $0° < \alpha < 90°$ und g_α die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Dann hat der Schnittpunkt P_α von g_α mit dem Einheitskreis die Koordinaten $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Definition: Für beliebige Winkel α sei P_α der Schnittpunkt des Einheitskreises mit der Halbgeraden g_α, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht (für $\alpha < 0$ Drehung mit Winkel $|\alpha|$ im Uhrzeigersinn). P_α habe die Koordinaten (x_α, y_α). Wir definieren:
$$\sin\alpha := y_\alpha, \qquad \cos\alpha := x_\alpha.$$

Dies definiert $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ für beliebige Winkel α. Nach dem ersten Satz stimmt diese Definition für $0° < \alpha < 90°$ mit der alten Definition überein.



Aufgabe 9

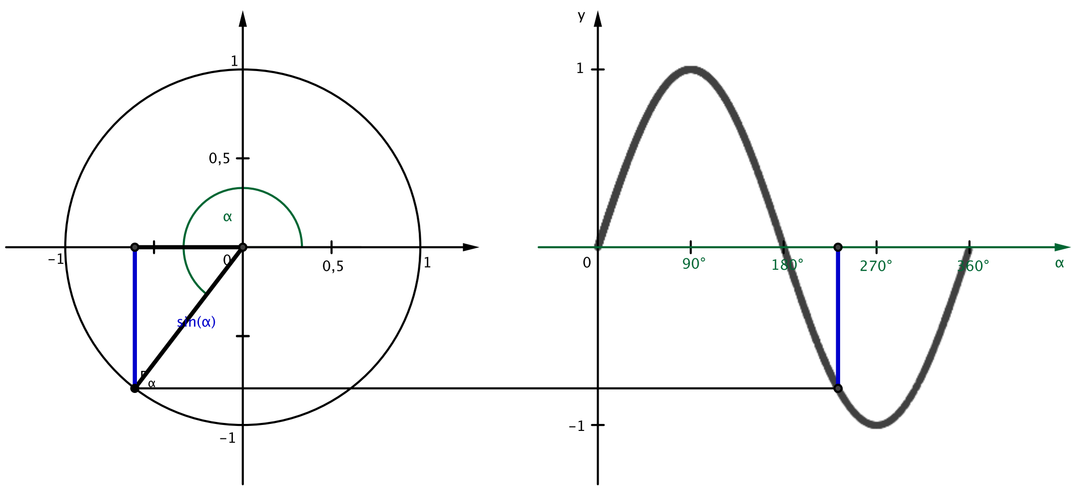
Fülle die folgende Wertetabelle mit Hilfe der Tabelle aus dem letzten Satz ohne Verwendung eines Taschenrechners aus:

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$450°$	$-90°$	$45°$	$-45°$	$135°$	$225°$
$\sin\alpha$											
$\cos\alpha$											

Aufgabe 10

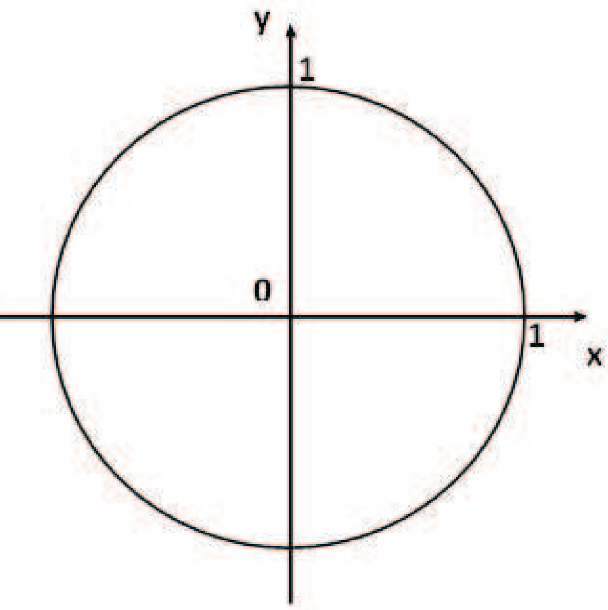
In der untenstehenden Zeichnung siehst Du, wie man vom Einheitskreis ausgehend das Schaubild der Sinusfunktion zeichnen kann.

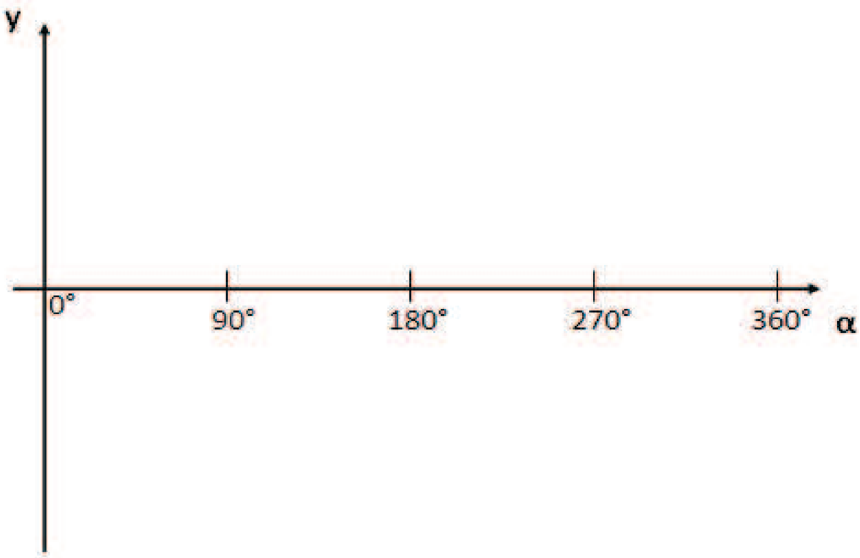
Führe das im nächsten Arbeitsblatt nochmal für den Sinus aus (rechtes Koordinatensystem) und entsprechend für die Kosinusfunktion in dem Koordinatensystem, bei dem die α-Achse nach unten zeigt.

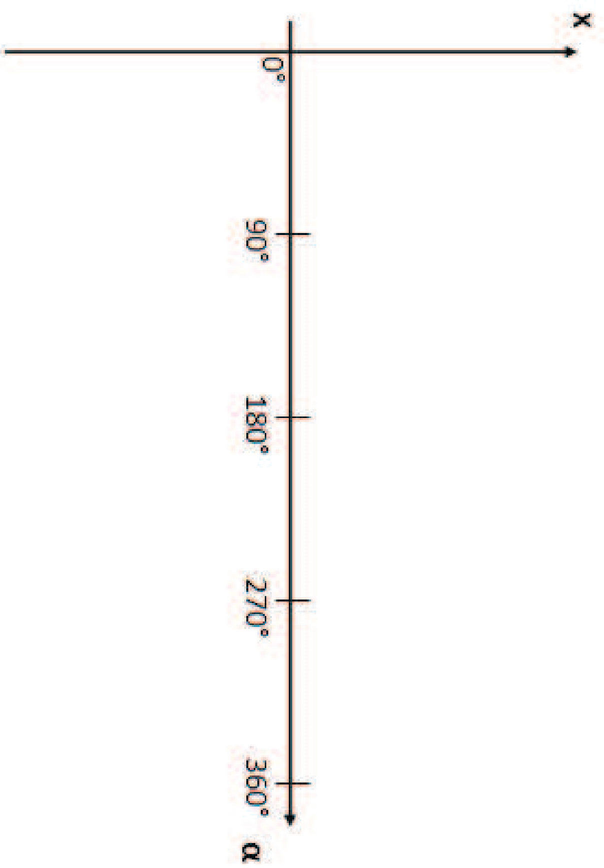


Geogebra-Datei: sinus

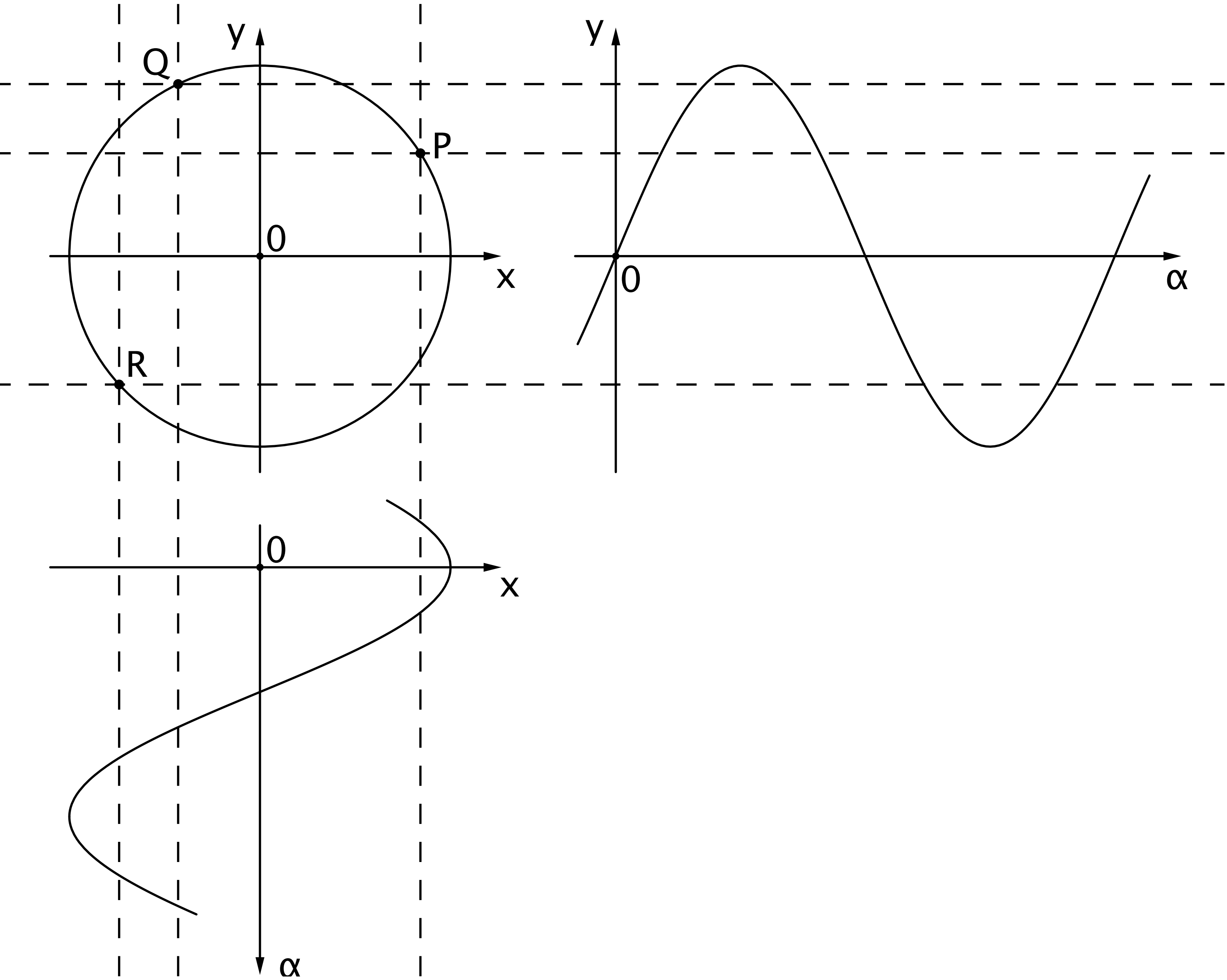
Arbeitsblatt
Sinus und Cosinus als Funktionen







Sinus und Cosinus als Funktionen

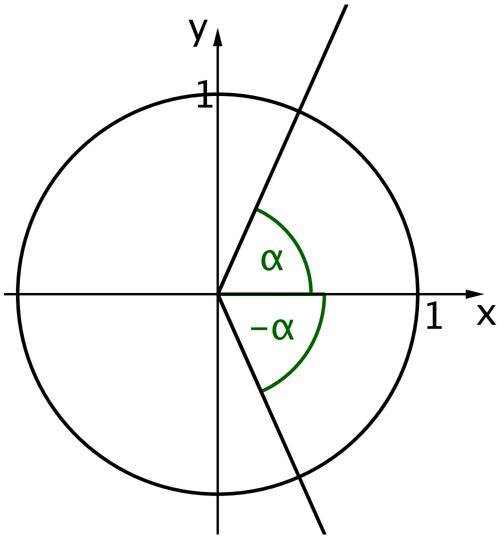


Aufgabe 11

Drücke durch $\sin\alpha,\ \cos\alpha$ aus:

$\sin(-\alpha) =$

Hilfestellung: In der nebenstehenden Skizze sind die Winkel α und $-\alpha$ im Einheitskreis eingetragen. Zeichne nun zu dem Winkel α und $-\alpha$ jeweils den Sinus ein. Welche Beziehung zwischen den beiden Größen erhältst Du?



Geogebra-Datei: sinus–alpha

Verfahre bei den folgenden Beispielen analog (Einheitskreise zum Einzeichnen der Winkel liegen auf einem extra-Blatt bereit)

$\cos(-\alpha) =$

$\sin(180^\circ - \alpha) =$

$\cos(180^\circ - \alpha) =$

$\sin(180^\circ + \alpha) =$

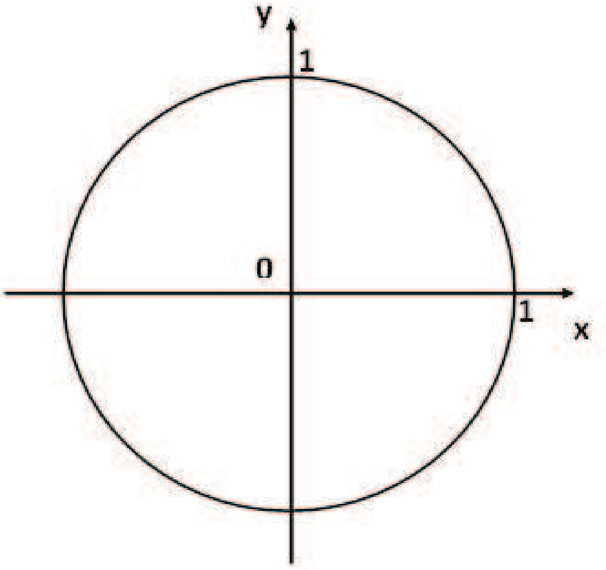
$\cos(180^\circ + \alpha) =$

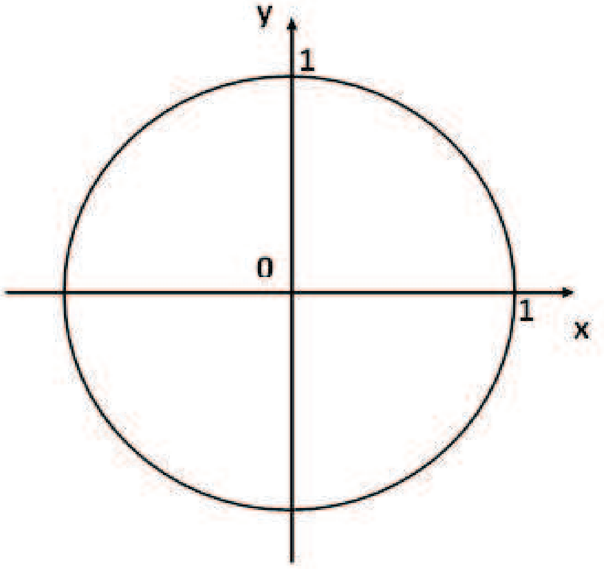
Satz: Für beliebige Winkel α gelten:

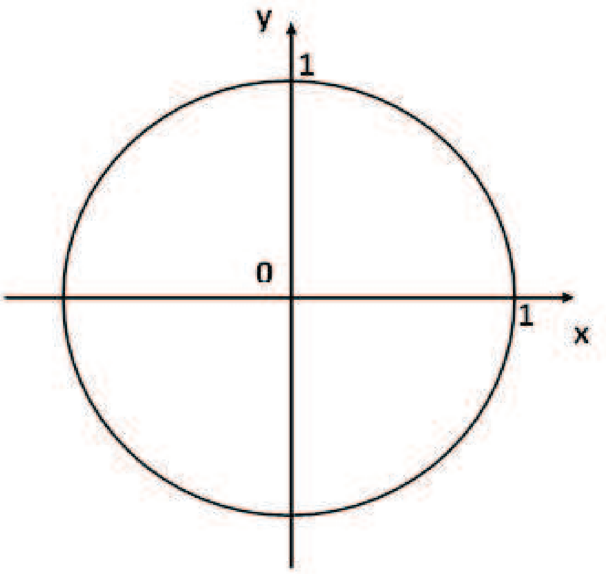
$$
\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1\\
\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\\
\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha)\\
\sin(360^\circ + \alpha) &= \sin\alpha,\\
\cos(360^\circ + \alpha) &= \cos\alpha
\end{aligned}
$$

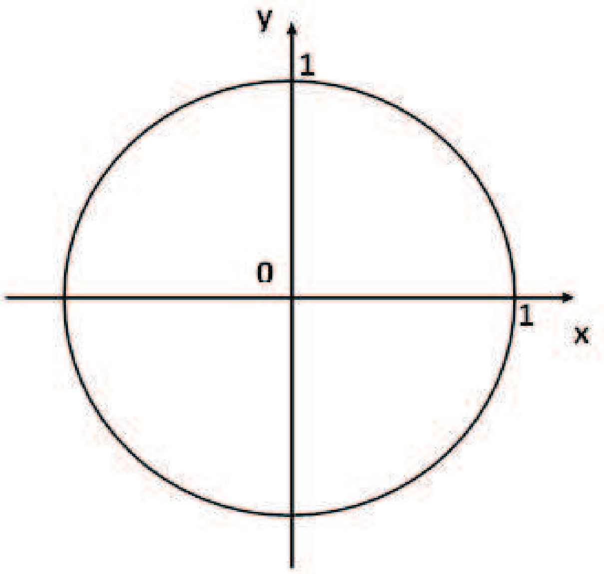
Beweis am Einheitskreis.

Zu der Aufgabe 1:





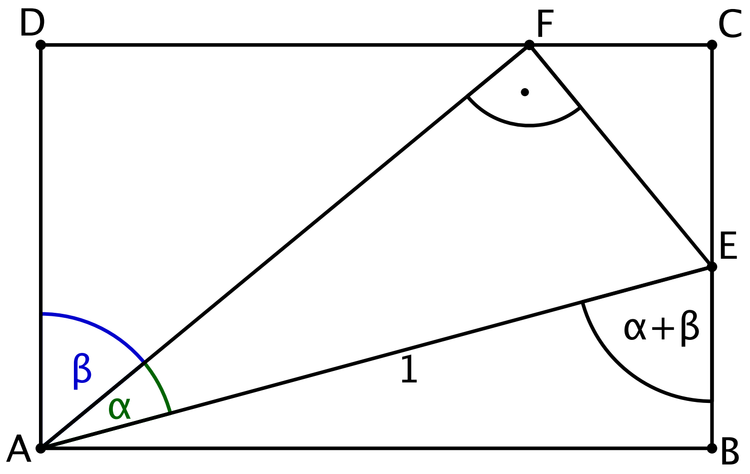




Aufgabe 12

In einem Rechteck ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenlänge 1 eingezeichnet (siehe Skizze). Gib alle nicht rechten Winkel in Abhängigkeit von α, β an. Berechne zudem alle Streckenlängen mit Hilfe der Funktionen Sinus und Cosinus. Folgere hieraus die Gültigkeit der **Additionstheoreme**:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\ \cos(\beta)+\cos(\alpha)\ \sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\ \cos(\beta)-\sin(\alpha)\ \sin(\beta)\end{aligned}$$



Geogebra-Datei: sinus–alpha

Satz: Für beliebige Winkel α, β gelten die **Additionstheoreme:**

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\ \cos(\beta)+\cos(\alpha)\ \sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\ \cos(\beta)-\sin(\alpha)\ \sin(\beta)\end{aligned}$$

Beweis siehe Anhang.

Aufgabe 13

Verwende für diese Aufgabe die Additionstheoreme und die Werte aus der nebenstehenden Tabelle

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

a) Stelle $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ durch $\cos(2\alpha)$ dar.

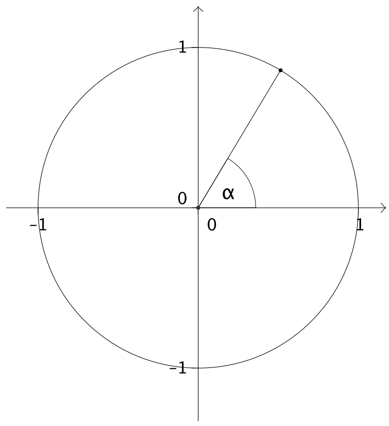
b) Trage in die Tabelle exakte Werte ein:

α	$30°$	$15°$	$7,5°$
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			

Aufgabe 14

Kreuze an, welche der folgenden Aussagen wahr sind:
Hinweis: In jedem Block ist nur eine Gleichung richtig.

$\sin(\alpha + 360°) = \sin(\alpha)$	☐	$\sin(-\alpha) = \sin(\alpha)$	☐
$\sin(\alpha + 360°) = -\sin(\alpha)$	☐	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	☐
$\sin(\alpha + 360°) = \cos(\alpha)$	☐	$\sin(-\alpha) = \cos(\alpha)$	☐
$\sin(\alpha + 360°) = -\cos(\alpha)$	☐	$\sin(-\alpha) = -\cos(\alpha)$	☐
$\sin(\alpha + 180°) = \sin(\alpha)$	☐	$\sin(\alpha + 90°) = \sin(\alpha)$	☐
$\sin(\alpha + 180°) = -\sin(\alpha)$	☐	$\sin(\alpha + 90°) = -\sin(\alpha)$	☐
$\sin(\alpha + 180°) = \cos(\alpha)$	☐	$\sin(\alpha + 90°) = \cos(\alpha)$	☐
$\sin(\alpha + 180°) = -\cos(\alpha)$	☐	$\sin(\alpha + 90°) = -\cos(\alpha)$	☐



Anwendungsaufgaben

Aufgabe 15

a) Leite aus den Additionstheoremen Formeln für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ her.

b) Rechne mit Hilfe der Additionstheoreme nach, dass

$$\sin\alpha - \sin\beta \;=\; 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

gilt.
Hinweis: Nicht mit der rechten Seite anfangen zu rechnen! Wende eines der Additionstheorem auf

$$\sin\alpha \;=\; \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

an. Verwende eine entsprechende Aufblähung für $\sin\beta$.

Aufgabe 16

Welche Spannung kommt aus der Steckdose?
Aus der Steckdose kommt Wechselspannung der Form $u(t) = a\sin(\omega t)$ mit $\omega = 50 \cdot 360° \frac{1}{\text{sec}}$.
Die Angabe „220 Volt“ bedeutet aber nicht $a = 220$. Sie bedeutet, dass bei einem angeschlossenen Widerstand dieselbe Leistung erzeugt wird wie beim Anschluss desselben Widerstandes an eine Gleichspannung von 220 Volt. Die Leistung ist proportional zum Quadrat der Spannung, egal welchen Widerstand man anschließt.

Bestimme a so, dass das Integral $\int_0^1 u^2(t)\,\mathrm{d}t$ denselben Wert ergibt wie $\int_0^1 220^2\,\mathrm{d}t$ (Integral über die konstante Funktion).
Hinweis: Die Formel $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ kann hilfreich sein.

Didaktische Reduktion: Für die folgende Aufgabe wurde der Unterschied zwischen effektiver Spannung und Amplitude (vgl. vorige Aufgabe) nicht berücksichtigt. Will man mit den Zahlen der Realität rechnen, so müsste die Amplitude mit $\sqrt{2}$ multipliziert werden. Aber dann sieht man die bekannten Zahlen 220 Volt und 380 Volt nur, wenn dieser Faktor wieder wegdividiert wird.

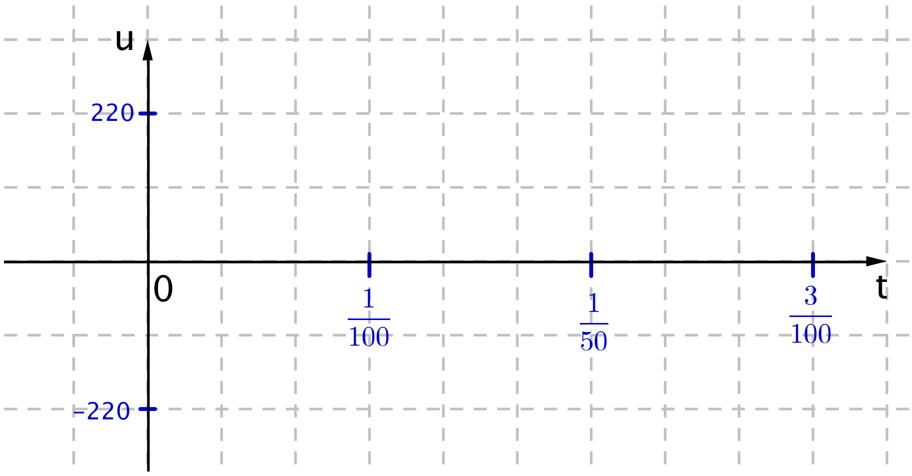
Aufgabe 17

220 *Volt* -220 *Volt ergibt nicht unbedingt* 0 *Volt:*
Ein Elektrizitätswerk liefert Drehstrom, d.h. drei Wechselspannungen der Form

$$u_1(t) = 220\sin(\omega t), \qquad u_2(t) = 220\sin(\omega t + \delta), \qquad u_3(t) = 220\sin(\omega t + 2\delta)$$

(Angaben in Volt). Da die Spannungen eine Frequenz von 50 Herz (=Schwingungen pro Sekunde) haben, gilt $\omega = 50 \cdot 360° \, \frac{1}{\text{sec}}$. Die Phasenverschiebung beträgt $\delta = 120°$.

a) Skizziere die Spannungsverläufe im Koordinatensystem.

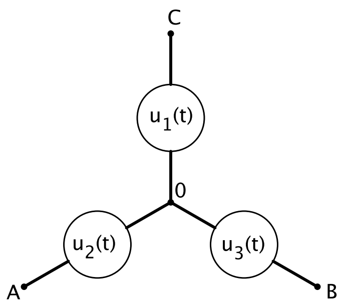


Geogebra-Datei: drehstrom

b) Die Leitungen sind so zusammengeschaltet, dass sich die Spannungen abziehen, wenn ein Verbraucher entsprechend angeschlossen wird (Z.B. an die Punkte A und C im Schaltbild unten). Benütze die Additionstheoreme, um den Spannungsverlauf der Differenz $u_2 - u_1$ in der Form $u_2(t) - u_1(t) = a\sin(\omega t + \gamma)$ zu berechnen. Gib a und γ an.
Hinweis: Hilfreiche Formeln sind

$$\sin\alpha - \sin\beta \;=\; 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und $\cos\alpha = \sin(90° + \alpha)$.
Schaltbild:



Geogebra-Datei: drehstrom-schaltbild

Anhang 1
Geometrischer Beweis der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

Der Satz

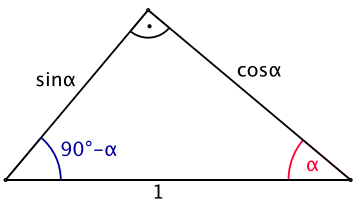
Die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus lauten:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,\end{aligned}$$

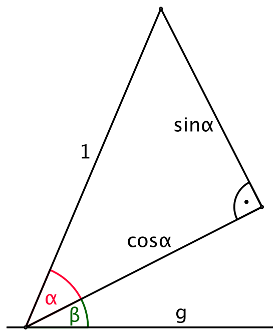
und gelten für beliebige Winkel α, β.

Beweis für den Fall $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$

Zum Beweis wird ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert, bei dem ein Winkel die Größe von α und die Hypotenuse die Länge 1 hat. Dies ist für jeden Winkel α zwischen 0° und 90° möglich.

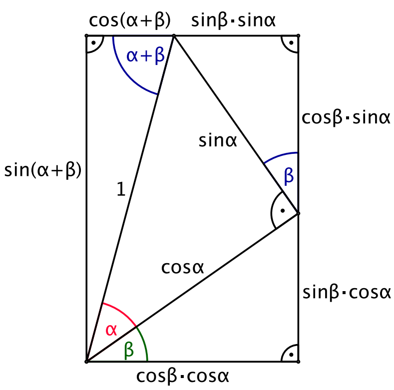


Dann wird das Dreieck so gedreht, dass die am Winkel α anliegende Kathete mit einer (am Besten waagrecht gezeichneten) Geraden g den Winkel β einschließt, siehe rechts.

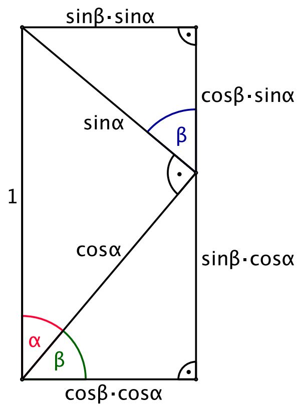


Anschließend wird ein Rechteck mit zu g parallelen bzw. senkrechten Seiten um das Dreieck herumgelegt, siehe unten. Dabei müssen drei Fälle unterschieden werden:

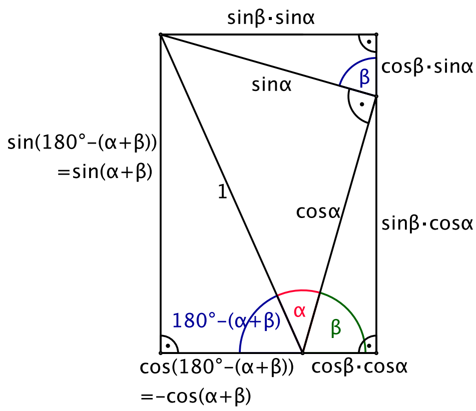
Fall 1: $\alpha+\beta < 90^\circ$



Fall 2: $\alpha+\beta = 90^\circ$



Fall 3: $\alpha+\beta > 90^\circ$



Die blau eingezeichneten Winkel ergeben sich aus den vorgegebenen Winkeln α, β:
Der blaue Winkel β durch Drehung des grünen Winkels um 90°, der Winkel $\alpha+\beta$ als Wechselwinkel, und der Winkel $180^\circ-(\alpha+\beta)$ als Ergänzungswinkel.

An den senkrechten Seiten des Rechteck liest man ab:

$$\cos\beta\cdot\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha = \begin{cases}\sin(\alpha+\beta) & \text{im Fall 1 und Fall 3}\\ 1 = \sin(90^\circ)=\sin(\alpha+\beta) & \text{im Fall 2}\end{cases}$$

Dies ist das erste der Additionstheoreme.

An den waagrechten Seiten des Rechteck liest man ab:

$$\begin{array}{ll} \text{Fall 1:} & \cos(\alpha+\beta) + \sin\beta\cdot\sin\alpha \;=\; \cos\beta\cdot\cos\alpha \\ \text{Fall 2:} & \sin\beta\cdot\sin\alpha - \cos\beta\cdot\cos\alpha \;=\; 0 \;=\; \cos(90^\circ) \;=\; \cos(\alpha+\beta) \\ \text{Fall 3:} & \sin\beta\cdot\sin\alpha \;=\; -\cos(\alpha+\beta) + \cos\beta\cdot\cos\alpha \end{array}$$

In allen drei Fällen folgt durch Auflösen nach $\cos(\alpha+\beta)$ das zweite der Additionstheoreme.

Der Beweis im Fall $\alpha = 0^\circ$:

Für das erste Additionstheorem:

$$\begin{array}{rl} \text{Linke Seite:} & \sin(\alpha+\beta) \;=\; \sin\beta \\ \text{Rechte Seite:} & \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = 0\cdot\cos\beta + 1\cdot\sin\beta = \sin\beta = \text{Linke S.} \end{array}$$

Also stimmt das erste der Additionstheoreme auch in diesem Spezialfall. Genauso:

$$\begin{array}{rl} \text{Linke Seite:} & \cos(\alpha+\beta) \;=\; \cos\beta \\ \text{Rechte Seite:} & \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = 1\cdot\cos\beta + 0\cdot\sin\beta = \cos\beta = \text{Linke S.} \end{array}$$

Andere Winkel

Die weiteren Fälle $\alpha \geq 90^\circ$ oder $\beta \geq 90^\circ$ können mit Hilfe der Beziehungen

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - 90^\circ) \qquad (*)$$
$$\cos(\alpha) = -\sin(\alpha - 90^\circ) \qquad (**)$$

auf die bereits bewiesenen zurückgeführt werden.

Exemplarisch behandeln wir den Fall $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$, $0 \leq \beta < 90^\circ$. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha+\beta-90^\circ) \;=\; \cos\big(\underbrace{(\alpha-90^\circ)}_{\geq 0^\circ,\ <90^\circ}+\beta\big) \\ &\underset{\text{bereits beweisener Fall}}{\overset{\text{Additionstheorem für cos}}{=}} \cos(\alpha-90^\circ)\cdot\cos\beta - \sin(\alpha-90^\circ)\cdot\sin\beta \\ &\overset{(*)\text{ und }(**)}{=} \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta. \end{aligned}$$

Genauso:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= -\sin(\alpha+\beta-90^\circ) \;=\; -\sin\big((\alpha-90^\circ)+\beta\big) \\ &\underset{\text{für sin}}{\overset{\text{Additionstheorem}}{=}} -\sin(\alpha-90^\circ)\cdot\cos\beta - \cos(\alpha-90^\circ)\cdot\sin\beta \\ &\overset{(*)\text{ und }(**)}{=} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta. \end{aligned}$$

Man kann nun durch Wiederholung dieses Arguments und durch Anwendung dieses Arguments mit Vertauschung von α, β beweisen, dass die Additionstheoreme für beliebige Winkel $0^\circ \leq \alpha, \beta < 360^\circ$ gelten. Mit der Periodizität der Winkelfunktionen folgt dann der Beweis für den allgemeinen Fall.

Vorschläge für Aufgaben zum Beweis

Möglichkeit 1: Fragend-entwickelnd wird der erste Fall gemeinsam behandelt. Dann kann folgende Aufgabe gestellt werden:

Aufgabe

a) Berechne im nebenstehenden Bild die zwei blau eingezeichneten Winkel aus α und β und trage Dein Ergebnis in die Skizze ein.

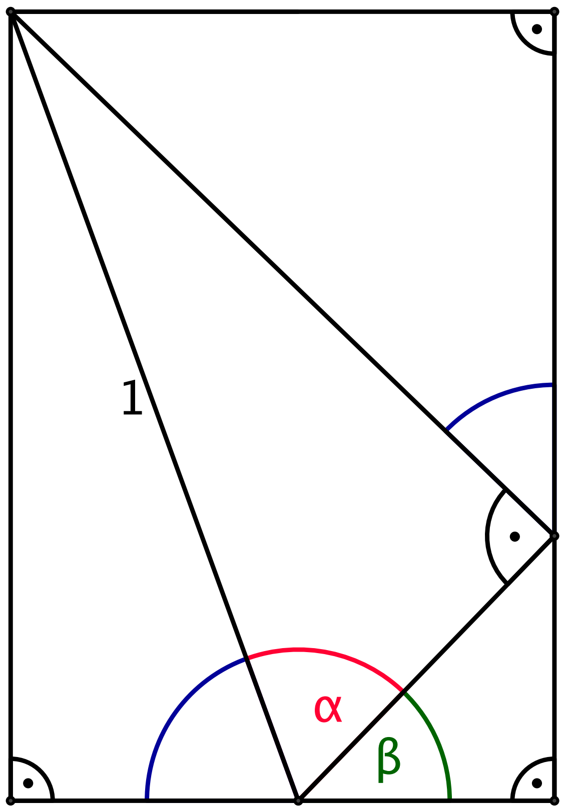
b) Berechne die Seitenlängen der vier rechtwinkligen Dreiecke, deren rechte Winkel eingezeichnet sind. Beginne mit dem inneren Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge 1 hat. Schreibe Dein Ergebnis jeweils an die Dreiecksseite, zu der es gehört. Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin(180° - \gamma) &= \sin(\gamma) \\ \cos(180° - \gamma) &= -\cos(\gamma) \end{aligned}$$

kannst Du die Seitenlängen des linken Dreiecks noch einfacher angeben.

c) Schreibe die Beziehungen auf, die sich daraus ergeben, dass gegenüberliegende Seiten im Rechteck gleich lang sind.

d) Stelle $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ durch $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ dar und vergleiche mit den Formeln, die im Fall $\alpha + \beta < 90°$ bewiesen wurden.



Man kann nun noch die Frage anschließen:

e) Wie könnte eine Beweisfigur für den Fall $\alpha + \beta = 90°$ aussehen? In diesem Fall kannst Du die Werte von $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ explizit angeben. Zeige mit Deiner Beweisfigur, dass auch in diesem Fall die Formeln für $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$ stimmen.

Möglichkeit 2: Die Schülerinnen und Schüler entdecken den Beweis selber.

Aufgabe

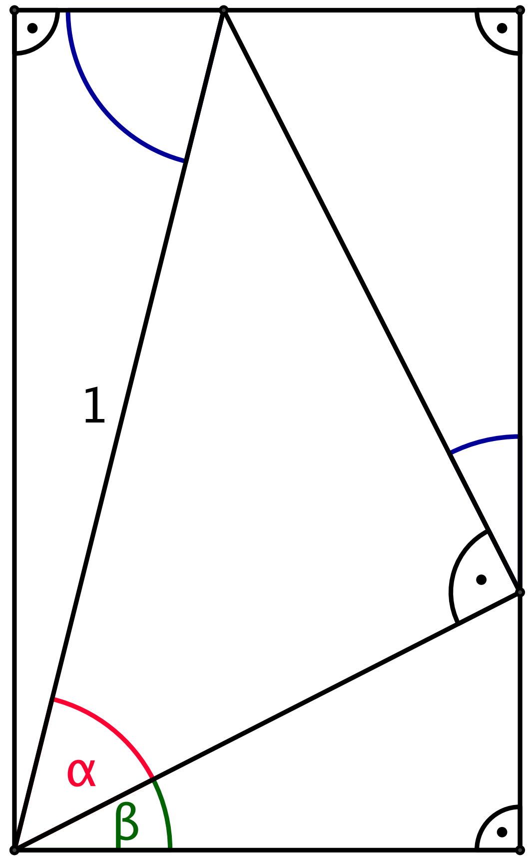
In dieser Aufgabe kannst Du herausfinden, wie man $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ durch $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ berechnen kann.

a) Berechne im nebenstehenden Bild die zwei blau eingezeichneten Winkel aus α und β und trage Dein Ergebnis in die Skizze ein.

b) Berechne die Seitenlängen der vier rechtwinkligen Dreiecke, deren rechte Winkel eingezeichnet sind, mit Hilfe von $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$. Beginne mit dem inneren Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge 1 hat. Schreibe Dein Ergebnis jeweils an die Dreiecksseite, zu der es gehört.

c) Schreibe die Beziehungen auf, die sich daraus ergeben, dass gegenüberliegende Seiten im Rechteck gleich lang sind.

d) Stelle $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ durch $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ dar.



Alternativ kann man die Aufgabe durch Angabe der Additionstheoreme vereinfachen:

Aufgabe

Die Werte von $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ können aus $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,\end{aligned}$$

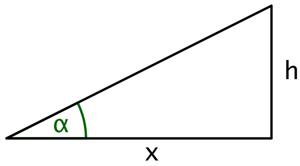
Dies kannst Du in dieser Aufgabe für $\alpha+\beta<90^\circ$ beweisen.

Dann a), b), c) wie oben.

d) Kannst Du nun die oben angegebenen Formeln für $\cos(\alpha+\beta)$ und $\sin(\alpha+\beta)$ beweisen?

Anhang 2 zur Trigonometrie
Alle Aufgaben mit Lösungen

1) Um die Entfernung x eines Schiffes zu einem Leuchtturm zu bestimmen, haben die Seemänner früher mit einem Sextanten den Winkel α gemessen, unter dem sie die Leuchtturmspitze über dem Horizont sahen. Die Leichtturmhöhe h konnte aus den Seekarten abgelesen werden. Sei nun $\alpha = 5°$ und $h = 50$m. Berechne die Entfernung des Schiffes zum Leuchtturm.



Geogebra-Datei: leuchtturm1

Lösung: Es gilt $\frac{h}{x} = \tan\alpha$, also $x = \frac{50}{\tan 5°}\,\text{m} \approx 571{,}5\,\text{m}$.

2) Ein Quader besitzt die Kantenlängen $a = 8{,}5$ cm; b=$4{,}2$ cm; $c = 5{,}9$cm. Wie groß sind die Winkel zwischen

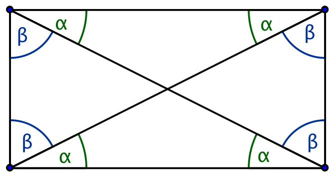
a) den Flächendiagonalen und den Kanten?

b) einer Raumdiagonale und den Kanten?

Hinweis: Fertige eine Skizze an.

Lösung:

a) Es genügt, den Winkel α zu berechnen, da $\beta = 90° - \alpha$.



Geogebra-Datei: quader1-loesung

a_1) Bei der Seitenfläche mit Seitenlängen $8{,}5$ und $4{,}2$ cm:

$$\tan\alpha = \frac{4{,}2}{8{,}5} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 26{,}3°.$$

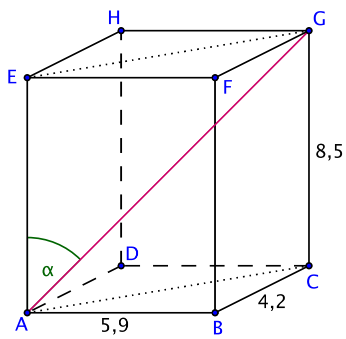
a_2) Bei der Seitenfläche mit Seitenlängen $8{,}5$ und $5{,}9$ cm:

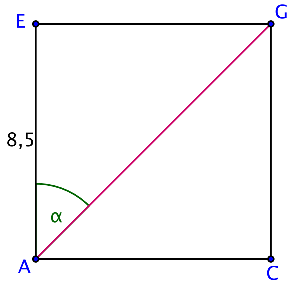
$$\tan\alpha = \frac{5{,}9}{8{,}5} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 34{,}8°.$$

a_3) Bei der Seitenfläche mit Seitenlängen $5{,}9$ und $4{,}2$ cm:

$$\tan\alpha = \frac{4{,}2}{5{,}9} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 35{,}4°.$$

b) Wir beginnen mit der Berechnung des Winkels α zwischen der Raumdiagonalen AG und der Kante AE. Dazu schneiden wir den Quader schräg durch (siehe die gepunkteten Linien) und erhalten das Rechteck $ACGE$. Mit Pythagoras folgt





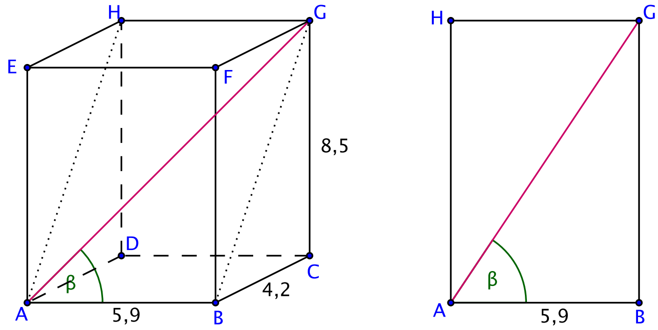
Geogebra-Datei: quader2-loesung

$$|EG| = \sqrt{|EF|^2 + |EG|^2} = \sqrt{5{,}9^2 + 4{,}2^2} = \sqrt{52{,}45}.$$

Nun folgt wie in Teil a): $\tan\alpha = \frac{\sqrt{52{,}45}}{8{,}5} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 40{,}4°.$

Um den Winkel β zwischen der Raumdiagonalen AG und der Kante AB auszurechnen, schneiden wir den Quader schräg durch wie mit den gepunkteten Linien angedeutet. Dieser Schnitt liefert das Rechteck $ABGH$. Dass der Winkel GBA ein rechter Winkel ist, kann man folgendermaßen einsehen: Er entsteht aus dem rechten Winkel FBA durch Drehung um die Drehachse AB. Wie oben folgen $|BG| = \sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} = \sqrt{4,2^2 + 8,5^2} = \sqrt{89,89}$,

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{89,89}}{5,9} \quad\Rightarrow\quad \beta \approx 58,1°.$$

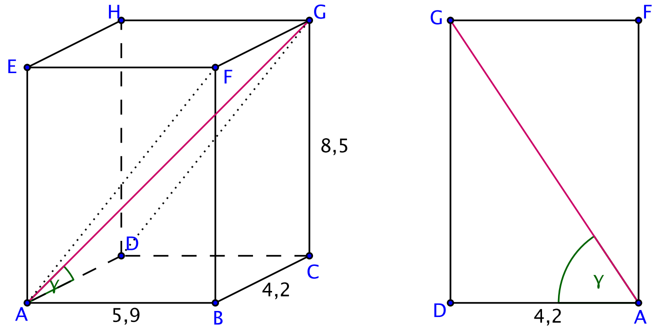


Geogebra-Datei: quader3-loesung

Entsprechend für den Winkel γ:

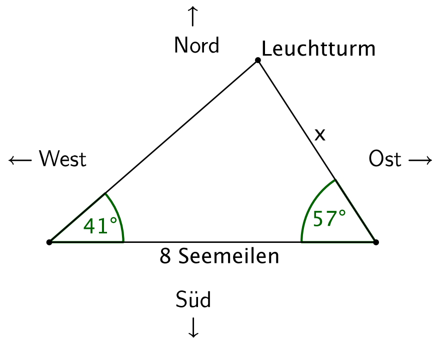
$$\begin{aligned}|DG| &= \sqrt{|DH|^2 + |HG|^2}\\ &= \sqrt{8,5^2 + 5,9}\\ &= \sqrt{107,06},\end{aligned}$$

$$\tan\gamma = \frac{\sqrt{107,06}}{4,2}$$
$$\Rightarrow\quad \gamma \approx 67,9°.$$



Geogebra-Datei: quader4-loesung

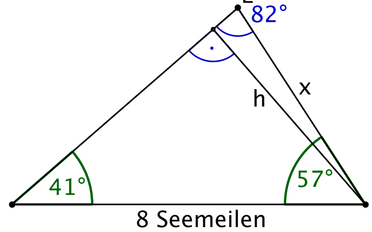
3) Ein Schiff fährt genau auf ostwärts gerichtetem Kurs. Ein Leuchtturm wird zunächst unter einem Winkel von $41°$ zur Ostrichtung gesehen. Nachdem das Schiff 8 Seemeilen zurückgelegt hat, muss man zum Leuchtturm zurück sehen. Nun beträgt der Winkel zur Westrichtung $57°$. Berechne, welche Entfernung x das Schiff vom Leuchtturm hat (in Seemeilen).
Hinweis: Zeichne im Dreieck eine geeignete Höhe ein (nicht irgendeine Höhe).
Lösung:



Geogebra-Datei: schiff-leuchtturm1

Möglichkeit 1: Verwende die Höhe durch die rechte untere Ecke. Dann gilt $h = 8\sin 41°$ Seemeilen und $\frac{h}{x} = \sin 82°$, also

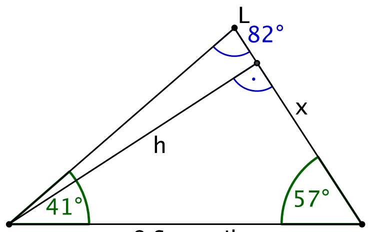
$$x = \frac{1}{\sin 82°}h = 8\frac{\sin 41°}{\sin 82°} \approx 5,3 \text{ Seemeilen.}$$



Geogebra-Datei: schiff-leuchtturm1-loesung

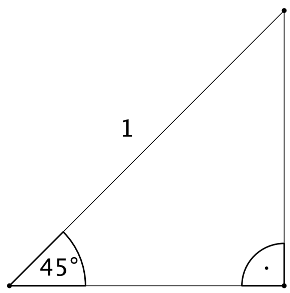
Möglichkeit 2: Verwende die Höhe durch die linke untere Ecke. Dann gilt $h = 8 \sin 57^\circ$ Seemeilen und

$$\begin{aligned} x &= 8\cos 57^\circ + \frac{h}{\tan 82^\circ} \\ &= 8\left(\cos 57^\circ + \frac{\sin 57^\circ}{\tan 82^\circ}\right) \approx 5,3 \text{ Seemeilen.} \end{aligned}$$



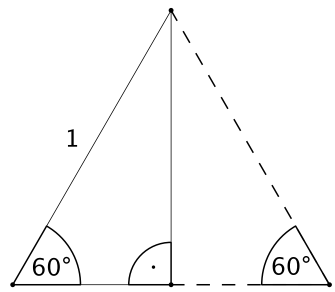
Geogebra-Datei: schiff-leuchtturm1-loesunga

4) **a)** Bestimme die exakten Werte von $\sin 45^\circ,\ \cos 45^\circ$.



Geogebra-Datei: sinus-45

b) Bestimme die exakten Werte von $\sin 60^\circ,\ \cos 60^\circ,\ \sin 30^\circ,\ \cos 30^\circ$.



Geogebra-Datei: sinus-60

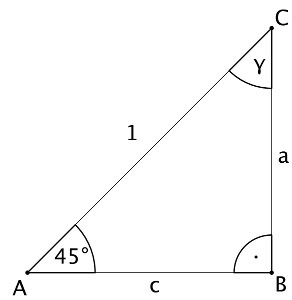
Lösung:

a) Aufgrund der Winkelsumme von 180° im Dreieck gilt $\gamma = 45^\circ$. Also ist das Dreieck gleichschenklig, die beiden Katheten sind gleich lang. Aus dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$a^2 + a^2 = 1^2, \text{ also } a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nach der Definition von Sinus und Kosinus gilt

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



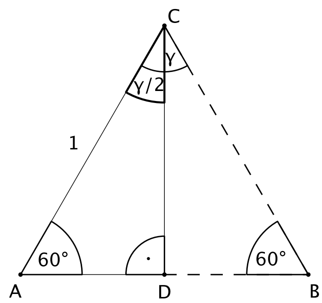
Geogebra-Datei: Loesung-Sinus-Kosinus-04a

b) Im großen Dreieck misst der dritte Winkel ebenfalls 60° (Winkelsumme im Dreieck). Also haben alle Seiten des großen Dreiecks die Länge 1. Es folgt

$$|AD| = \frac{1}{2}, \quad |DC| = \sqrt{1 - |AD|^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nach der Definition von Sinus und Kosinus gilt

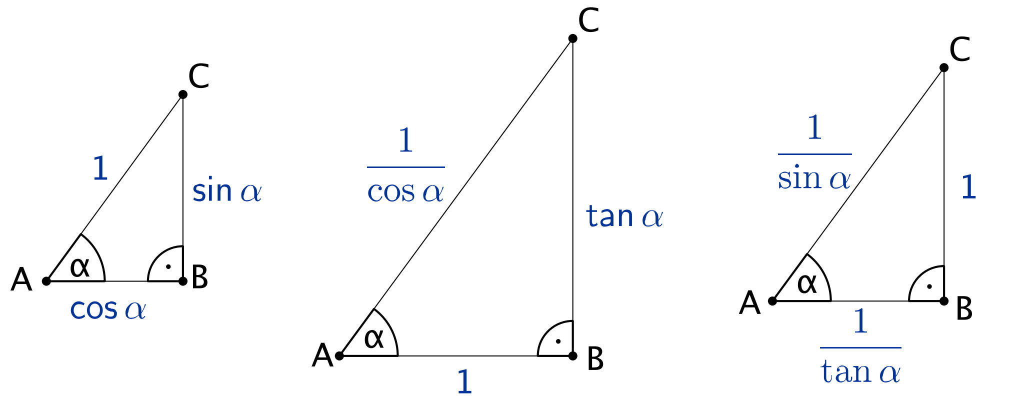
$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \frac{|DC|}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 60^\circ &= \frac{|AD|}{1} = \frac{1}{2}. \\ \sin 30^\circ &= \frac{|AD|}{1} = \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ &= \frac{|DC|}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



Geogebra-Datei: Loesung-Sinus-Kosinus-04b

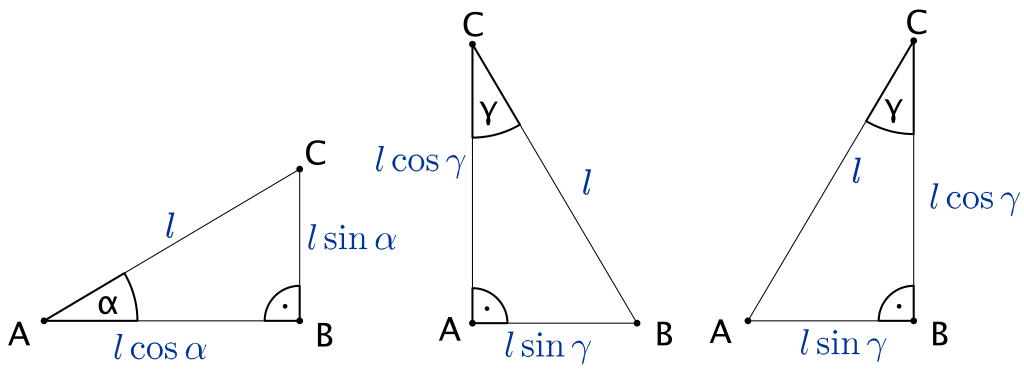
5) Bei den folgenden Dreiecken ist eine der Seitenlängen 1(LE) wie angegeben. Schreibe jeweils an die anderen beiden Seiten die Länge als Funktion von α:

Lösung:



6) Bei den folgenden Dreiecken ist eine der Seitenlängen l(LE) wie angegeben. Schreibe jeweils an die anderen beiden Seiten die Länge als Funktion von l und dem angegebenen Winkel:

Lösung:

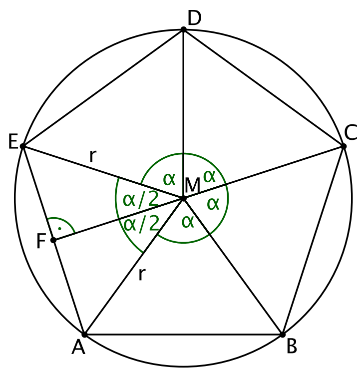


Geogebra-Datei: sinus-cosinus-2-loesung

7) Ein regelmäßiges Fünfeck habe die Seitenlänge 4cm. Berechne den Radius des Umkreises mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen (Taschenrechner nötig).
Zeichne zuerst den Umkreis mit dem berechneten Radius und dann das Fünfeck, indem Du die Seitenlänge mit dem Zirkel entlang des Umkreises abträgst.
Tipp: Fertige eine Skizze, zeichne die Verbindungslinien von den Ecken zum Umkreismittelpunkt ein. Eine Höhenlinie in einem der entstehenden Dreiecke kann hilfreich sein.

Lösung: Aus $5\alpha = 360°$ folgt $\alpha = 72°$.
Da das Dreieck AME gleichschenklig ist, halbiert die Höhe die Seite EA. Also gilt $|EF| = 2\,\text{cm}$.
Mit $\dfrac{|EF|}{r} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ folgt

$$r = \frac{|EF|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin 36°} \approx 3,4\,\text{cm}$$



Geogebra-Datei: fuenfeck-loesung

8) Es sei P_α der Schnittpunkt der Halbgeraden g_α, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht, mit dem Einheitskreis. Skizziere jeweils den Einheitskreis, die Halbgerade g_α, und bestimme die Koordinaten (x, y) von P_α. Verwende für a) bis d) die Tabelle aus dem letzten Satz.

a) $\alpha = 30°$,

b) $\alpha = 210°$,

c) $\alpha = 120°$,

d) $\alpha = -30°$,

e) $\alpha = 190°$ (mit Taschenrechner),

f) $\alpha = 280°$ (mit Taschenrechner).

Lösung:

α	x	y
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$	$\frac{1}{2} = 0,5$
$210°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866$	$-\frac{1}{2} = 0,5$
$120°$	$-\frac{1}{2} = -0,5$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$
$-30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$	$-\frac{1}{2} = -0,5$
$190°$	$-0,985$	$-0,174$
$280°$	$0,174$	$-0,985$

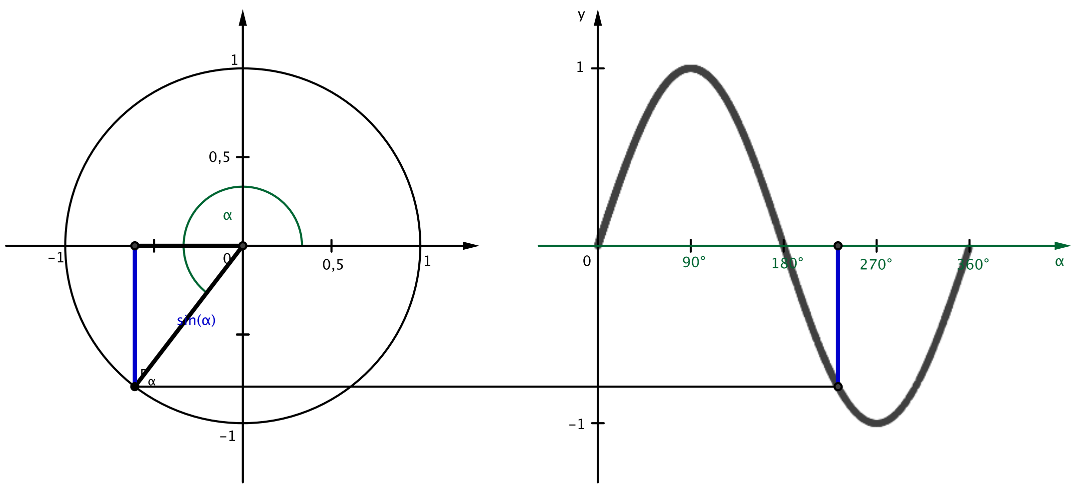
9) Fülle die folgende Wertetabelle mit Hilfe der Tabelle aus dem letzten Satz ohne Verwendung eines Taschenrechners aus:

Lösung:

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$450°$	$-90°$	$45°$	$-45°$	$135°$	$225°$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0	1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

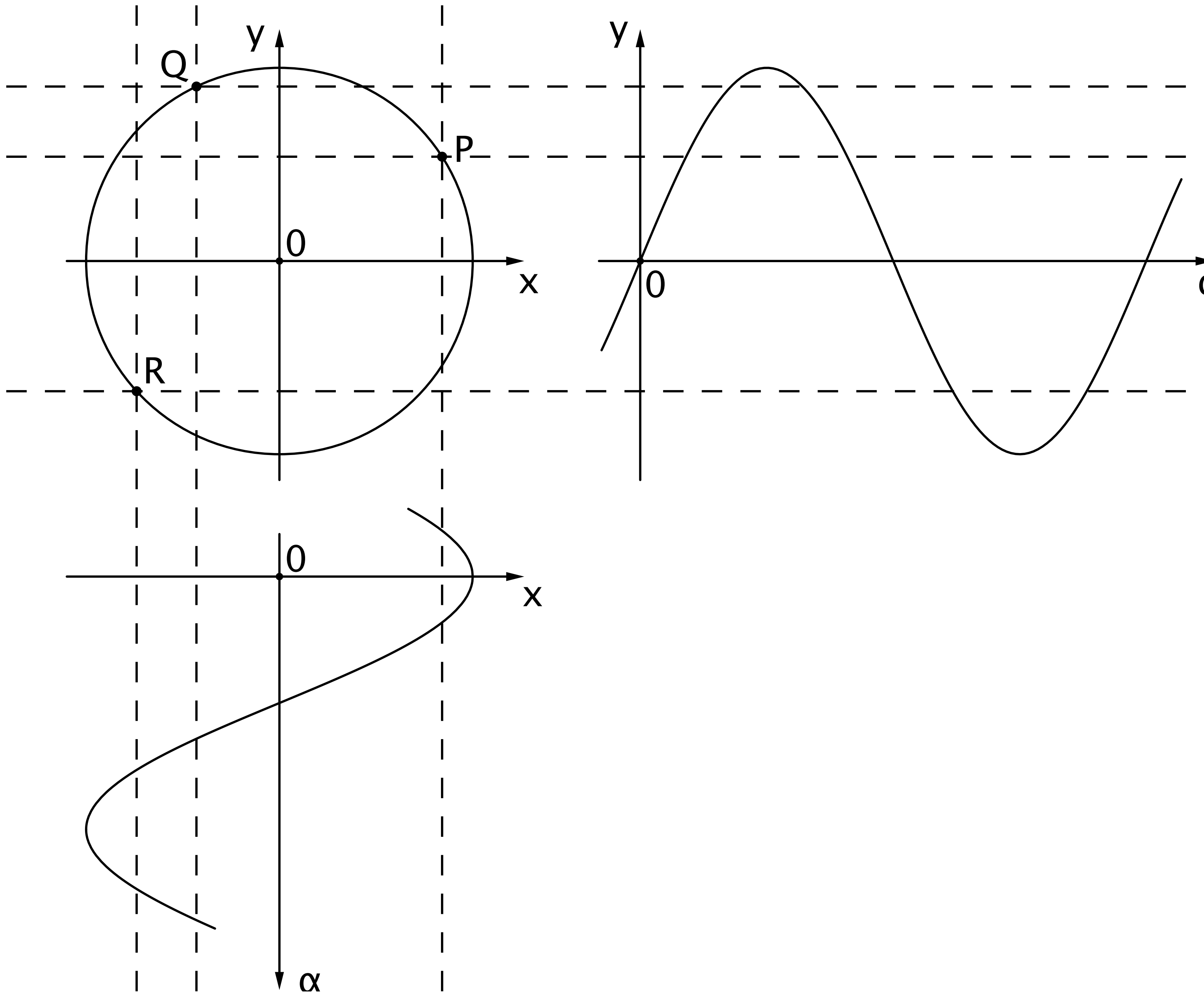
10) In der untenstehenden Zeichnung siehst Du, wie man vom Einheitskreis ausgehend das Schaubild der Sinusfunktion zeichnen kann.

Führe das im nächsten Arbeitsblatt nochmal für den Sinus aus (rechtes Koordinatensystem) und entsprechend für die Kosinusfunktion in dem Koordinatensystem, bei dem die α-Achse nach unten zeigt.



Geogebra-Datei: sinus

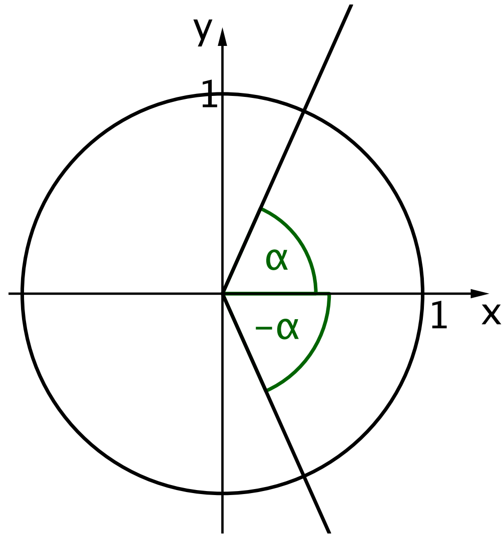
Sinus und Cosinus als Funktionen



11) Drücke durch $\sin\alpha,\ \cos\alpha$ aus:

$\sin(-\alpha) =$

Hilfestellung: In der nebenstehenden Skizze sind die Winkel α und $-\alpha$ im Einheitskreis eingetragen. Zeichne nun zu dem Winkel α und $-\alpha$ jeweils den Sinus ein. Welche Beziehung zwischen den beiden Größen erhältst Du?



Geogebra-Datei: sinus–alpha

Verfahre bei den folgenden Beispielen analog (Einheitskreise zum Einzeichnen der Winkel liegen auf einem extra-Blatt bereit)

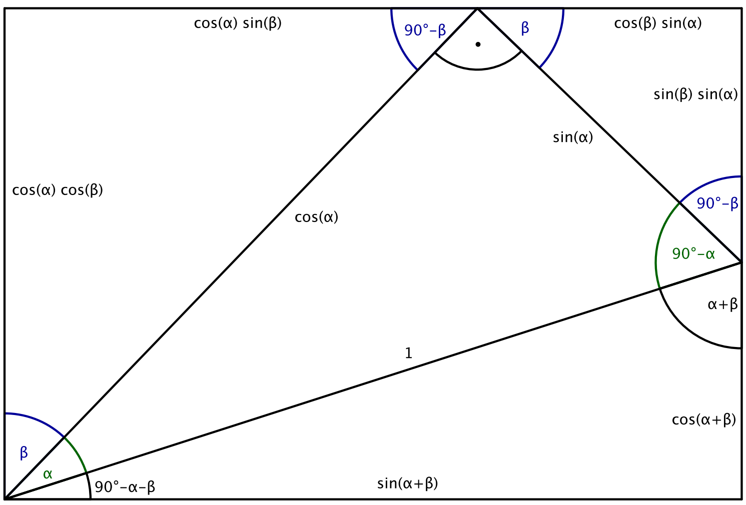
Lösung:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\[1ex] \sin(180^\circ-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(180^\circ-\alpha) &= -\cos\alpha\\[1ex] \sin(180^\circ+\alpha) &= -\sin\alpha\\ \cos(180^\circ+\alpha) &= -\cos\alpha\end{aligned}$$

12) In einem Rechteck ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenlänge 1 eingezeichnet (siehe Skizze). Gib alle nicht rechten Winkel in Abhängigkeit von α, β an. Berechne zudem alle Streckenlängen mit Hilfe der Funktionen Sinus und Cosinus. Folgere hieraus die Gültigkeit der **Additionstheoreme**:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\ \cos(\beta)+\cos(\alpha)\ \sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\ \cos(\beta)-\sin(\alpha)\ \sin(\beta)\end{aligned}$$

Lösung:



Geogebra-Datei: additionstheoreme-loesung

13) Verwende für diese Aufgabe die Additionstheoreme und die Werte aus der nebenstehenden Tabelle

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

a) Stelle $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ durch $\cos(2\alpha)$ dar.

b) Trage in die Tabelle exakte Werte ein:

Lösung:

a) $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \big(1-\cos^2(\alpha)\big) = 2\cos^2(\alpha) - 1 & \Rightarrow\ \cos^2(\alpha) = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2} \\ \cos(2\alpha) = \big(1-\sin^2(\alpha)\big) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) & \Rightarrow\ \sin^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2} \end{cases}$$

b)

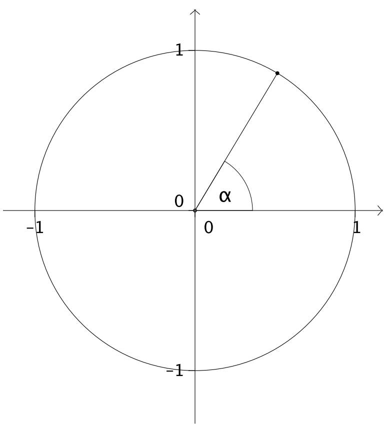
α	$30°$	$15°$	$7,5°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$

14) Kreuze an, welche der folgenden Aussagen wahr sind:
Hinweis: In jedem Block ist nur eine Gleichung richtig.

Lösung:

$\sin(\alpha+360°)$	$=$	$\sin(\alpha)$	X	$\sin(-\alpha)$	$=$	$\sin(\alpha)$	
$\sin(\alpha+360°)$	$=$	$-\sin(\alpha)$		$\sin(-\alpha)$	$=$	$-\sin(\alpha)$	X
$\sin(\alpha+360°)$	$=$	$\cos(\alpha)$		$\sin(-\alpha)$	$=$	$\cos(\alpha)$	
$\sin(\alpha+360°)$	$=$	$-\cos(\alpha)$		$\sin(-\alpha)$	$=$	$-\cos(\alpha)$	

$\sin(\alpha+180°)$	$=$	$\sin(\alpha)$		$\sin(\alpha+90°)$	$=$	$\sin(\alpha)$	
$\sin(\alpha+180°)$	$=$	$-\sin(\alpha)$	X	$\sin(\alpha+90°)$	$=$	$-\sin(\alpha)$	
$\sin(\alpha+180°)$	$=$	$\cos(\alpha)$		$\sin(\alpha+90°)$	$=$	$\cos(\alpha)$	X
$\sin(\alpha+180°)$	$=$	$-\cos(\alpha)$		$\sin(\alpha+90°)$	$=$	$-\cos(\alpha)$	



15) **a)** Leite aus den Additionstheoremen Formeln für $\sin(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha-\beta)$ her.

b) Rechne mit Hilfe der Additionstheoreme nach, dass

$$\sin\alpha - \sin\beta \;=\; 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

gilt.
Hinweis: Nicht mit der rechten Seite anfangen zu rechnen! Wende eines der Additionstheorem auf

$$\sin\alpha \;=\; \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

an. Verwende eine entsprechende Aufblähung für $\sin\beta$.

Lösung:

a)
$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\big(\alpha+(-\beta)\big) = \sin\alpha\,\underbrace{\cos(-\beta)}_{=\cos\beta}+\cos\alpha\,\underbrace{\sin(-\beta)}_{=-\sin\beta}\\
&= \sin\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\sin\beta\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\big(\alpha+(-\beta)\big) = \cos\alpha\,\cos(-\beta)-\sin\alpha\,\sin(-\beta)\\
&= \cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{array}{rcccl}
\sin\alpha &=& \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right) &=& \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\beta &=& \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) &=& \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\hline
 & & \sin\alpha-\sin\beta &=& 0 \qquad\qquad + 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}
\end{array}$$

(In der zweiten Zeile wurde die in Teil a) hergeleitete Formel verwendet).

16) Welche Spannung kommt aus der Steckdose?
Aus der Steckdose kommt Wechselspannung der Form $u(t)=a\sin(\omega t)$ mit $\omega = 50\cdot 360^\circ\frac{1}{\text{sec}}$. Die Angabe „220 Volt" bedeutet aber nicht $a=220$. Sie bedeutet, dass bei einem angeschlossenen Widerstand dieselbe Leistung erzeugt wird wie beim Anschluss desselben Widerstandes an eine Gleichspannung von 220 Volt. Die Leistung ist proportional zum Quadrat der Spannung, egal welchen Widerstand man anschließt.

Bestimme a so, dass das Integral $\int_0^1 u^2(t)\,\mathrm{d}t$ denselben Wert ergibt wie $\int_0^1 220^2\,\mathrm{d}t$ (Integral über die konstante Funktion).
Hinweis: Die Formel $\sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ kann hilfreich sein.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u^2(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 a^2\sin^2(\omega t)\mathrm{d}t = a^2\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(2\omega t)}{2}\right)\mathrm{d}t\\
&= a^2\left(\frac{1}{2}-\left[\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]_{t=0}^{1}\right) = a^2\left(\frac{1}{2}+0\right).
\end{aligned}$$

Dieser Wert soll gleich sein wie

$$\int_0^1 220^2\mathrm{d}t \;=\; 220^2.$$

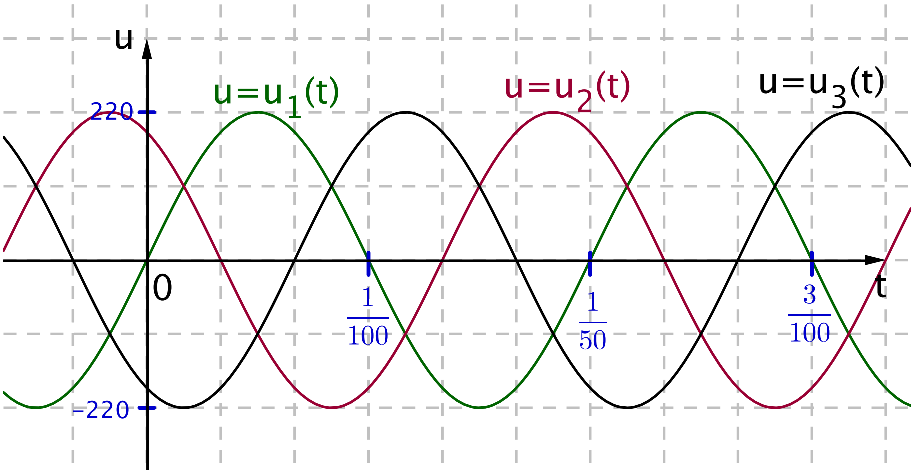
Dies bedeutet $\frac{a^2}{2}=220^2$ bzw. $a=\sqrt{2}\cdot 220\approx 311$. Aus der Steckdose kommt also Spannung bis zu einer Höhe von 311 Volt.

17) 220 *Volt* -220 *Volt ergibt nicht unbedingt* 0 *Volt:*
Ein Elektrizitätswerk liefert Drehstrom, d.h. drei Wechselspannungen der Form

$$u_1(t) = 220\sin(\omega t), \qquad u_2(t) = 220\sin(\omega t + \delta), \qquad u_3(t) = 220\sin(\omega t + 2\delta)$$

(Angaben in Volt). Da die Spannungen eine Frequenz von 50 Herz (=Schwingungen pro Sekunde) haben, gilt $\omega = 50 \cdot 360^\circ \frac{1}{\text{sec}}$. Die Phasenverschiebung beträgt $\delta = 120^\circ$.

a) Skizziere die Spannungsverläufe im Koordinatensystem.
Lösung:



Geogebra-Datei: drehstrom-loesung

b) Die Leitungen sind so zusammengeschaltet, dass sich die Spannungen abziehen, wenn ein Verbraucher entsprechend angeschlossen wird (Z.B. an die Punkte A und C im Schaltbild unten). Benütze die Additionstheoreme, um den Spannungsverlauf der Differenz $u_2 - u_1$ in der Form $u_2(t) - u_1(t) = a\sin(\omega t + \gamma)$ zu berechnen. Gib a und γ an.
Hinweis: Hilfreiche Formeln sind

$$\sin\alpha - \sin\beta \;=\; 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und $\cos\alpha = \sin(90^\circ + \alpha)$.
Lösung: Mit den angegebenen Formeln ergibt sich

$$\begin{aligned} u_2(t) - u_1(t) &= 220\big(\sin(\omega t + \delta) - \sin(\omega t)\big) \\ &= 220 \cdot 2\,\sin\frac{\delta}{2}\,\cos\frac{2\omega t + \delta}{2} \\ &= 220 \cdot 2\,\underbrace{\sin 60^\circ}_{=\sqrt{3}/2}\,\underbrace{\cos(\omega t + 60^\circ)}_{=\sin(\omega t + 150^\circ)} \\ &\approx 381\,\sin(\omega t + 150^\circ) \end{aligned}$$

Das bedeutet: $a = 381$ und $\gamma = 150^\circ$. Man spricht von „380 Volt-Drehstrom“.