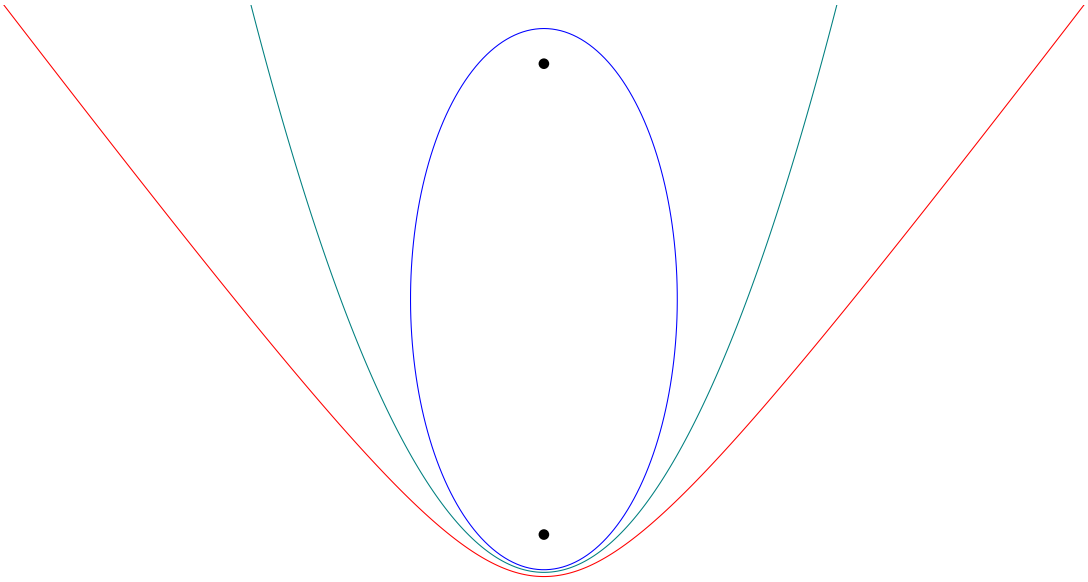
Universität Stuttgart

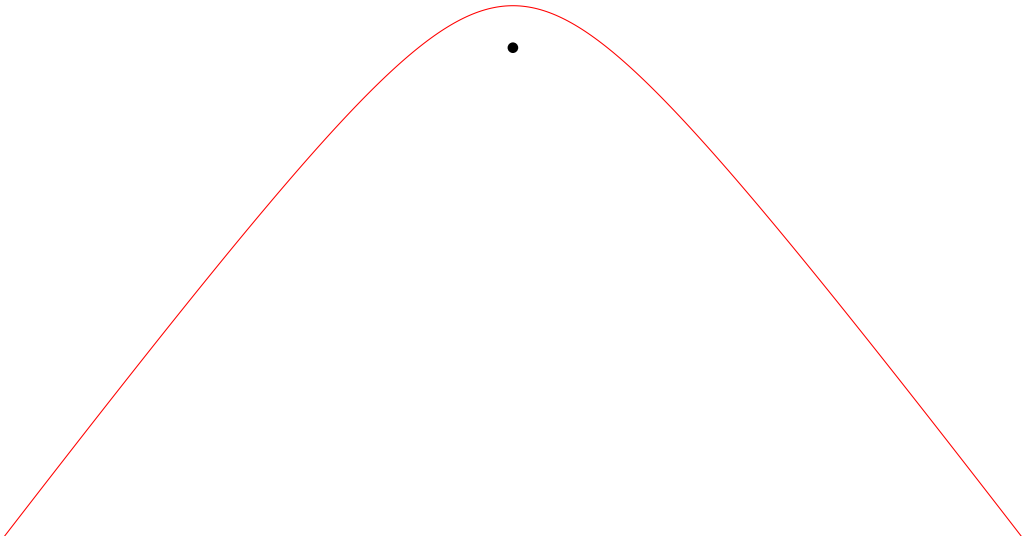
Schülerzirkel MATHEMATIK



Kegelschnitte

Peter Lesky (Universität Stuttgart)

Erste Fassung 2010, Überarbeitungen 2018, 2020



Copyright: Die Verwendung dieses Dokuments und aller Teile davon zu nicht-kommerziellen Zwecken wird vom Autor gestattet. Eine kommerzielle Verwendung bedarf der ausdrücklichen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die nachfolgend beschriebenen sechs Lerneinheiten wurden für das Online-Schülerseminar für die Klassenstufen 8–10 an der Universität Stuttgart entwickelt. Der Inhalt ist als Video-Kurs mit Arbeitsblättern und mit dem selben Inhalt als Selbstlern-Kurs auf der Seite

`http://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/iadm/Zirkel/material-Schuelerseminar/`

verfügbar. Die Inhalte basieren auf einem Kurs mit sieben Doppelstunden, der zwischen Ostern und Sommerferien 2018 durchgeführt wurde.

Das vorliegende Thema ist ein wunderschönes Beispiel dafür, wie geometrische und analytische Methoden in einem Gebiet angewandt werden können. Einmal ist es besser, geometrisch zu argumentieren, ein anderes Mal ist die analytische Rechnung der einfachere Weg. Bei der Stundenplanung wurde darauf geachtet, dass sowohl die geometrische als auch die analytische Beschreibung der Kegelschnitte zum Tragen kam.

Als Literatur wurden verwendet:

Taschenbuch der Mathematik (Bronstein-Semendjajew, Harri Deutsch, Thun 1984)

Mathematik Oberstufe 3 (Bürger-Fischer-Malle, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1980)

Kegelschnitte (Hans Schupp, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim-Wien-Zürich 1988)

Mathematische Basteleien (Jürgen Köller, `http://www.mathematische-basteleien.de/`)

Kegelschnitte-Ellipse (Stefanie Mandl, `http://www.mathe-online.at/materialien/stefanie.mandl/files/NeuesVerzeichnis/Kegelschnitte/Ellipse.pdf`)

Vielen Dank an die Studierenden Alexandra Baum, Pia Becker, Nina Steffens, Kevin Hildebrandt und Mert Öztürk, die das Thema *Kegelschnitte* im Schülerseminar 2013 bzw. 2018 unterrichtet haben. Ihre wertvollen Erfahrungen habe ich in das Skript aufgenommen. Besonderer Dank gebührt den Studierenden Jan Glock, Andrè Kliem und Alena Schlenvoigt, die den Kurs online-fähig gemacht und weitere Übungsaufgaben ergänzt haben.

Ich wünsche allen, die sich mit diesem Thema beschäftigen, genauso viel oder noch mehr Freude daran.

10. April 2021 Peter Lesky

Inhaltsverzeichnis

1 Unterrichtseinheit 1 - Abstände **6**

1.1 Einführungsbeispiel . . . 6
1.2 Lot und Lotfußpunkt . . . 7
1.3 Abstand Punkt-Gerade . . . 9
1.4 Arbeiten mit Abständen . . . 9
1.5 Schriftliche Aufgaben . . . 15
1.6 Zusatzmaterial . . . 17

2 Unterrichtseinheit 2 - Parabel **22**

2.1 Wiederholung . . . 22
2.2 Definition einer Parabel . . . 23
2.3 Analytische Beschreibung . . . 25
2.4 Allgemeine Parabelgleichung und Symmetrie . . . 28
2.5 Schriftliche Aufgaben . . . 31
2.6 Weitere Aufgaben . . . 33

3 Unterrichtseinheit 3 - Parabel und Tangente **36**

3.1 Wiederholung . . . 36
3.2 Analytische Beschreibung der Tangente . . . 37
3.3 Übungsphase . . . 39
3.4 Konstruktion der Tangente . . . 41
3.5 Anwendung: Reflexion an Parabelspiegeln . . . 44
3.6 Schriftliche Aufgaben . . . 46
3.7 Ergänzung . . . 49

4 Unterrichtseinheit 4 - Ellipse **50**

4.1 Geometrische Definition einer Ellipse . . . 50
4.2 Bezeichnungen bei Ellipsen . . . 52
4.3 Die Ellipsengleichung . . . 54
4.4 Konstruktion von Ellipsenpunkten mit vorgegebener x- oder y-Koordinate . . . 58
4.5 Schriftliche Aufgaben . . . 59
4.6 Zusatzaufgaben . . . 62

5 Unterrichtseinheit 5 - Ellipse und Tangente **66**

5.1 Konstruktion von Ellipsenpunkten . . . 66
5.2 Tangente in einem Ellipsenpunkt . . . 67

5.3 Die Berührbedingung . . . 69
5.4 Tangentengleichung . . . 72
5.5 Anwendungen . . . 75
5.6 Schriftliche Aufgaben . . . 78

6 Unterrichtseinheit 6 - Hyperbel, Tangente an Hyperbel 81
6.1 Konzept . . . 81
6.2 Einführung . . . 81
6.3 Definition von Hyperbeln . . . 82
6.4 Bezeichnungen bei Hyperbeln . . . 83
6.5 Die Hyperbelgleichung . . . 84
6.6 Tangente an Hyperbel . . . 86
6.7 Reflexion an hyperbelförmigen Spiegeln . . . 88
6.8 Schriftliche Aufgaben . . . 90
6.9 Zusatzaufgaben . . . 93
6.10 Ergänzung . . . 96

7 Bonusmaterial - Parabel, Ellipse und Hyperbel als Kegelschnitte 97
7.1 Schnitte von Ebenen mit Doppelkegeln . . . 97
7.2 Hyperbel als Kegelschnitt . . . 97

8 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 1: Abstände 100
8.1 Tafelanschriebe . . . 100
8.2 OH-Folien und Arbeitsblätter . . . 101

9 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 2: Parabel 112
9.1 Tafelanschriebe . . . 112
9.2 OH-Folien und Arbeitsblätter . . . 114

10 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 3: Parabel und Tangente 123
10.1 Tafelanschriebe . . . 123
10.2 OH-Folien und Arbeitsblätter . . . 126

11 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 4: Ellipsen 142
11.1 Tafelanschriebe . . . 142
11.2 Bastelanleitung, OH-Folien und Arbeitsblätter . . . 145

12 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 5: Ellipse und Tangente 158
12.1 Tafelanschriebe . . . 158
12.2 OH-Folien und Arbeitsblätter . . . 159

13 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 6: Hyperbel 174

13.1 Tafelanschriebe 174

13.2 OH-Folien und Arbeitsblätter 176

1 Unterrichtseinheit 1 - Abstände

Inhalt der ersten Unterrichtseinheit ist der Abstand Punkt-Gerade in der Ebene. Die Äquivalenz der Definition über den minimalen Abstand des Punktes zu allen Punkten der Gerade und über den Abstand zum Lotfußpunkt wird nachgewiesen. Es werden Lotfußpunkte konstruiert und Abstände in einfachen Fällen ohne Vektorrechnung berechnet. Abgerundet wird die Einheit durch Umkehraufgaben, z.B.: Wo liegen die Geraden, die zu zwei Punkten denselben vorgegebenen Abstand besitzen? Wie liegen die Geraden, die zu drei Punkten denselben Abstand besitzen?

1.1 Einführungsbeispiel

Dauer: 20 min
Ziel: Das Wissen über Abstände und Kreise wird reaktiviert. Auf dieser Grundlage werden die Konstruktionen von Parabel, Ellipse und Hyperbel präsentiert
Material: Arbeitsblatt 1, Beamer

Aufgabe 1 von Arbeitsblatt 1 wird in Einzel- oder Partnerarbeit bearbeitet.

Aufgabe 1.1 (*Arbeitsblatt 1, Aufgabe 1*)

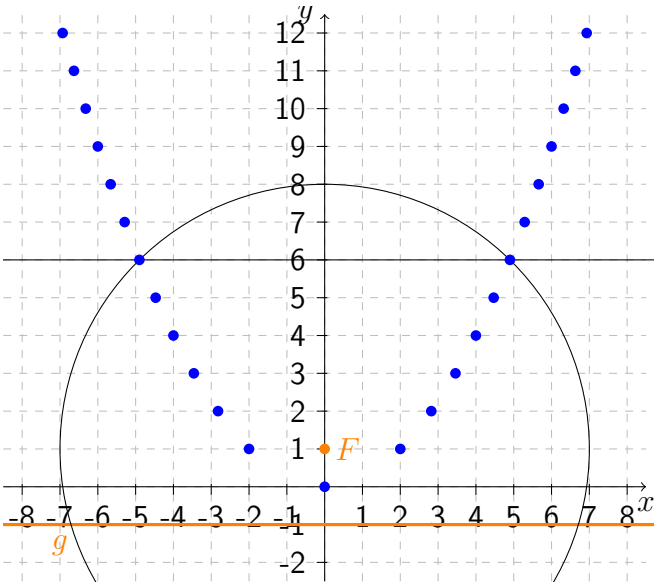
Gegeben sind die Gerade $g = \{(x \mid y) : y = -1\}$ und der Punkt $F(0 \mid 1)$ (siehe unten).

Gesucht ist die Menge aller Punkte, die von der Geraden g und dem Punkt F denselben (beliebig großen) Abstand haben.

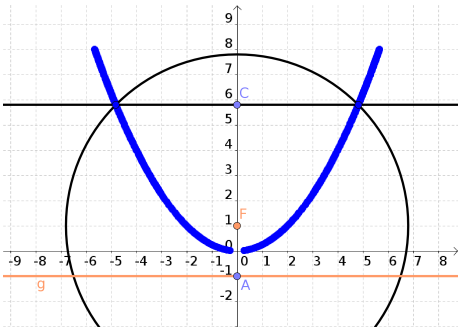
a) Zeichne die Gerade ein, die parallel zu g ist, oberhalb von g liegt und den Abstand 7LE von g hat. Konstruiere die zwei Punkte, die von g und von F den Abstand 7LE haben.

b) Konstruiere mindestens 10 Punkte, die auf den waagrechten Koordinatengitterlinien liegen und die jeweils von g und von F denselben Abstand haben. Verbinde die Punkte zu einer Kurve.

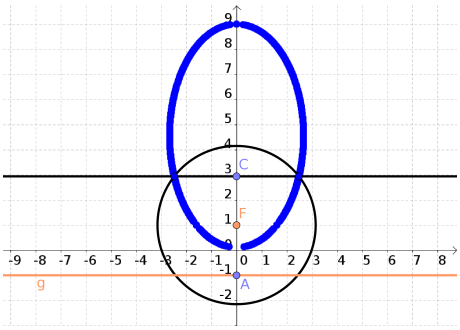
Lösung:



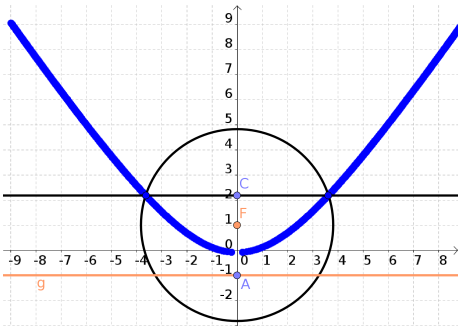
Besprechung von Aufgabe 1 durch Beamer-Präsentation (Datei `Kapitel1_parabel-demo.ggb`). Durch Verschieben des Punktes C sieht man, wie die Parabel entsteht. Anschließend wird bei den Eigenschaften des Kreises bei Grundeinstellungen `Kreis[F, Strecke[C, A]]` zu `Kreis[F, 0.8Strecke[C, A]]` geändert. (Mit rechter Maustaste auf den Kreis klicken, dann `Eigenschaften` auswählen). Danach entsteht bei Bewegung des Punktes C eine Ellipse. Nach Änderung auf `Kreis[F, 1.2Strecke[C, A]]` wird eine Hyperbel gezeichnet. Nun können die Lösungen von Aufgabe 2 eingetragen werden.



Graphik: `Kapitel1_parabel-demo.ggb`



Graphik: `Kapitel1_parabel-demo.ggb`



Graphik: `Kapitel1_parabel-demo.ggb`

Aufgabe 1.2 (*Arbeitsblatt 1, Aufgabe 2*)

Die Menge aller Punkte P, für deren Abstand $d(P, g)$ von g und den Abstand $\overline{PF}$ von F gilt:

a) $\overline{PF} = d(P, g)$, bildet eine

b) $\overline{PF} = 0,8 \cdot d(P, g)$, bildet eine

c) $\overline{PF} = 1,2 \cdot d(P, g)$, bildet eine

Lösung: **a)** Parabel, **b)** Ellipse, **c)** Hyperbel

> **Anmerkung**
> Mögliche Schülerfrage: Was ist der Unterschied zwischen einer Parabel und einer Hyperbel (gemeint ist ein Ast der Hyperbel). Mögliche Antwort: Bei einer Parabel wird die Steigung mit wachsendem x-Wert immer größer, bei einer Hyperbel läuft die Steigung auf einen Grenzwert zu (Es gibt eine Asymptote).

1.2 Lot und Lotfußpunkt

Dauer: 15 min
Ziel: Definition und Konstruktion von Lot und Lotfußpunkt
Material: Arbeitsblatt 2

> **Anmerkung**
> Es empfiehlt sich, für die Lotgerade immer die selbe Farbe (im Skript orange) und für den Lotfußpunkt immer die selbe Farbe (im Skript rot) zu verwenden.

Tafelanschrieb

1. Abstände

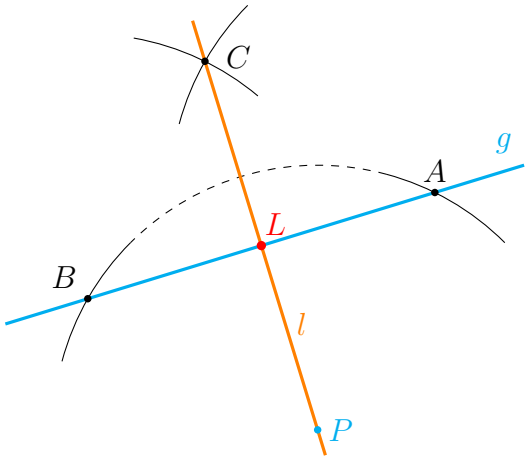
Definition: Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt P. Dann heißt die Gerade l, die durch P geht und senkrecht zu g ist, Lot von P auf g. Der Schnittpunkt von l und g heißt Lotfußpunkt.

Vorgehen: L. führt die Konstruktionen für Arbeitsblatt 2 an der Tafel vor, SuS machen die Konstruktionen auf ihrem Arbeitsblatt nach.

Aufgabe 1.3 (*Tafel / Arbeitsblatt 2, Aufgabe 3*)

Konstruktion des Lotes l von P auf g und des Lotfußpunktes L:

Lösung:



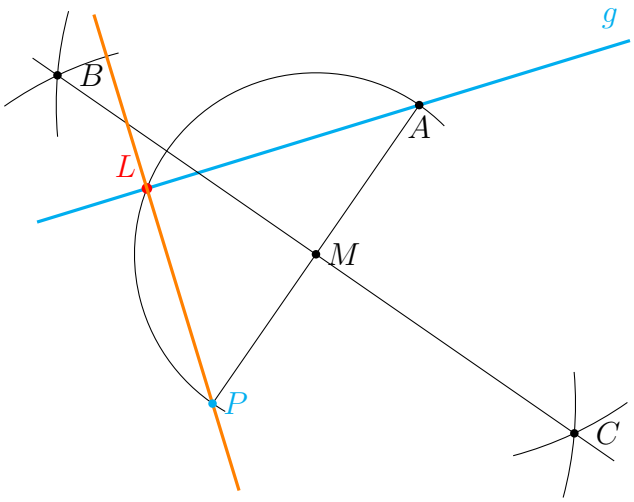
Konstruktionsbeschreibung:

1) Kreis um P (Radius beliebig, genügend groß) schneidet g in A und in B.
2) Kreise um A und um B mit dem selben Radius schneiden sich in C.
3) Gerade durch C und P ist das Lot l
4) Schnittpunkt des Lotes mit g ist der Lotfußpunkt L.

Aufgabe 1.4 (*Tafel / Arbeitsblatt 2, Aufgabe 4*)

Alternative Konstruktion des Lotfußpunktes L.

Lösung:



Konstruktionsbeschreibung:

1) Wähle A beliebig auf g.
2) Kreise um A und um P mit dem selben Radius schneiden sich in B und in C.
3) BC und AP schneiden sich in M (Mittelpunkt von AP).
4) Kreis um M durch P schneidet g in A und im Lotfußpunkt L.

Anmerkung

Die alternative Konstruktion in der zweiten Aufgabe ist einerseits eine schöne zweite Möglichkeit, andererseits soll das Wissen um den Satz des Thales aufgefrischt werden, da dieser später in einer der Zusatzaufgaben benötigt wird.

1.3 Abstand Punkt-Gerade

Dauer: 20 min
Ziel: Einführung und Definition des Abstands Punkt-Gerade
Material: keines

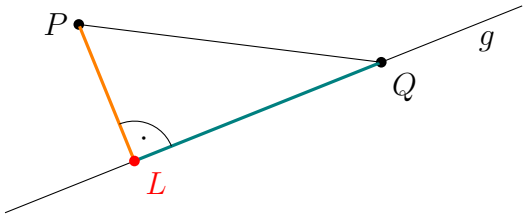
Tafelanschrieb

Satz: Sind ein Punkt P und eine Gerade g gegeben, und ist L der Lotfußpunkt von P auf g, so gilt für alle Punkte $Q \in g$ mit $Q \neq L$: $\overline{PQ} > \overline{PL}$.

Beweis: Pythagoras:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PL}^2 + \underbrace{\overline{LQ}^2}_{>0} \\ \Rightarrow \overline{PQ}^2 &> \overline{PL}^2 \\ \overset{\overline{PQ}>0}{\Rightarrow} \overline{PQ} &> \overline{PL} \end{aligned}$$

$\square$



Anmerkung
Die letzte Folgerung kann deshalb geschlossen werden, weil Abstände immer positiv sind. Aus $x^2 > 4$ folgt im Allgemeinen nicht $x > 2$.

Tafelanschrieb

Definition: Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g ist definiert durch

$$d(P, g) := \min\{\overline{PQ} : Q \in g\}.$$

Satz: Ist L der Lotfußpunkt von P auf die Gerade g, so gilt

$$d(P, g) = \overline{PL}.$$

Beweis: Letzter Satz.

1.4 Arbeiten mit Abständen

Dauer: 35 min
Ziel: In verschiedenen Aufgaben mit wachsendem Schwierigkeitsgrad werden die Definition des Abstandes Punkt-Gerade und die Konstruktion des Lotes angewandt.
Material: Arbeitsbätter 3 und 4, OH-Folien zur Besprechung von Arbeitsblatt 4

Vorgehen: Arbeitsblatt 3 wird in Einzel- oder Partnerarbeit gelöst. Anschließend werden die Ergebnisse (nur Zahlen) verglichen. Bei genügend Zeit kann die Zusatzaufgabe an der Tafel besprochen werden.

Aufgabe 1.5 (*Arbeitsblatt 3, Aufgabe 5*)

Zeichne in jeder Teilaufgabe den angegebenen Punkt P und die Gerade g ein. Bestimme den Abstand $d(P, g)$ explizit durch Berechnung aus den angegebenen Koordinaten oder gib ihn als Formelausdruck mit a, b an.

a) $P(1 \mid 3)$, $g = \{(x \mid y) : y = -2\}$,

b) $P(a \mid b)$ mit beliebigem $a, b \in \mathbb{R}$, $g = \{(x \mid y) : y = -2\}$,

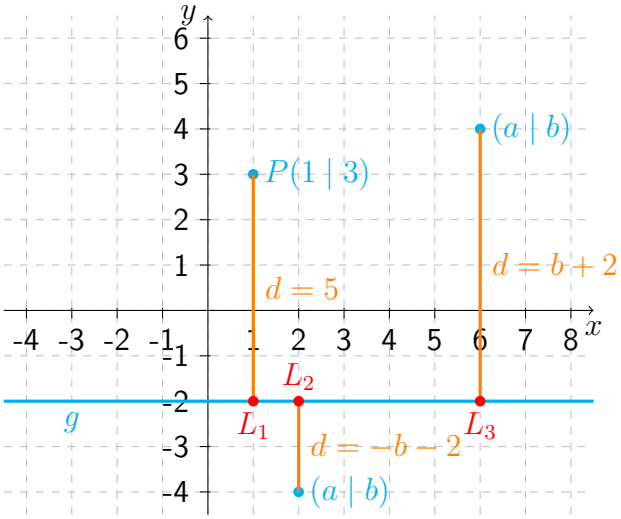
c) $P(a \mid b)$ mit beliebigem $a, b \in \mathbb{R}$, $g = \{(x \mid y) : x = 1\}$,

d) $P(1 \mid 3)$, $g = \{(x \mid y) : y = -x\}$,

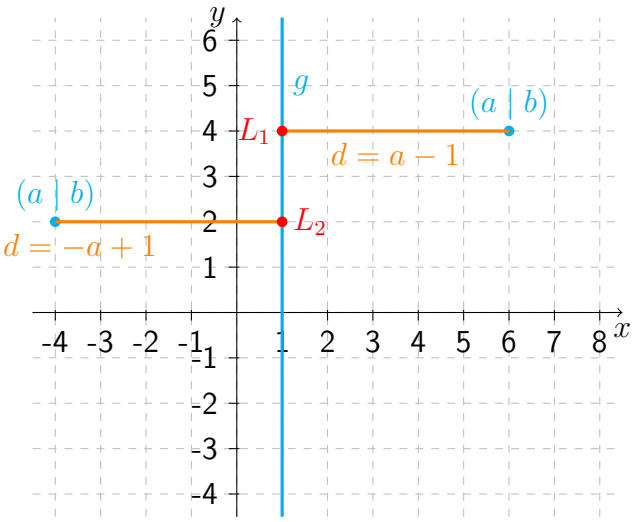
e) **Zusatzaufgabe:** $P(a \mid b)$ mit beliebigem $a, b \in \mathbb{R}$, $g = \{(x \mid y) : y = -x\}$,

Lösung: **a)** $d(P, g) = 5$,

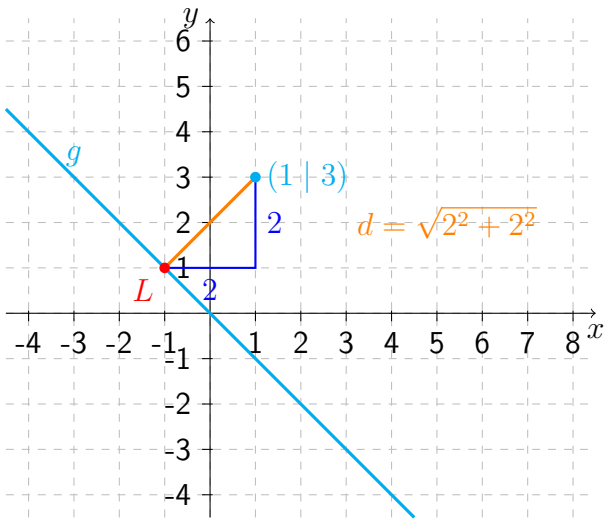
b) $d(P, g) = |b + 2|$.



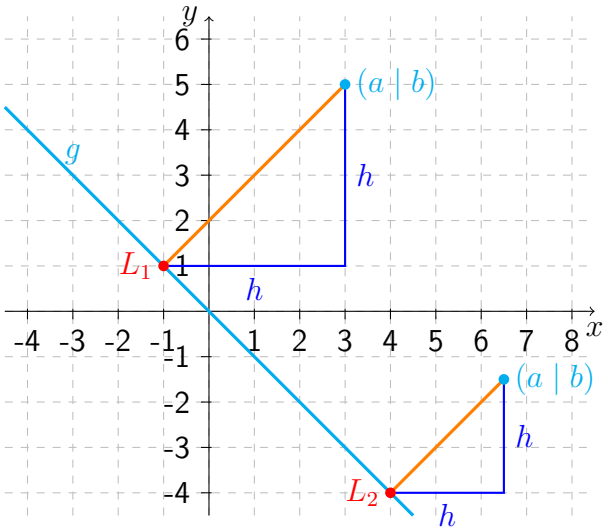
c) $d(P, g) = |a - 1|$:



d) $d(P, g) = \sqrt{8}$:



e) $d(P, g) = \sqrt{2} \cdot \left|\frac{a+b}{2}\right|$:



Der Punkt $(a - h, b - h)$ muss auf der Geraden liegen:

$$b - h = -(a - h) \;\Leftrightarrow\; b + a = 2h$$

Mit Pythagoras folgt $d(P, g) = \sqrt{2} \cdot |h|$.

Aufgabe 1.6 (*Arbeitsblatt 4, Aufgabe 6*)

Gegeben sind die im ersten Schaubild eingezeichneten Geraden g, h.

a) Konstruiere die Lage aller Punkte P, die zur Geraden g den Abstand 2cm haben (blau).

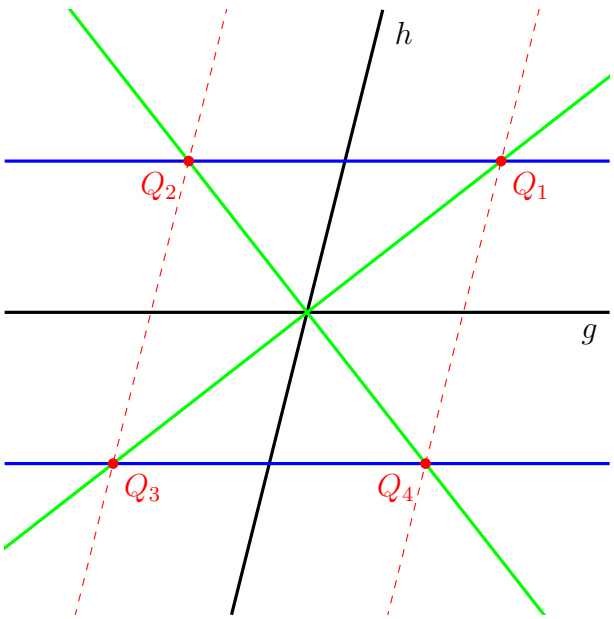
b) Konstruiere alle Punkte Q, die sowohl zu g als auch zu h den Abstand 2cm haben (rot).

c) Konstruiere die Lage aller Punkte R, für die $d(R, g) = d(R, h)$ gilt (grün).

d) Nun ist zusätzlich eine Gerade f gegeben (zweites Schaubild). Konstruiere alle Punkte S, für die $d(S, g) = d(S, h) = d(S, f)$ gilt.

Hinweis: Parallelen dürfen mit dem Geodreieck konstruiert werden.

Lösung:

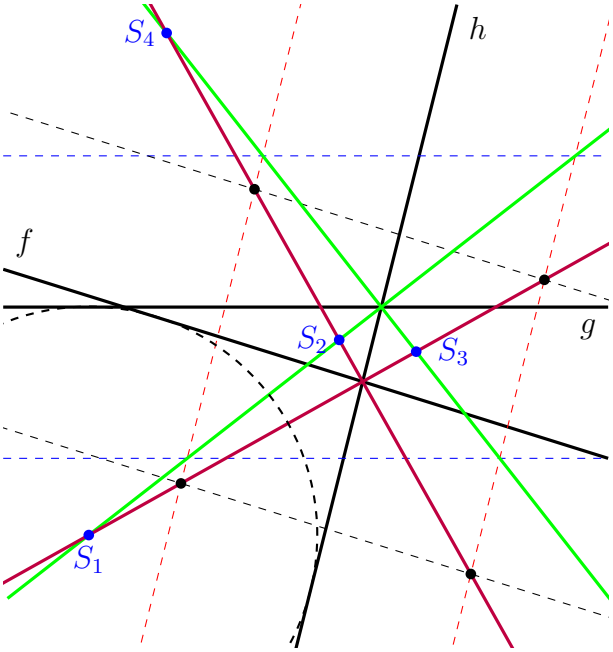


a) Die Punkte P liegen auf Parallelen zu g mit Abstand 2cm.

b) Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 erhält man als Schnittpunkte der Parallelen zu g und zu h.

c) Die Punkte R liegen auf den Winkelhalbierenden der beiden Geraden. Da die Punkte $Q_1, \ldots, Q_4$ zu g und h denselben Abstand haben, können die Winkelhalbierenden als Geraden durch Q_1 und Q_3 bzw. durch Q_2 und Q_4 eingezeichnet werden.

d)



Die Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 erhält man als Schnittpunkte der Winkelhalbierenden von g und h bzw. von h und f. Diese Schnittpunkte liegen automatisch auch auf einer der Winkelhalbierenden von g und f.

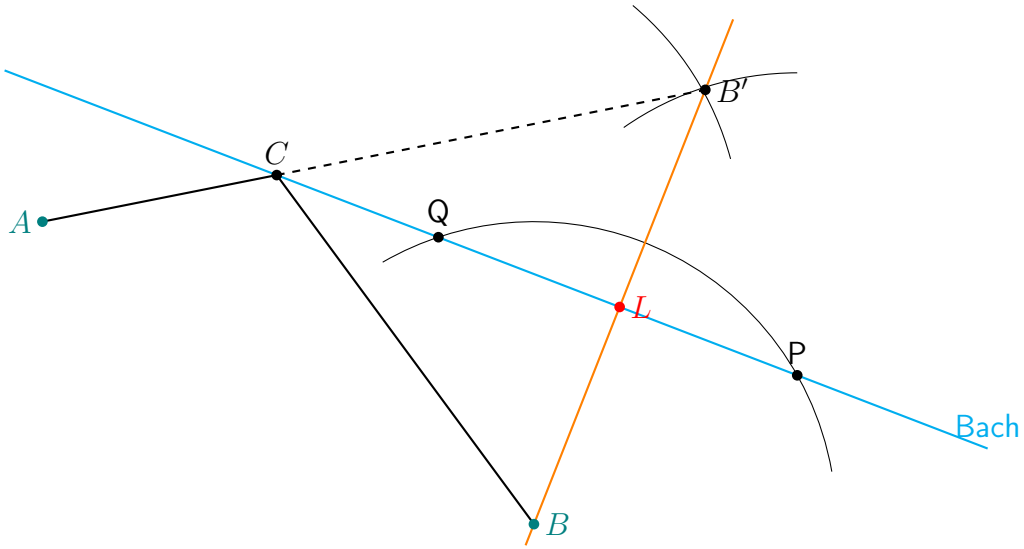
Die Winkelhalbierenden von g und h sind bereits im Teil c) konstruiert worden. Nun können die Winkelhalbierenden von h und f genauso konstruiert werden, indem parallele Geraden zu f mit Abstand 2cm zu f mit den Parallelen zu h aus Teil b) geschnitten werden.

Wenn man möchte, kann man zur Verdeutlichung die Berührkreise um die Punkte $S_1, \ldots, S_4$ einzeichnen, wie z.B. bei S_1 im Schaubild.

Aufgabe 1.7 (*Arbeitsblatt 4, Aufgabe 7*)

Ein Reiter will von A nach B reiten und unterwegs sein Pferd am Bach im Punkt C trinken lassen. Konstruiere mit Zirkel und Lineal den kürzesten Weg, den der Reiter nehmen kann.
Hinweis: Das Lot von B auf den Bach und der Punkt B' auf dem Lot, der durch Spiegelung des Punktes B am Bach entsteht, können hilfreich sein.

Lösung:



Jedem Weg von A über einen Punkt C auf der Bachlinie nach B entspricht ein Weg von A über C nach B'. Die beiden sich entsprechenden Wege besitzen die selbe Länge. Der kürzeste Weg von A nach B' ist die gerade Verbindungsstrecke. Dieser entspricht dann der kürzeste Weg von A über C nach B wie in der Graphik eingezeichnet.

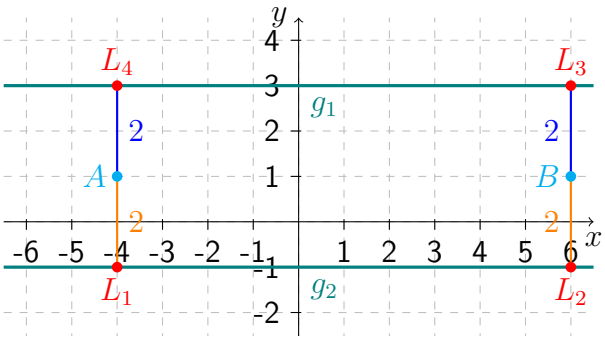
Aufgabe 1.8 (*Zusatzblatt, Aufgabe 8*)

a) Zeichne die Punkte $A(-4 \mid 1)$ und $B(6 \mid 1)$ in das Koordinatensystem ein. Zeichne die zwei Geraden g mit der folgenden Eigenschaft: $d(A, g) = 2$LE und $d(B, g) = 2$LE und A, B liegen auf der selben Seite von g. Zeichne die Lotfußpunkte der Lote von A bzw. B auf deine Geraden. Die Geraden und Lote dürfen direkt ohne Konstruktion eingezeichnet werden.

b) Zeichne die drei Punkte $A(-3 \mid -3)$, $B(6 \mid 1)$ und $C(6 \mid 7)$ in das Koordinatensystem ein. Zeichne die drei Geraden, die von allen drei Punkten denselben Abstand haben. Verwende zur Darstellung verschiedener Geraden verschiedene Farben.

Hinweis: Wie können die drei Punkte im Verhältnis zur gesuchten Geraden liegen?

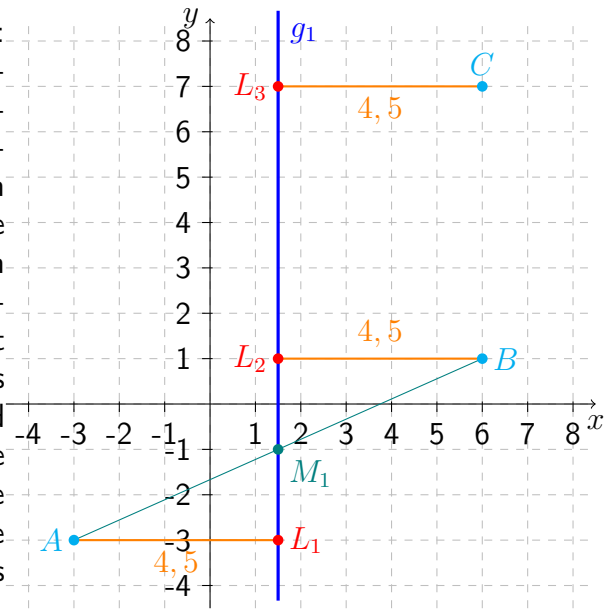
Lösung: **a)**



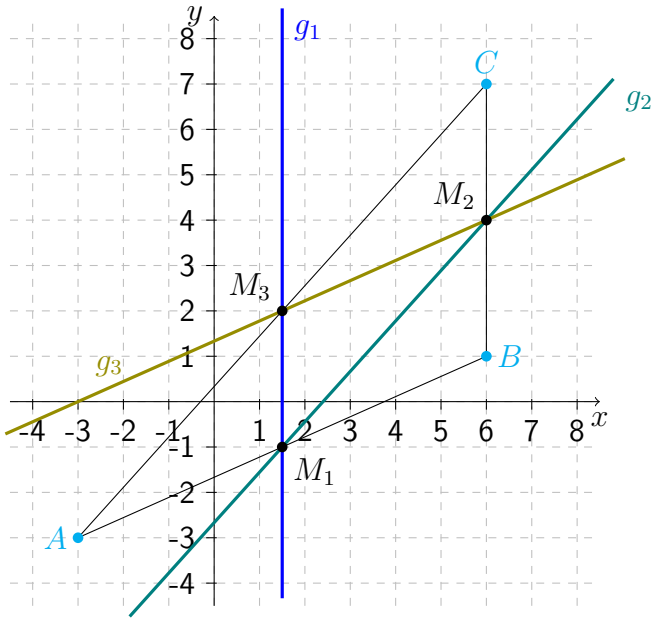
Hier muss nichts konstruiert werden. Die Lotfußpunkte und die Abstände können direkt ins Koordinatennetz eingezeichnet werden.

b) Für jede der drei Geraden muss gelten: Zwei Punkte liegen auf einer Seite, der dritte auf der anderen Seite der Geraden.

Konstruktion der ersten Geraden (siehe rechts): Eine Gerade, die zu B und C denselben Abstand hat, und für die B und C auf der selben Seite liegen, muss parallel zur y-Achse verlaufen. Die Gerade muss in der Mitte zwischen der x-Koordinate von A und der x-Koordinate von B verlaufen. Damit ist die Gerade durch $g_1 = \{(x \mid y) : x = 1,5\}$ gegeben. Zeichnet man nun die Strecke AB ein, so bemerkt man, dass sie durch g_1 halbiert wird. Das muss immer so sein, denn die Dreiecke AL_1M und BL_2M sind kongruent (alle Winkel und eine Seitenlänge sind gleich). Damit ergibt sich eine einfache Konstruktion der drei Geraden: Jede verläuft durch zwei Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC.



Gesamtlösung:
Die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC müssen nicht konstruiert werden, sondern können anhand des Rasters von Hand eingezeichnet werden. g_1, g_2, g_3 sind die gesuchten Geraden.



1.5 Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1.9 (*Schriftliche Aufgaben, Aufgabe 9*)

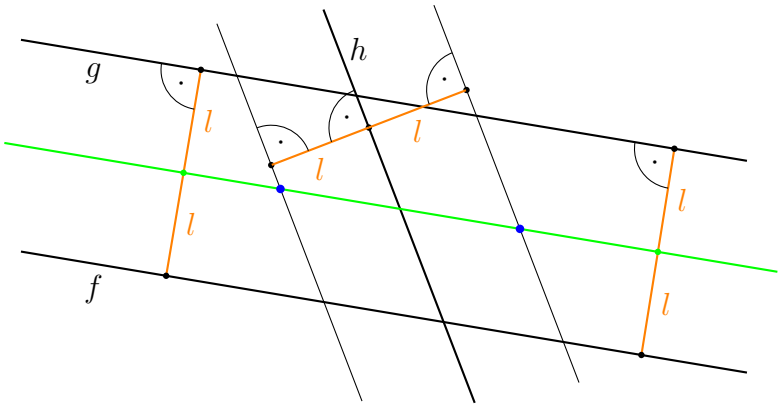
Gegeben sind die parallelen Geraden f und g und die sie schneidende Gerade h,

a) Konstruiere die Menge aller Punkte P, für die $d(P, f) = d(P, g)$ gilt (grün markieren),

b) Konstruiere die Menge aller Punkte P, für die $d(P, f) = d(P, g) = d(P, h)$ gilt (blau).

Hinweis: In dieser Aufgabe dürfen Streckenlängen mit dem Geodreieck gemessen und parallele Geraden mit dem Geodreieck konstruiert werden.

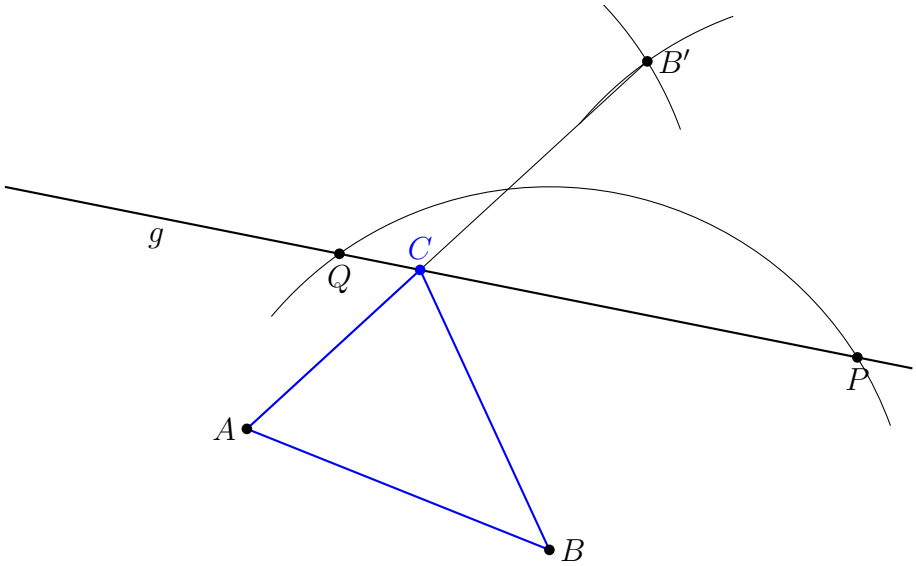
Lösung:



Aufgabe 1.10 (*Schriftliche Aufgaben, Aufgabe 10*)

Gegeben sind die Punkte A, B und die Gerade g. Konstruiere mit Zirkel und Lineal das Dreieck ABC mit $C \in g$, so dass der Umfang des Dreiecks möglichst klein ist.

Lösung:



Da die Seitenlänge $\overline{AB}$ fest ist, muss der Punkt C so konstruiert werden, dass die Summe $\overline{BC}+\overline{CA}$ möglichst klein ist.

Konstruiere B' als Spiegelpunkt von B an g: Kreis um B mit Radius r schneider g in P und Q. Kreise um P und Q mit dem selben Radius r schneiden sich in B' (und B).
Schnittpunkt der Strecke AQ mit g ist der gesuchte Punkt C.

Begründung, dass das so konstruierte Dreieck den kleinst möglichen Umfang hat: Siehe Aufgabe 7.

Aufgabe 1.11 (*Schriftliche Aufgaben, Aufgabe 11*)

Gib bei den folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Lösung:

Aussage	w/f
Sind eine Gerade g und ein Punkt P gegeben, so besitzt P mehrere Lotfußpunkte auf g	f
Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden g ist gleich zum Abstand von P zu seinem Lotfußpunkt auf g	w
Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, so gilt $d(P, g) = 0$	w
Zu einem gegebenen Punkt P gibt es genau zwei Geraden, so dass P von jeder der beiden den Abstand 2LE besitzt	f
Alle Punkte, die zu zwei verschiedenen gegebenen Punkten den selben Abstand haben, liegen auf einer Geraden	w
Sind zwei verschiedene Punkte A, B gegeben, so gibt es genau zwei Punkte, die von A und B den selben Abstand haben	f

Aufgabe 1.12 (*Schriftliche Aufgaben, Aufgabe 12*)

Gegeben sind die Gerade $g = \{(x \mid y) : y = x - 1\}$ und die Punkte $P(5 \mid -4)$ und $Q(-1 \mid 5)$.

a) Zeichne die Gerade, die Punkte P, Q und die Lote der Punkte auf g ins Koordinatensystem ein (Konstruktion mit Geodreieck).

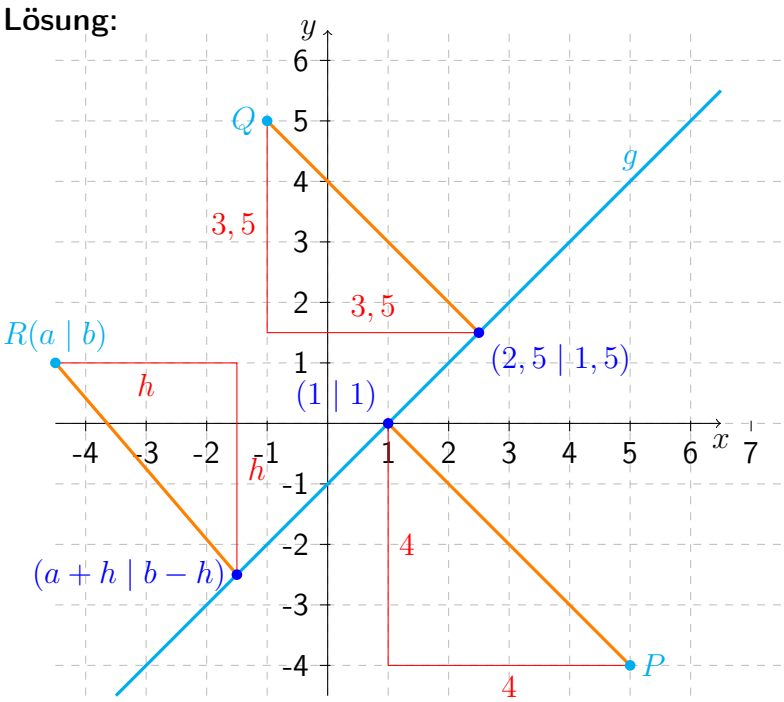
b) Welche Steigung besitzt g? Welche Steigung haben die Lote?

c) Gib die Koordinaten der Lotfußpunkte an.

d) Berechne die Abständer der Punkte P und Q von g.

e) **Zusatzaufgabe:** Nun ist ein Punkt $R(a \mid b)$ mit beliebig gewählten $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Berechne den Lotfußpunkt und den Abstand von R zu g in Abhängigkeit von a und b.

Lösung:



Steigung von g:	$m_g = 1$
Steigung der Lote:	$m_l = -1$
Lotfußpunkt zu P:	$L_P(1 \mid 0)$
Lotfußpunkt zu Q:	$L_Q(2,5 \mid 1,5)$
$d(P, g) =$	$\sqrt{2} \cdot 4$
$d(Q, g) =$	$\sqrt{2} \cdot 3,5$

$$L_R\left(\frac{b+a+1}{2} \,\middle|\, \frac{b+a-1}{2}\right)$$

$$d(R, g) = \sqrt{2}\frac{|b-a+1|}{2}$$

Nebenrechnung:
Der Lotfußpunkt L_R muss auf der Geraden $y = x - 1$ liegen

$\Rightarrow\ b - h = a + h - 1$

$\Rightarrow\ b - a + 1 = 2h$

$\Rightarrow\ h = \frac{b-a+1}{2}$

1.6 Zusatzmaterial

Aufgabe 1.13 (*Arbeitsblatt 5, Aufgabe 1*)

Zeichne die Punkte $A(-4 \mid 1)$ und $B(6 \mid 1)$ in das Koordinatensystem ein. Es gibt vier Geraden, die jeweils von A und von B den Abstand 2LE haben.

a) Zeichne die zwei Geraden g mit der folgenden Eigenschaft: $d(A, g) = 2\text{LE}$ und $d(B, g) = 2\text{LE}$ und A, B liegen auf der selben Seite von g. Zeichne die Lotfußpunkte der Lote von A bzw. B auf deine Geraden. Wenn Du diesen Aufgabenteil gelöst hast, kannst Du die nächste Aufgabe auf dem Aufgabenblatt lösen.

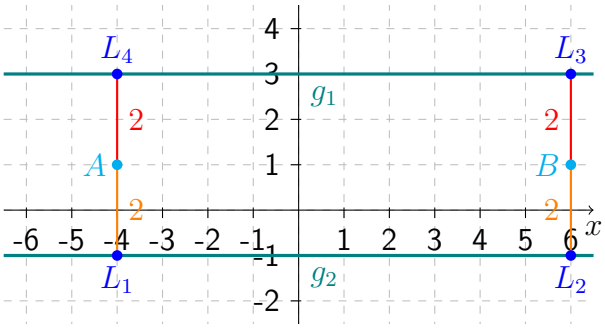
b) **Zusatzaufgabe:** Konstruiere die zwei Geraden h mit der folgenden Eigenschaft: $d(A, h) = 4LE$ und B liegt auf h, und die zwei Geraden f mit der Eigenschaft: $d(B, f) = 4LE$ und A liegt auf f.

Hinweis: Thaleskreis verwenden.

c) **Zusatzaufgabe:** Konstruiere die zwei Geraden g mit der Eigenschaft: $d(A, g) = 2\text{LE}$ und $d(B, g) = 2\text{LE}$ und A, B liegen auf verschiedenen Seiten von g.

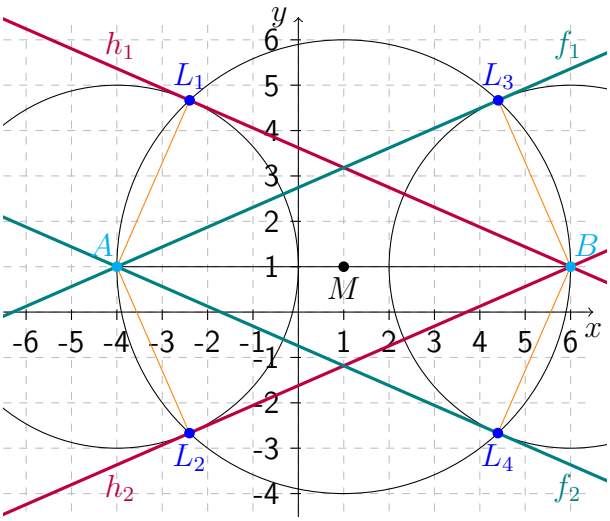
Hinweis: Die gesuchten Geraden sind jeweils zu einer Geraden aus dem vorigen Aufgabenteil parallel.

Lösung: **a)**



Hier muss nichts konstruiert werden. Die Lotfußpunkte und die Abstände können direkt ins Koordinatennetz eingezeichnet werden.

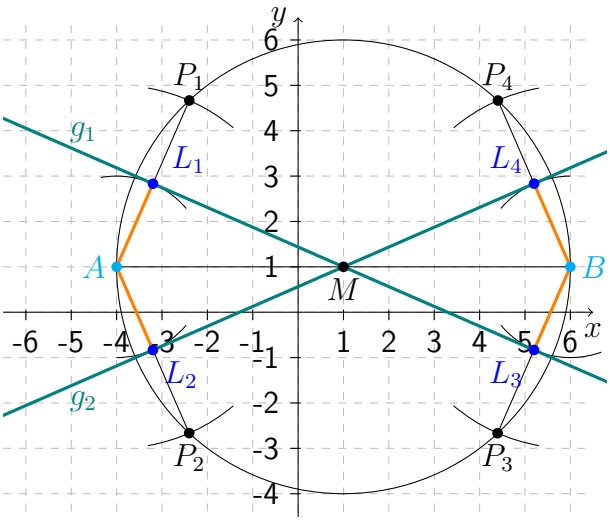
b)



Konstruktionsbeschreibung:

1) M ist Mittelpunkt der Strecke AB.
2) Kreis um M durch A schneidet Kreis um A mit $r = 2\text{LE}$ in L_1 und in L_2.
3) Nach Satz des Thales ist AL_1B ein rechter Winkel, genauso BL_2A. Die Gerade h_1 geht durch L_1 und B, die Gerade h_2 geht durch L_2 und B.
4) Kreis um M durch A schneidet Kreis um B mit $r = 2\text{LE}$ in L_3 und in L_4.
5) Die Gerade f_1 geht durch L_3 und A, die Gerade f_2 geht durch L_4 und A.

c) Hinweis: Wenn die Lösung aus dem vorigen Aufgabenteil vorliegt, können die gesuchten Geraden einfach eingezeichnet werden: Parallelverschiebung von h_1 nach unten mit 2LE Abstand ergibt g_1, und Parallelverschiebung von h_2 nach oben mit 2LE Abstand ergibt g_2. Hier ist die gesamte Konstruktion aufgeführt:



Konstruktionsbeschreibung:

1) M ist Mittelpunkt der Strecke AB.
2) Kreis um M durch A schneidet Kreise um A bzw. um B mit Radius 4LE in P_1, P_2 und in P_3, P_4.
3) Kreis um A mit Radius 2LE schneidet AP_1 in L_1 und AP_2 in L_2.
4) Kreis um B mit Radius 2LE schneidet AP_3 in L_3 und AP_4 in L_4.
5) Die gesuchten Geraden g_1, g_2 gehen durch L_1 und L_3 bzw. durch L_2 und L_4.

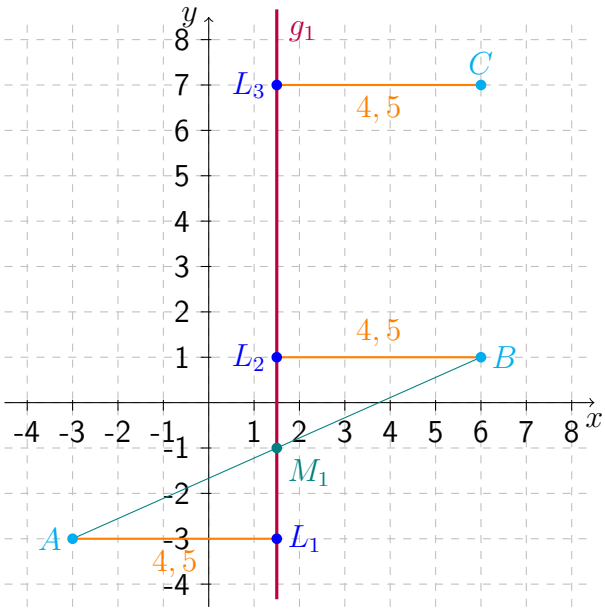
Aufgabe 1.14 (*Arbeitsblatt 5, Aufgabe 2*)

Zeichne die drei Punkte $A(-3 \mid -3)$, $B(6 \mid 1)$ und $C(6 \mid 7)$ in das Koordinatensystem ein. Konstruiere die drei Geraden, die von allen drei Punkten denselben Abstand haben. Verwende zur Darstellung verschiedener Geraden verschiedene Farben.

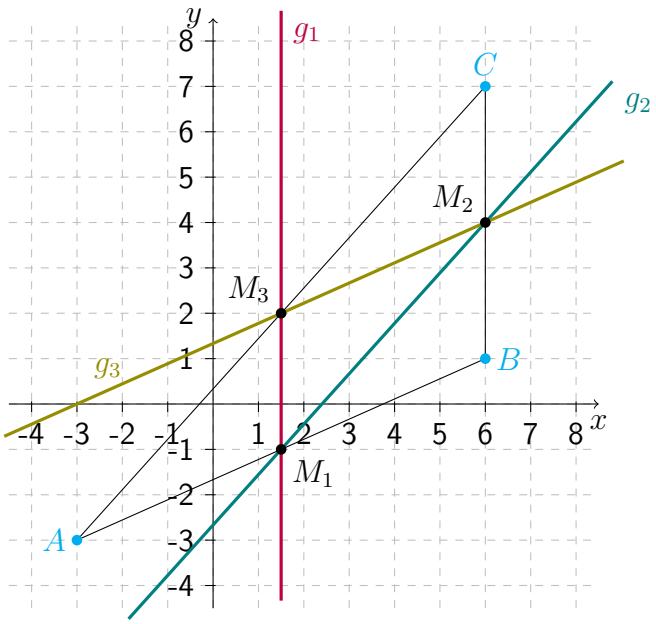
Hinweis: Wie können die drei Punkte im Verhältnis zur gesuchten Geraden liegen?

Lösung: Für jede der drei Geraden muss gelten: Zwei Punkte liegen auf einer Seite, der dritte auf der anderen Seite der Geraden.

Konstruktion der ersten Geraden (siehe rechts): Eine Gerade, die zu B und C denselben Abstand hat, und für die B und C auf der selben Seite liegen, muss parallel zur y-Achse verlaufen. Die Gerade muss in der Mitte zwischen der x-Koordinate von A und der x-Koordinate von B verlaufen. Damit ist die Gerade durch $g_1 = \{(x \mid y) : x = 1,5\}$ gegeben. Zeichnet man nun die Strecke AB ein, so bemerkt man, dass sie durch g_1 halbiert wird. Das muss immer so sein, denn die Dreiecke AL_1M und BL_2M sind kongruent (alle Winkel und eine Seitenlänge sind gleich). Damit ergibt sich eine einfache Konstruktion der drei Geraden: Jede verläuft durch zwei Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC.



Gesamtlösung:
Die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC müssen nicht konstruiert werden, sondern können anhand des Rasters von Hand eingezeichnet werden. g_1, g_2, g_3 sind die gesuchten Geraden.



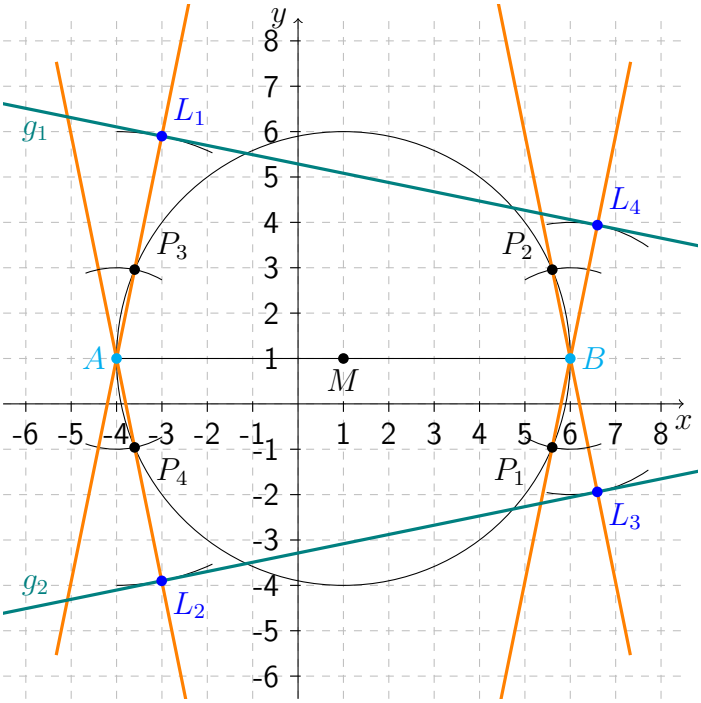
Anmerkung
Anstelle von Arbeitsblatt 5 kann die folgende kürzere Umkehraufgabe gestellt werden.

Aufgabe 1.15 (*Zusatzaufgabe*)

Zeichne die Punkte $A(-4 \mid 1)$ und $B(6 \mid 1)$ in das Koordinatensystem ein. Konstruiere die zwei Geraden g mit der Eigenschaft: $d(A, g) = 3$LE und $d(B, g) = 5$LE und A, B liegen auf der selben Seite von g.

Hinweis: Konstruiere zunächst Hilfsgeraden h, die durch einen der beiden Punkte gehen und vom anderen den Abstand 2LE (= Differenz der beiden Abstände $d(A, g)$ und $d(B, g)$) haben.

Lösung:



Konstruktionsbeschreibung:

1) M ist Mittelpunkt der Strecke AB.

2) Kreis um M durch A schneidet Kreise um A bzw. um B mit Radius 2LE in P_1, P_2 und in P_3, P_4.

3) Kreis um A mit Radius 5LE schneidet Gerade durch A, P_1 in L_1 und Gerade durch A, P_2 in L_2.

4) Kreis um B mit Radius 3LE schneidet Gerade durch A, P_3 in L_3 und Gerade durch A, P_4 in L_4.

5) Die gesuchten Geraden g_1, g_2 gehen durch L_1 und L_4 bzw. durch L_2 und L_3.

Anmerkung
Die Lösung der Zusatzaufgabe liefert eine Konstruktionsmöglichkeit für Geraden, die Tangente an zwei gegebene Kreise sind: Die Geraden g_1, g_2 sind Tangenten an den Kreis mit Radius 5LE um A und an den Kreis mit Radius 3LE um B. Entsprechend zur Lösung von Aufgabenteil c) aus Aufgabe 1.6 können die zwei weiteren Geraden konstruiert werden, die ebenfalls tangential an diese beiden Kreise sind.

Aufgabe 1.16 (*Zustzaufgabe, ähnlich wie auf schriftlichem Blatt*)

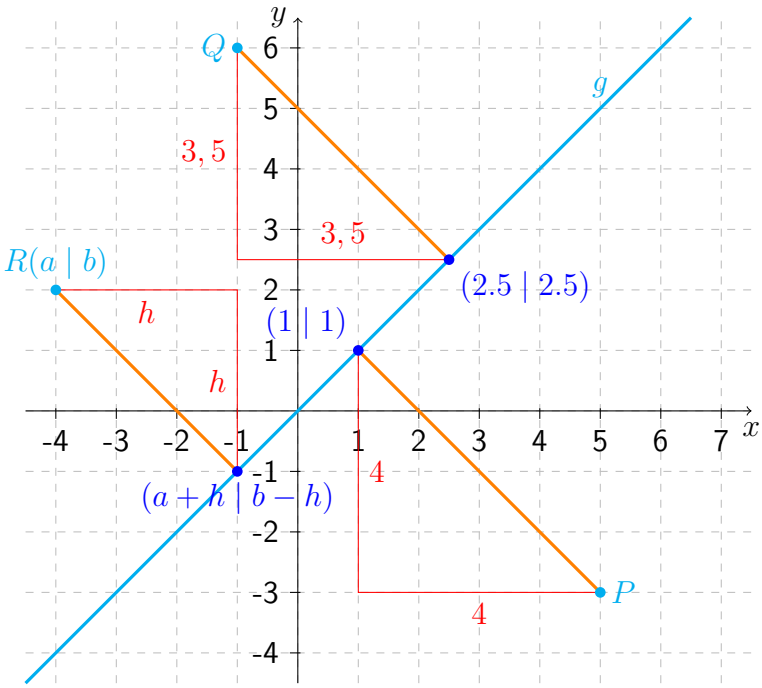
Gegeben ist die Gerade $g = \{(x \mid y) : x = y\}$. Zeichne die Gerade ins Koordinatensystem ein. Zeichne in jeder Teilaufgabe den Punkt und den Lotfußpunkt ein und bestimme den Abstand des gegebenen Punktes explizit oder gib ihn als Fomelausdruck an.

a) $P(5 \mid -3)$,

b) $Q(-1 \mid 6)$,

c) **Zusatzaufgabe:** $R(a \mid b)$ mit beliebig gewählten $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung:



a) $d(P, g) = \sqrt{2} \cdot 4$

b) $d(Q, g) = \sqrt{2} \cdot 3,5$

c) Damit der Lotfußpunkt auf g liegt, muss

$$a + h = b - h$$

gelten. Daraus folgt

$$h = \frac{1}{2}(b - a)$$

und für den Abstand

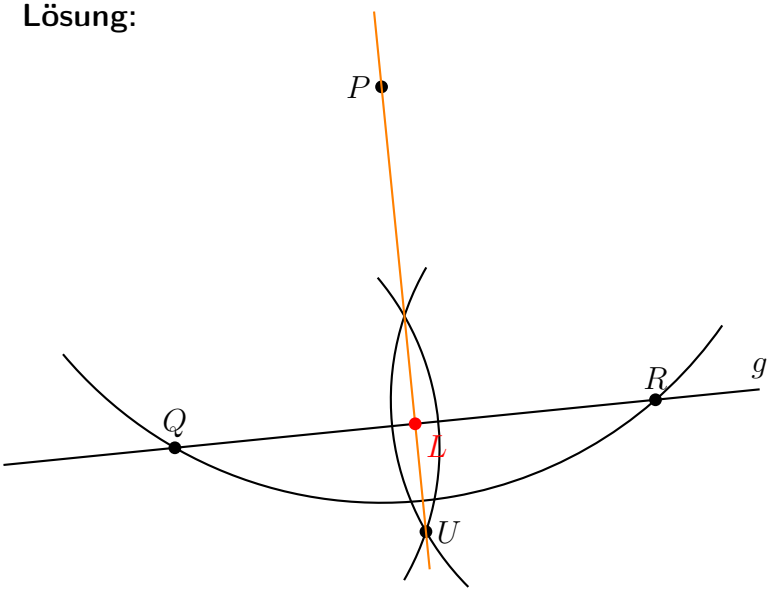
$$d(R, g) = \frac{\sqrt{2}}{2}|b - a|.$$

Graphik: `Kapitel2_Arbeitsblatt1_1.ggb`

Aufgabe 1.17 (*Zusatzaufgabe zur Wiederholung der Lotkonstruktion*)

Gegeben sind die unten skizzierte Gerade g und der eingezeichnete Punkt P. Konstruiere mit Zirkel und Lineal das Lot und den Lotfußpunkt von P auf g.

Lösung:



Konstruktionsbeschreibung:

a) Kreis um P schneidet g in Q und R.

b) Kreise um Q und R mit dem selben Radius schneiden sich in U.

c) Gerade durch P und U ist das Lot.

d) Der Schnittpunkt des Lotes mit g ist der Lotfußpunkt L.

2 Unterrichtseinheit 2 - Parabel

Inhalt dieser Stunde ist zunächst die geometrische Definition einer Parabel als Ort aller Punkte, die vom Brennpunkt und von der Leitgeraden gleich weit entfernt sind. Ausgehend von dieser Definition wird die analytische Beschreibung einer Parabel hergeleitet, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse ist. In den Zusatzaufgaben werden auch analytische Beschreibungen von Parabeln thematisiert, die anders im Koordinatensystem liegen.

2.1 Wiederholung

Dauer: 10 min
Ziel: Wiederholung des Wissens über Abstandsberechnung aus der letzten Einheit
Material: Arbeitsblatt 1

Aufgabe 2.1 (*Arbeitsblatt 1, Aufgabe 1*)

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 2x$ (vgl. Graphik).

a) Zeichne mit dem Geodreieck die zu g senkrechte Gerade h, die durch den Punkt $(0 \mid 0)$ verläuft.

b) Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0 \mid 0)$, $B(2 \mid 0)$, $C(2 \mid 4)$.

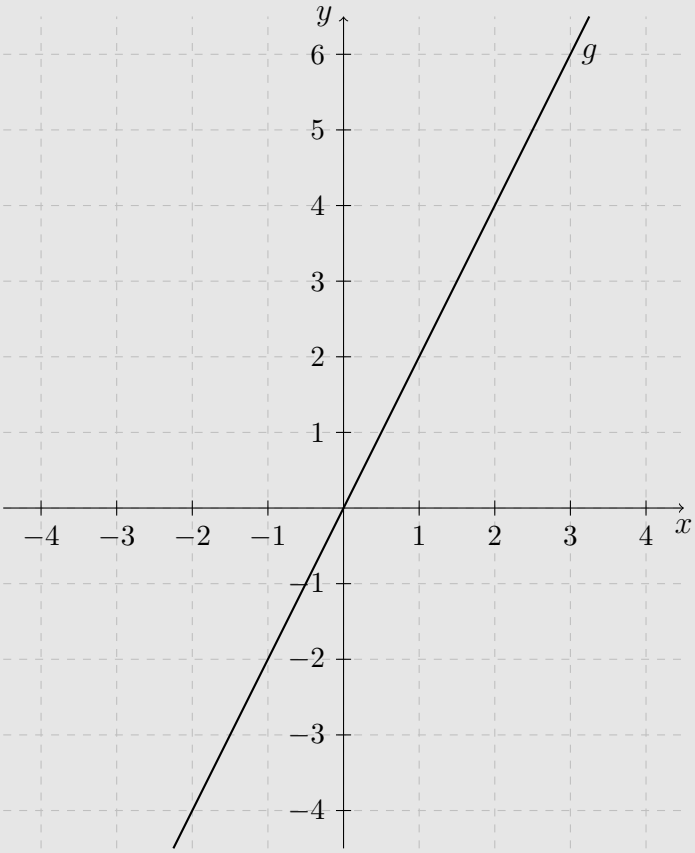
c) Drehe das Dreieck ABC um A mit Winkel $90°$ im Uhrzeigersinn. Dann liegt eine Seite des gedrehten Dreiecks auf h.

d) Berechne die Steigung und die Geradengleichung von h.

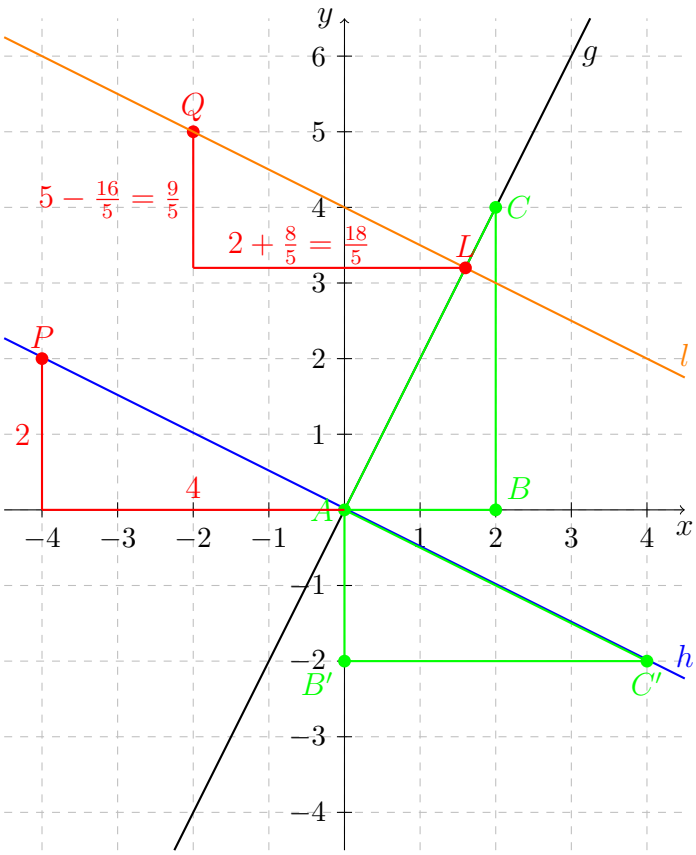
e) Berechne den Abstand des Punktes $P(-4 \mid 2)$ zu g.

f) Zeichne den Punkt $Q(-2 \mid 5)$ in das Koordinatensystem ein.

g) Berechne die Gleichung des Lotes von Q auf g, die Koordinaten des Lotfußpunktes L_Q und den Abstand $d(Q, g)$.



Lösung:



d) $m_h = -\frac{1}{2}$, $h: y = -\frac{1}{2}x$

e) $d(P,h) = \overline{PA} = \sqrt{2^2+4^2}$
$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

f) y-Achsenabschnitt 4 aus Skizze
$\Rightarrow\ l: y = -\frac{1}{2}x + 4$
Oder Punkt-Steigungsform:
$y = y_0 + m(x - x_0)$
$\Rightarrow\ y = 5 - \frac{1}{2}(x+2) = 4 - \frac{1}{2}x$
Schnitt von l mit g:

$$\begin{array}{rrcl} & -\frac{1}{2}x + 4 & = & 2x \ \big|\ +\frac{1}{2}x \\ \Leftrightarrow & 4 & = & \frac{5}{2}x \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{8}{5} \\ \Rightarrow & y & = & 2x = \frac{16}{5} \end{array}$$

$\Rightarrow\ L\left(\frac{8}{5} \,\middle|\, \frac{16}{5}\right)$

$$d(Q,g) = \overline{QL} = \sqrt{\left(\tfrac{9}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{18}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\tfrac{9}{5}\right)^2(1+4)} = \tfrac{9}{5}\sqrt{5}$$

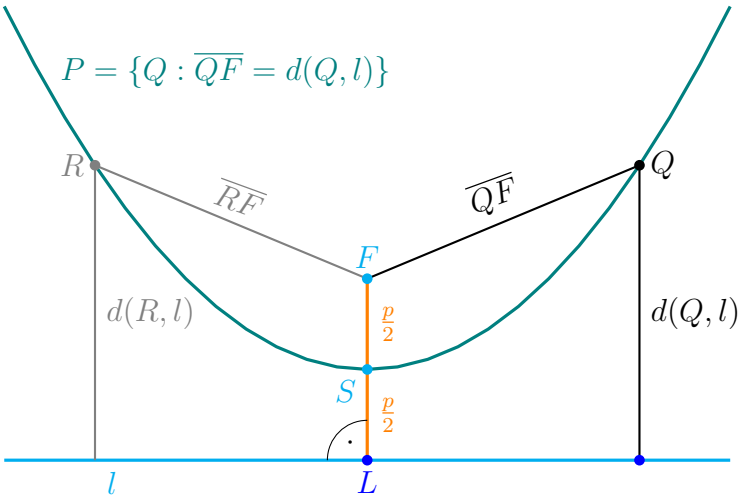
2.2 Definition einer Parabel

Dauer: 25 min
Ziel: Definition einer Parabel kennenlernen, Parabelpunkte mit Zirkel und Geodreieck konstruieren
Material: Arbeitsblatt 2

Tafelanschrieb

2. Parabeln

Definition: Eine Parabel P ist gegeben durch eine Gerade l und einen Punkt F, der nicht auf l liegt. Die Parabel ist die Menge aller Punkte, deren Abstand zu F gleich dem Abstand zu l ist. Die Gerade l heißt Leitlinie, der Punkt F heißt Brennpunkt der Parabel (engl. Focus).



Graphik: `Kapitel2_DefinitionParabel.ggb`

Der Punkt S auf der Parabel, der das Lot von F auf l halbiert, heißt Scheitelpunkt. Der Abstand von F zu l wird mit p bezeichnet.

An der Konstruktion erkennt man: Die Parabel ist symmetrisch zur Geraden durch F, die senkrecht auf l steht.

Anmerkung

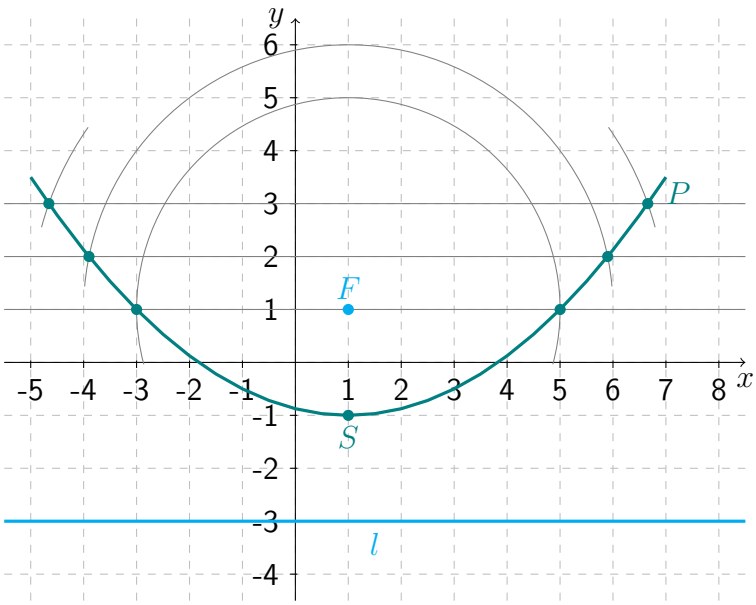
Parabeln werden in diesem Kapitel mit dem Großbuchstaben P bezeichnet, im Unterschied zu dem Abstand p von F und l. In den späteren Kapiteln werden Kegelschnitte mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

Aufgabe 2.2 (*Arbeitsblatt 2, Aufgabe 2*)

Gegeben ist die Parabel P mit Brennpunkt $F(1 \mid 1)$ und der Leitgeraden $l = \{(x \mid y) : y = -3\}$.

Zeichne den Brennpunkt, die Leitgerade und den Scheitelpunkt ins Koordinatensystem ein. Konstruiere mindestens sechs weitere Punkte der Parabel und zeichne dann die Parabel. Du kannst als Parallelen zur Leitgeraden einfach die Gitterlinien benützen.

Lösung:



Graphik: `Kapitel2_Arbeitsblatt2_1.ggb`

> **Anmerkung**
> Falls das schriftliche Aufgabenblatt nicht verwendet wird, kann hier als Zusatzaufgabe eine Aufgabe mit einer schräg im Koordinatensystem liegenden Parabel gestellt werden, siehe Abschnitt *2.6 Weitere Aufgaben*.

2.3 Analytische Beschreibung

Dauer: 35 min
Ziel: Analytische Beschreibung einer Parabel, Verschiebung von Parabeln, allgemeine Parabelgleichung für Parabeln, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse liegt.
Material: Arbeitsblatt 3

Tafelanschrieb

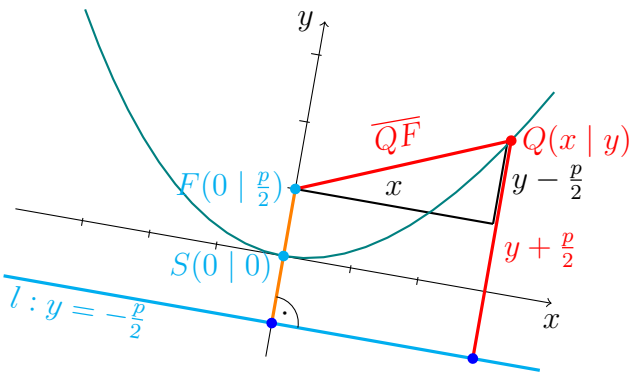
Analytische Beschreibung: Eine Parabel ist durch l und F gegeben. Wähle ein dazu passendes Koordinatensystem:

1) x-Achse: Parallele zu l durch S,

2) y-Achse: Orthogonale zu l durch F.

In diesem Koordinatensystem:
$S(0,0)$, $F(0,\frac{p}{2})$, $l = \{(x,y) : y = -\frac{p}{2}\}$
und für $Q(x,y)$:

$$\begin{aligned} \overline{QF} &= \sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2 + x^2}, \\ d(Q,l) &= y + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$



Graphik: `Kapitel2_analytischeBeschreibung.ggb`

Tafelanschrieb

Also:

$$\begin{aligned} Q(x \mid y) \text{ liegt auf der Parabel } &\Leftrightarrow \sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2 + x^2} = y + \frac{p}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(y-\frac{p}{2}\right)^2 + x^2 = \left(y+\frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 - py + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + x^2 = y^2 + py + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2p\,y \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2p}\,x^2. \end{aligned}$$

<u>Satz:</u> Sei $p \neq 0$ gegeben. Dann ist

$$P := \{(x,y) : y = \frac{1}{2p}\,x^2\} \qquad (*)$$

eine Parabel mit Leitgerade $l = \{(x,y) : y = -\frac{p}{2}\}$ und Brennpunkt $F(0, \frac{p}{2})$. Jede Parabel mit $d(F,l) = p$ besitzt in einem geeignet gewählten Koordinatensystem diese Darstellung.
Im Fall $p < 0$ beschreibt $(*)$ eine nach unten geöffnete Parabel.

Aufgabe 2.3 (*Arbeitsblatt 3, Aufgabe 3*)

Gegeben ist die Parabel $P = \{(x \mid y) : y = x^2\}$.

a) Gib die Koordinaten des Brennpunkts F und die Gleichung der Leitgeraden l an. Zeichne beides in das untenstehende Koordinatensystem ein. Skizziere grob die Parabel. Beachte: Die Punkte $Q(1 \mid 1)$ und $R(-1 \mid 1)$ liegen auf der Parabel.

Diese Parabel soll nun im Koordinatensystem verschoben werden. Gib jeweils die Koordinaten des Brennpunkts und die Gleichung der Leitgeraden für die verschobene Parabel an und auch die Gleichung, die die verschobene Parabel beschreibt. Kontrolliere, ob die entsprechend verschobenen Punkte Q, R die gefundene Parabelgleichung erfüllen.

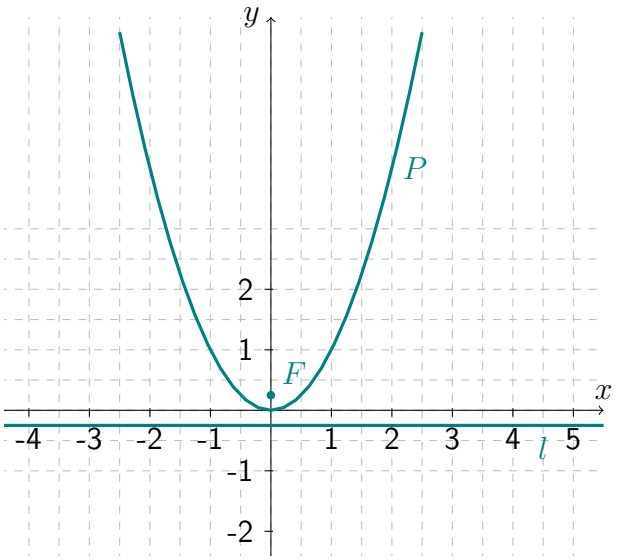
b) Die Parabel P wird um 5LE nach rechts (d.h. in Richtung der positiven x-Achse) verschoben.

c) Die Parabel P wird um 2LE nach unten (d.h. in Richtung der negativen y-Achse) verschoben.

d) Die Parabel P wird um 5LE nach rechts und um 2LE nach unten verschoben.

e) Die Parabel P wird um aLE nach rechts und um bLE nach oben verschoben ($a, b \in \mathbb{R}$ beliebig).

Lösung: **a)**



Bei $y = x^2$ gilt $p = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Leitgerade: } y = -\frac{1}{4} \\ \text{Brennpunkt } F(0, \frac{1}{4}). \end{cases}$

b) $F_b(5 \mid \frac{1}{4})$, Leitgerade $l : y = -\frac{1}{4}$, Parabelgleichung $P_b : y = (x-5)^2$.

Die verschobenen Punkte $Q_b(6, 1)$ und $R_b(4, 1)$ erfüllen die Parabelgleichung.

c) $F_c(0 \mid -\frac{7}{4})$, Leitgerade $l : y = -\frac{9}{4}$, Parabelgleichung $P_c : y = x^2 - 2$.

Die verschobenen Punkte $Q_c(1, -1)$ und $R_c(-1, -1)$ erfüllen die Parabelgleichung.

d) $F_d(5 \mid -\frac{7}{4})$, Leitgerade $l : y = -\frac{9}{4}$, Parabelgleichung $P_d : y = (x-5)^2 - 2$.

Die verschobenen Punkte $Q_d(6, -1)$ und $R_d(4, -1)$ erfüllen die Parabelgleichung.

e) $F_e(a \mid b - \frac{1}{4})$, Leitgerade $l : y = b - \frac{1}{4}$, Parabelgleichung $P_e : y = (x-a)^2 + b$.

Die verschobenen Punkte $Q_e(a+1, b+1)$ und $R_e(a-1, b+1)$ erfüllen die Parabelgleichung.

Aufgabe 2.4 (*Arbeitsblatt 3, Aufgabe 4*)

a) Die Parabel P_1 ist durch die Gleichung $y = \frac{1}{3}(x+2)^2+1$ gegeben. Bestimme die Koordinaten des Brennpunkts F_1 und die Gleichung der Leitgeraden l_1.

Hinweis: Betrachte zunächst die Parabel P_2, die durch die Gleichung $y = \frac{1}{3}x^2$ beschrieben wird. Bestimme die Koordinaten des Brennpunkts F_2 und die Gleichung der Leitgeraden l_2. Überlege dann, wie P_2 verschoben werden muss, damit sie mit P_1 zur Deckung kommt.

b) Die Parabel P_3 ist durch die Gleichung $y = x^2+6x+10$ gegeben. Bestimme die Koordinaten ihres Brennpunkts F_3 und die Gleichung ihrer Leitgeraden l_3.

c) Gegeben sind drei Punkte $Q_1(0 \mid 1)$, $Q_2(1 \mid -5)$, $Q_3(-1 \mid 3)$. Bestimme die Gleichung der Parabel P_4, die durch diese drei Punkte verläuft. Gib die Koordinaten des Brennpunkts F_4 und die Gleichung der Leitgeraden l_4 an.

Hinweis: Die Parabel wird durch eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ beschrieben. Bestimme zunächst a, b, c.

d) **Zusatzaufgabe:** Für beliebige, aber festgehaltene $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ ist die Parabel P_5 durch die Gleichung $y = ax^2+bx+c$ gegeben. Bestimme die Koordinaten des Brennpunkts F_5 und die Gleichung der Leitgeraden l_5.

Lösung: **a)** $P_2 : y = \frac{1}{3}x^2 \overset{!}{=} \frac{1}{2p}x^2 \;\Rightarrow\; p = \frac{3}{2},\; F_2(0 \mid \frac{3}{4}),\; l_2 : y = -\frac{3}{4}$
P_2 muss um 2LE nach links und um 1LE nach oben vershoben werden
$\Rightarrow\; F_1(-2 \mid \frac{7}{4}),\; l_1 : y = \frac{1}{4}$

b) Quadratische Ergänzung liefert $y = x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1$

$\Rightarrow\; p = \frac{1}{2}$ und $F_3(-3 \mid \frac{5}{4})$, $l : y = \frac{3}{4}$.

c) Setze die Punkte ein:
$$\begin{array}{lrcl} Q_1: & 1 & = & 0+0+c \\ Q_2: & -5 & = & a+b+c \\ Q_3: & 3 & = & a-b+c \end{array} \;\Rightarrow\; a = -2,\; b = -4,\; c = 1$$

$\Rightarrow\; y = -2x^2 - 4x + 1 = -2(x+1)^2 + 3$

$\Rightarrow\; p = -1$ und $F_3(-1 \mid \frac{5}{2})$, $l : y = \frac{3}{2}$.

d) Quadratische Ergänzung: $y = ax^2 + bx + c = a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}$

$\Rightarrow\; p = a$ und $F_3(-\frac{b}{2a} \mid \frac{a}{2} + c - \frac{b^2}{4a^2})$, $l : y = -\frac{a}{2} + c - \frac{b^2}{4a^2}$.

2.4 Allgemeine Parabelgleichung und Symmetrie

Dauer: 20 min
Ziel: Gleichung für Parabeln mit Symmetrieachse parallel zur y-Achse aufstellen und Symmetrie an der analytischen Darstellung sehen. Gleichungsdarstellung für eine Parabel aufstellen, deren Symmetrieachse parallel zur x-Achse ist
Material: Arbeitsblatt 4

Tafelanschrieb

Satz: Jede Parabel, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse ist, besitzt eine Darstellung der Form $y = ax^2 + by + c$ mit geeigneten Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Umgekehrt: Durch die Gleichung $y = ax^2 + by + c$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ wird eine Parabel beschrieben, die symmetrisch zur Geraden $x = -\frac{b}{2a}$ ist.

Beweis: Liegt eine nach oben geöffnete Parabel vor, so entsteht sie aus der Parabel mit der Gleichungf $y = \frac{1}{2p}x^2$ durch Verschiebung um A nach rechts und B nach oben. Die Gleichungsdarstellung wird dadurch zu

$$y \;=\; \frac{1}{2p}(x-A)^2 + B \;=\; \underbrace{\frac{1}{2p}}_{=:a}\, x^2 - \underbrace{\frac{1}{p}A}_{=:b}\, x + \underbrace{\frac{1}{2p}A^2 + B}_{=:c}$$

Liegt eine nach unten geöffnete Parabel vor, so emntsteht sie aus der Parabel $y = -\frac{1}{2p}x^2$ durch Verschiebung, Rest genauso.
Betrachte die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ gegeben. Quadratisch ergänzen:

$$y \;=\; a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\Big) - a\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 + c \;=\; a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Dies beschreibt eine Parabel mit $a = \frac{1}{2p} \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{2a}$, $F\big(-\frac{b}{2a}\big|\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c\big)$, $l : y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$.
$\Rightarrow$ Diese Parabel ist symmetrisch zur Geraden $x = -\frac{b}{2a}$.$\square$

Symmetrie: Ist eine Parabel durch $y = \frac{1}{2p}\,x^2$ gegeben, so ist sie symmetrisch zur y-Achse. In der Formel sieht man das daran, dass $\frac{1}{2p}\,(-x)^2 = \frac{1}{2p}\,x^2$, d.h. ersetzt man x durch $-x$, so bleibt der y-Wert gleich.

Die Parabel P sei durch $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ gegeben. Quadratisch ergänzen:

$$y \;=\; a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\Big) - a\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 + c \;=\; a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Dies beschreibt eine Parabel mit $a = \frac{1}{2p} \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{2a}$, $F\big(-\frac{b}{2a}\big|\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c\big)$, $l : y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$.
$\Rightarrow$ Diese Parabel ist symmetrisch zur Geraden $x = -\frac{b}{2a}$.

Aufgabe 2.5 (*Arbeitsblatt 4, Aufgabe 5*)

Die Parabel P ist durch den Brennpunkt $F(1 \mid 1)$ und die Leitgerade $l = \{(x \mid y) : x = -4\}$ gegeben.

a) Zeichne F und die Leitgerade ins Koordinatensystem ein.

b) Gib die Koordinaten des Scheitels S an und zeichne S ein.

c) Zeichne die Punkte $R(1 \mid 6)$ und $R'(1 \mid -4)$ ein. Warum liegen sie auf der Parabel?

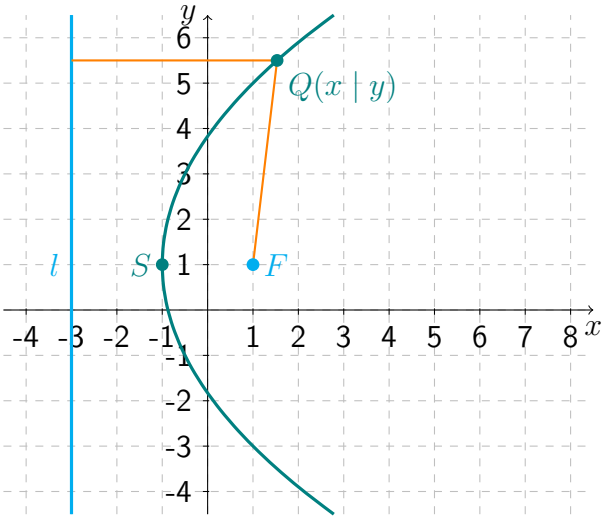
d) Zeichne die Symmetrieachse g der Parabel ein und gib die Gleichung von g an.

e) Skizziere die Parabel.

f) Zeichne Q der Parabel, der nicht der Scheitel ist, ins Koordinatensystem ein. Nimm an, die Koordinaten des Punktes Q seien $(x \mid y)$. Leite eine Gleichung für x, y her, die genau dann erfüllt ist, wenn Q auf der Parabel liegt. Löse diese Gleiuchung nach x auf.

g) Warum kann diese Parabel nicht durch eine Gleichung der Form $y = f(x)$ beschrieben werden?

Lösung: **a)**



Es gilt
$\overline{QF} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$
$d(Q, l) = |x+3|$

Q liegt auf der Parabel
$\Leftrightarrow \; d(Q, l) = \overline{QF}$
$\Leftrightarrow \; (x+3)^2 =$
$= (x-1)^2 + (y-1)^2$
$\Leftrightarrow \; x^2 + 6x + 9 =$
$= x^2 - 2x + 1 + (y-1)^2$
$\Leftrightarrow \; 8x + 8 = (y-1)^2$
$\Leftrightarrow \; x = \frac{1}{8}(y-1)^2 - 1$

b) Für jeden x-Wert mit $x \geq -1$ liegen zwei Punkte $(y_1 \mid x), (y_2 \mid x)$ auf der Parabel. Deshalb kann sie nicht als Graph einer Funktion dargestellt werden. Ein Graph einer Funktion hat zu jedem x-Wert genau einen Punkt.

2.5 Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 2.6 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 6*)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Kreuze an.

Lösung:

	w	f
Eine Parabel kann man in ein Koordinatensystem einzeichnen, wenn man die Gleichung der Leitgeraden g und die Koordinaten des Brennpunktes F kennt.	×	
Zu jeder Parabel kann ein Koordinatensystem so gewählt werden, dass die Parabel mit dem Graphen $y = \frac{1}{2p}x^2$ übereinstimmt.	×	
Verschiebt man eine Parabel der Form $y = \frac{1}{2p}x^2$ um 2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung, so sind die Koordinaten des neuen Scheitelpunktes $(3 \mid 2)$.		×
Ist eine Parabel durch die Gleichung $y = \frac{1}{8}(x-2)^2 + 5$ gegeben, so kann kann man den Scheitel der Parabel angeben, ohne zu rechnen.	×	
Jede Parabel ist punktsymmetrisch.		×
Jede Parabel ist Graph einer Funktion.		×
Ist eine Parabel durch die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ gegeben, so ist sie symmetrisch zu der Geraden mit der Gleichung $x = -\frac{b}{2a}$.	×	

Aufgabe 2.7 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 7*)

Eine Brücke soll durch einen Parabelbogen gestützt werden (siehe Photo). Die Spannweite am waagrechten Boden soll 40m betragen und die Scheitelhöhe 60m. Die Symmetrieachse des Bogens soll senkrecht auf den waagrechten Boden stehen.

a) Benütze ein Koordinatensystem, dessen x-Achse parallel zum Boden durch den Parabelscheitel verläuft, und dessen y-Achse senkrecht dazu durch den Scheitel verläuft. Wie lautet die Parabelgleichung in diesem Koordinatensystem? (1LE$=1$m)

Antwort:

b) Welche Gleichung hat die Parabel in dem Koordinatensystem, dessen x-Achse durch die beiden Fußpunkte und dessen y-Achse senkrecht dazu durch den Scheitel verläuft?

Antwort:

Graphik: `Kapitel2_Parabelbruecke.png`

Lösung: **a)** Da der Scheitel im Ursprung des Koordinatensystems liegt und nach unten geöffnet ist, muss die Parabelgleichung von der Form $y = -ax^2$ sein. Da die Parabel durch den Punkt $(20 \mid -60)$ verlaufen soll, muss $-60 = -400a$ gelten, also $a = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$. Die Parabelgleichung lautet also

$$y = -\frac{3}{20}x^2.$$

b) Da das Koordinatensystem um 60 nach unten verschoben wird (parallel zur y-Achse), lautet die Gleichung

$$y = 60 - \frac{3}{20}x^2.$$

Aufgabe 2.8 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 8*)

Die Parabel P ist durch die Gleichung $y = \frac{1}{6}(x-2)^2 + 1$ gegeben. Bestimme die Koordinaten ihres Brennpunkts F und die Gleichung ihrer Leitgeraden l.

Hinweis: Betrachte zunächst die Parabel P', die durch die Gleichung $y = \frac{1}{6}x^2$ beschrieben wird. Bestimme die Koordinaten des Brennpunkts F' und die Gleichung der Leitgeraden l'. Überlege dann, wie P' verschoben werden muss, um P zu erhalten.

Lösung: Für $P' : y = \frac{1}{6}x^2$ gilt $p' = 3$. $\Rightarrow$ $F'(0 \mid \frac{3}{2})$, $l' : y = -\frac{3}{2}$.

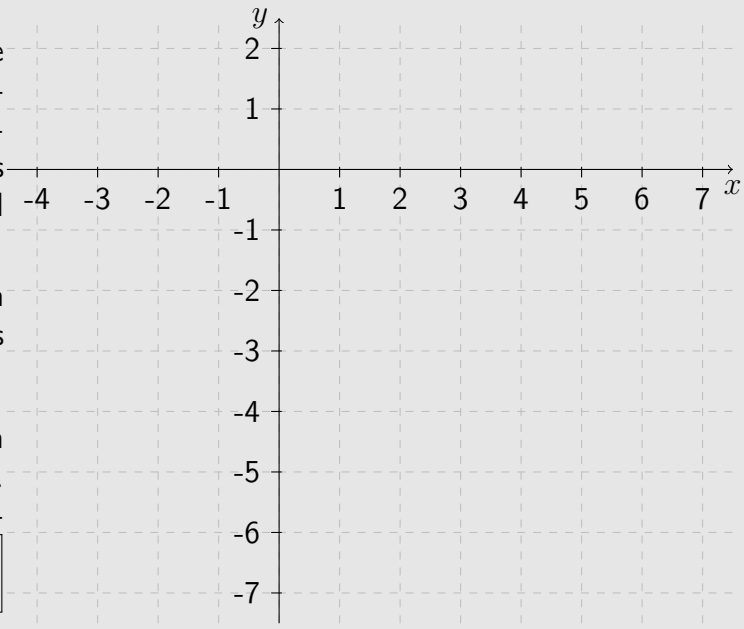
Verschiebung um 2 nach rechts und um 1 nach oben liefert P_1 $\Rightarrow$ $F_1(2 \mid \frac{5}{2})$, $l : y = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 2.9 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 9*)

Gegeben ist die Parabel P mit dem Brennpunkt $F(2 \mid -2)$ und der Leitgeraden $l = \{(x \mid y) : y = x\}$.

a) Zeichne den Brennpunkt F, die Leitgerade l und den Scheitelpunkt S ins Koordinatensystem ein. Konstruiere mindestens sechs weitere Punkte der Parabel und zeichne dann die Parabel.

Hinweis: Du kannst Parallelen zur Leitgeraden mit Hilfe des Geodreiecks zeichnen.

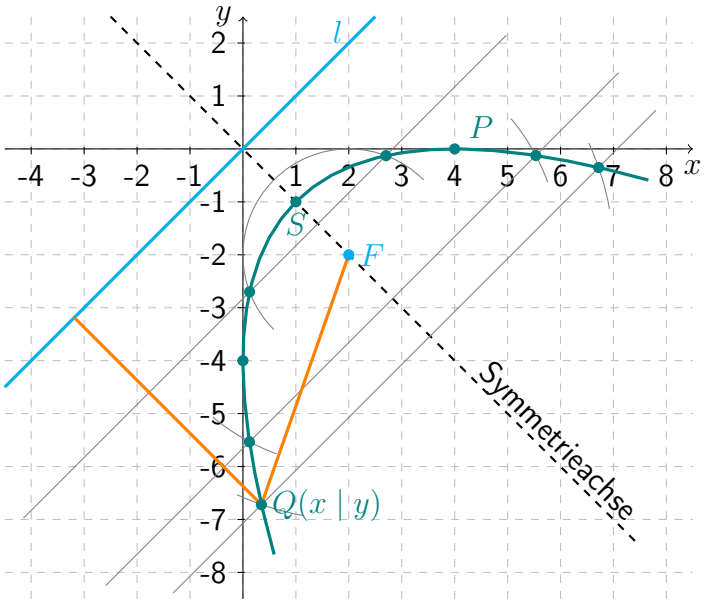


b) Zeichne die Symmetrieachse von P in das Koordinatensystem ein. Gib die Gleichung der Symmetrieachse an: $\boxed{}$

c) **Zusatzaufgabe:** Zeichne einen weiteren Punkt Q der Parabel ein, der nicht der Scheitel der Parabel P ist. Nimm an, die Koordinaten des Punktes Q seien $(x \mid y)$. Leite eine Gleichung für x, y her, die genau dann erfüllt ist, wenn Q auf der Parabel liegt.

Hinweis: Der Abstand des Punktes $Q(x \mid y)$ von l ist gegeben durch $d(Q, l) = \frac{1}{\sqrt{2}}|x + y|$. Die Gleichung, die man für die Parabel erhält, kann weder nach x noch nach y eindeutig aufgelöst werden.

Lösung:



a) Ohne Konstruktion kann man sehen, dass die Punkte $(4 \mid 0)$ und $(0 \mid -4)$ auf der Parabel liegen.

b) Symmetrieachse: $y = -x$

c) Es gilt

$$\overline{QF} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}.$$

Mit dem Hinweis erhält man

$$\begin{aligned}
\overline{QF} &= d(Q,l) \\
\Leftrightarrow \overline{QF}^2 &= d(Q,l)^2 \\
\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 &= \tfrac{1}{2}(x+y)^2 \\
\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 &= \\
&= \tfrac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) \\
\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - xy - 4x + 4y + 8 &= 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 8x + 8y + 16 &= 0
\end{aligned}$$

2.6 Weitere Aufgaben

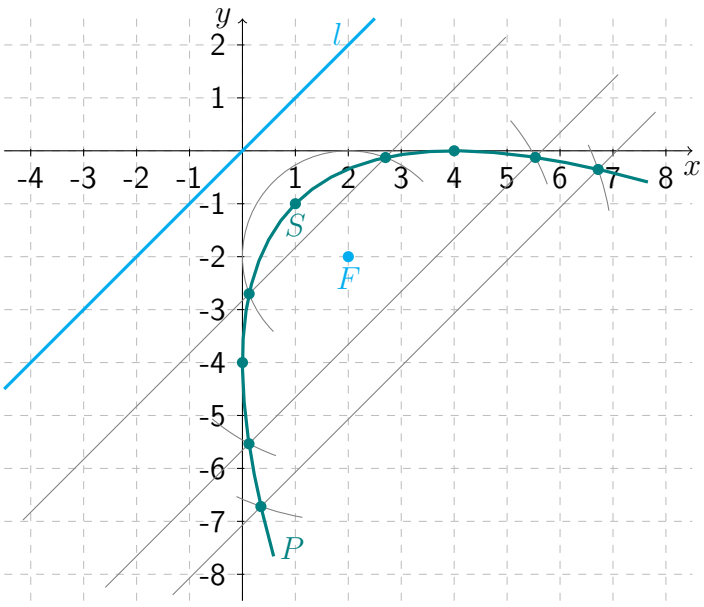
Aufgabe 2.10 (*Zusatzaufgabe*)

Gegeben ist die Parabel P mit dem Brennpunkt $F(2 \mid -2)$ und der Leitgeraden $l = \{(x \mid y) : y = x\}$.

Zeichne den Brennpunkt, die Leitgerade und den Scheitelpunkt ins Koordinatensystem ein. Konstruiere mindestens sechs weitere Punkte der Parabel und zeichne dann die Parabel.

Hinweis: Du kannst Parallelen zur Leitgeraden mit Hilfe des Geodreiecks zeichnen, sie müssen nicht mit dem Zirkel konstruiert werden.

Lösung:



Hinweis: Ohne Konstruktion kann man sehen, dass die Punkte $S(1 \mid -1)$ und

$$(4 \mid 0) \text{ und } (0 \mid -4)$$

auf der Parabel liegen.

Graphik: `Kapitel2_Arbeitsblatt2_Z1.ggb`

Aufgabe 2.11 (*Arbeitsblatt 4, Zusatzaufgabe 4*)

a) Bestimme die Koordinaten des Scheitels S der Parabel, die durch die Gleichung $y = x(1-x)$ beschrieben wird. Was ist der maximale Funktionswert, den die Funktion f mit $f(x) = x(1-x)$ für $x \in \mathbb{R}$ annimmt?

b) Folgere aus a), welches das Maximum der Funktion g mit $g(x) = x^2(1-x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$ und welches das Maximum der Funktion h mit $h(x) = x\sqrt{1-x^2}$ für $x \in [0,1]$ ist. Für welchen x-Wert werden die Maxima angenommen?

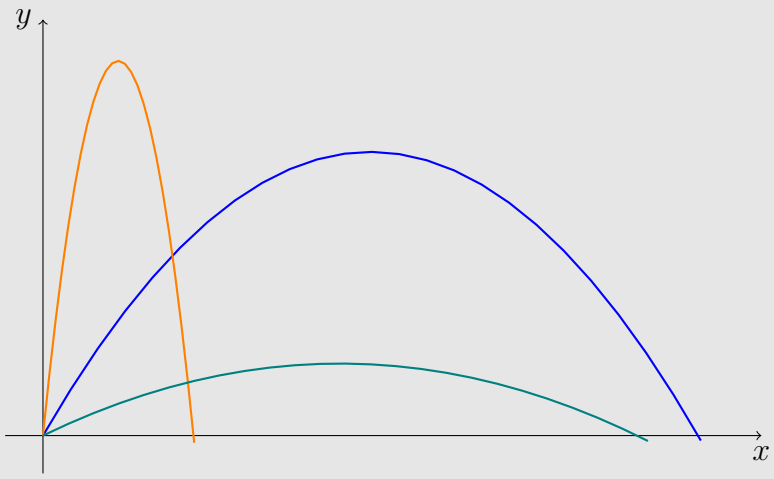
c) Ein Ball wird vom Punkt $(0 \mid 0)$ aus in Richtung des Vektors $c\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ geworfen. c gibt den Betrag der Geschwindigkeit und φ den Winkel zwischen Wurfrichtung und x-Achse an. Der Ball fliegt längs einer parabelförmigen Bahn mit der Gleichung

$$y = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}x - 10\frac{x^2}{c^2\cos^2\varphi}$$

Berechne die x-Koordinate des Punktes, an dem der Ball auf den Boden ($y = 0$) auftrifft. Für welchen Wert von $\cos\varphi$ fliegt der Ball am weitesten (bei konstantem c)?

Hinweis: Verwende $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$ und das Ergebnis aus Teil b).

Plots von Wurfparabeln mit der selben Anfangsgeschwindigkeit und verschiedenen Wurfrichtungen:



Graphik: `Kapitel2_Wurfparabeln.ggb`

Lösung: **a)** $y = x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Die Parabel ist nach unten geöffnet, also wird der maximale Funktionswert im Scheitel angenommen.

$\Rightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{4} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $g(x) = x^2(1-x^2) = f(x^2) \;\Rightarrow\; \max\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \dfrac{1}{4} = g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$h(x) = x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{g(x)} \;\Rightarrow\; \max_{x\in[0,1]} h(x) = \frac{1}{2} = h\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

c) $$\begin{aligned} y = 0 \;&\Leftrightarrow\; 0 = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}x - 10\frac{x^2}{c^2\cos^2\varphi} = x\Big(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - 10\frac{x}{c^2\cos^2\varphi}\Big) \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = \frac{c^2}{10}\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{c^2}{10}\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}\cos(\varphi) \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = \frac{c^2}{10}h\big(\cos(\varphi)\big) \end{aligned}$$

Nach b) ist x maximal für $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_{\max} = \frac{c^2}{10}\cdot\frac{1}{2}$.

Die maximal Wurfweite wird bei einem Wurfwinkel von $\varphi = 45°$ erreicht.

Zusätzliche Hinweise:

- Für die Skizze der Wurfparabeln wurde die Parabelgleichung

$$y \;=\; \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\,x - \frac{x^2}{20a^2}$$

  zugrundegelegt. Die drei Wurfparabeln ergeben sich für $a = 0,1$, $a = 0,5$ und $a = 0,9$.

- Die hier benützten Formeln gelten nur im Vakuum. In der Realität wird der Ball durch den Luftwiderstand abgebremst. Dann ist die Flugkurve keine Parabel, und der optimale Wurfwinkel ist kleiner als $45°$. Die Bahnkurve kann unter der Annahme von konstanter Erdanziehung ($F = mg$, $g =$ konstant) und konstantem Luftreibungsfaktor (Reibungskraft $F = -d|v|^2$, $d =$ konstant) analytisch berechnet werden.
  Siehe z.B. `https://matheplanet.de/default3.html?article=735`.

3 Unterrichtseinheit 3 - Parabel und Tangente

In dieser Unterrichtseinheit wird die Tangente an eine Parabel in einem Parabelpunkt behandelt. Ausgehend von der Charakterisierung „Die Tangente besitzt genau einen gemeinsamen Punkt mit der Parabel“ wird die analytische Beschreibung durch die Geradengleichung der Tangente hergeleitet. Danach wird die geometrische Konstruktion der Tangente vorgeführt und angewandt.

3.1 Wiederholung

Dauer: 15 min
Ziel: Wiederholung der geometrischen Definition einer Parabel, Anwenden einer neuen Konstruktion von Parabelpunkten, Nachweis der Gültigkeit der Konstruktion.
Material: Arbeitsblatt 1, zur Besprechung OH-Folie 1

> **Anmerkung**
> L. sollte vor dem Austeilen des Aufgabenblattes betonen, dass hier eine andere Konstruktion von Parabelpunkten verwendet wird als in der letzten Stunde.

Vorgehen: Arbeitsblatt 1 wird in Einzel-/Partnerarbeit gelöst. Besprechung mit OH-Folie/Tafel.

Aufgabe 3.1 (*Arbeitsblatt 1, Aufgabe 1*)

Eine Parabel ist definiert durch eine Leitgerade l und einen Punkt F, der nicht auf l liegt. Die Parabel p ist die Menge aller Punkte Q, für die gilt: $d(Q, l) = \overline{QF}$. Das bedeutet, dass der Punkt Q von der Leitgeraden und vom Brennpukt F denselben Abstand hat. Der Punkt S, der das Lot von F auf l halbiert, liegt auf p und heißt Scheitelpunkt.

Nun sollen weitere Punkte der Parabel konstruiert werden. Dazu wird folgendes Verfahren benützt:

1. Wähle einen beliebigen Punkt A auf der Leitgeraden.
2. Zeichne die Gerade g senkrecht zu l durch A.
3. Konstruiere die Mittelsenkrechte m von A und F.
4. Der Schnittpunkt Q von m und g liegt auf der Parabel.

a) Führe die angegebene Konstruktion für die angegebenen Punkte $A_1, \ldots, A_4$ durch.

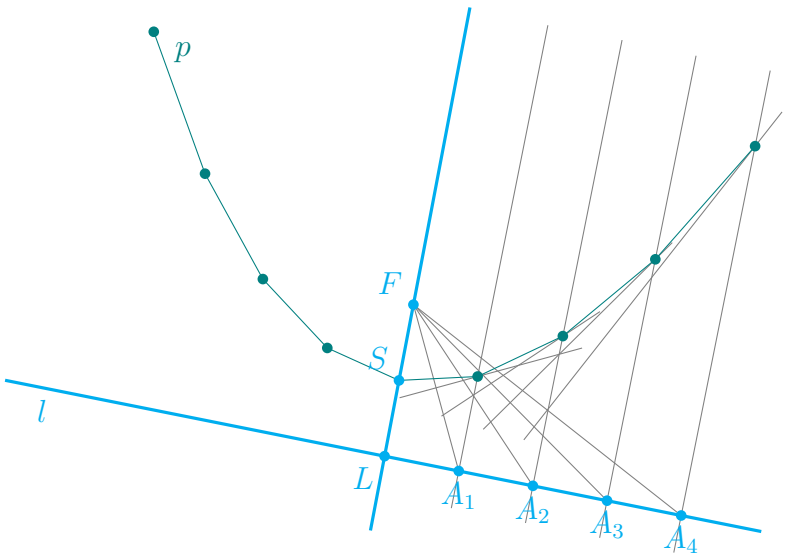
Hinweis: Du kannst die Mittelsenkrechten mit dem Geodreieck zeichnen, Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist nicht verlangt.

b) Es ist bekannt, dass p achsensymmetrisch zum Lot von F auf l ist. Spiegle Deine Punkte am Lot und skizziere p.

Hinweis: Es genügt, die Spiegelpunkte mit dem Geodreieck zu konstruieren.

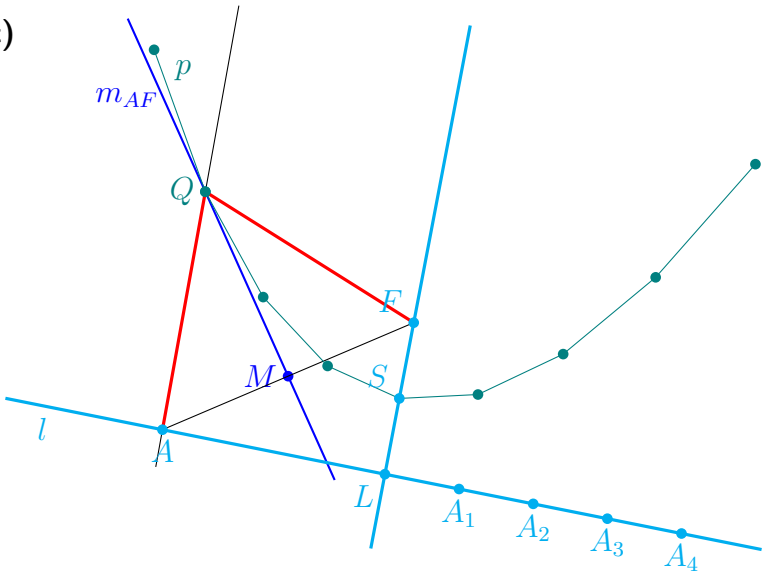
c) **Zusatzaufgabe:** Begründe, warum die Konstruktion Punkte auf der Parabel p ergibt.

Lösung: a) - b)



Graphik: `Kapitel3_Aufgabe1_1.ggb`

c)



Die Gerade m_{AF} ist die Mittelsenkrechte auf AF

$\Rightarrow$ Das Dreieck AFQ ist symmetrisch zu m_{AF}

$\Rightarrow$ $\overline{FQ} = \overline{AQ}$

$\Rightarrow$ Q liegt auf der Parabel

Graphik: `Kapitel3_Aufgabe1_2.ggb`

Anmerkung
Die hier eingeführte Konstruktion von Parabelpunkten bereitet die Konstruktion der Tangente an eine Parabel vor. Die Zusatzaufgabe muss nicht von den SuS gelöst werden, aber eine Besprechung ist erforderlich, damit später auf diese Konstruktion zurückgegriffen werden kann.

3.2 Analytische Beschreibung der Tangente

Dauer: 20 min

Ziel: Einführung des Begriffs Tangente, Herleitung der Gleichung der Tangente an eine Parabel in einem Parabelpunkt.

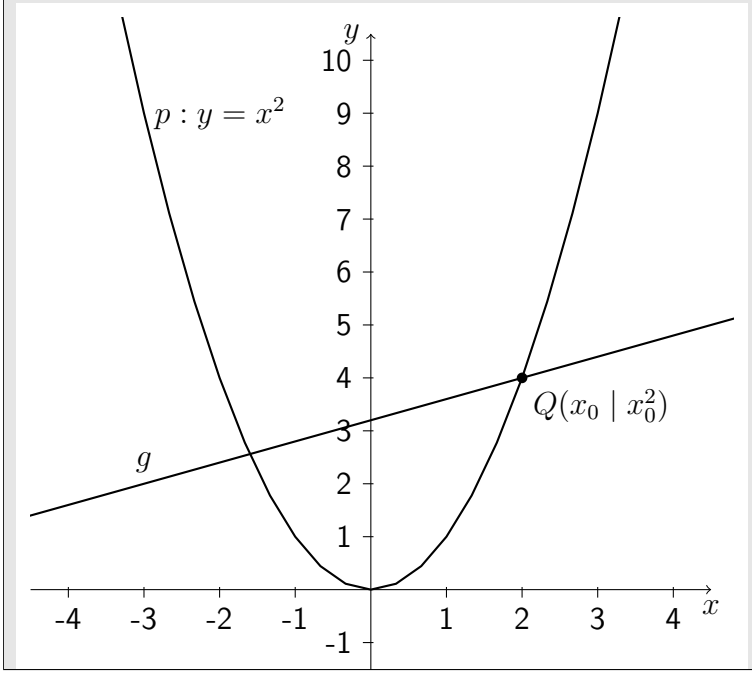
Material: Arbeitsblatt 2, OH-Folie 2

Vorgehen: Nach dem Austeilen des Arbeitsblattes 2 zeichnet L. vermutete Geraden auf der OH-Folie ein. Falls falsche Vorschläge gemacht werden, können sie eingezeichnet werden. Nach dem Beweis sollte darauf eingegangen werden, welche der Geraden die Aufgabenstellung löst.

Tafelanschrieb

3. Parabel und Tangente

Aufgabe 3.2 (*Arbeitsblatt 2*)

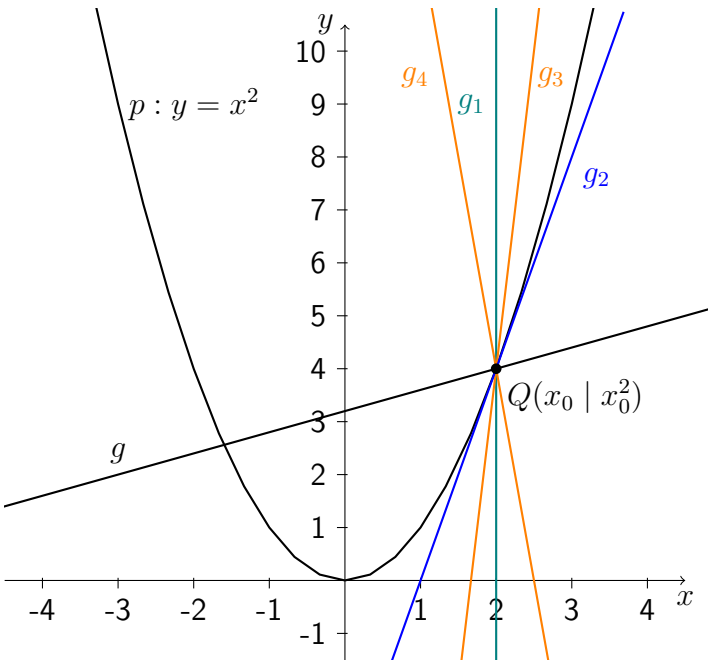


Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = x^2$ und ein Punkt $Q(x_0 \mid x_0^2)$ auf der Parabel.

Gibt es Geraden durch Q, die keinen weiteren Schnittpunkt mit p haben?

Graphik: `Kapitel3_Aufgabe2_1.ggb`

Lösung:



Hinweis: In der Skizze sind 4 Geraden als Vorschläge eingezeichnet. g_1 besitzt offenbar nur einen Schnittpunkt, ist aber nicht als Funktion darstellbar. Der nachfolgende Beweis zeigt, dass außer g_1 nur g_2 den einzigen Schnittpunkt Q mit p besitzt, g_3 und g_4 haben einen weiteren Schnittpunkt.

Graphik: `Kapitel3_Aufgabe2_2.ggb`

Anmerkung

Zur rechnerischen Bestimmung der Tangentengleichung wird die Punkt-Steigungsform einer Geradengleichung benötigt. Dazu wird zunächst an der Tafel die Geradengleichung wiederholt. Als Motivation kann benützt werden, dass die Punkt-Steigungsform einen in manchen Fällen besonders geschickten Ansatz liefert.

Tafelanschrieb

Geradengleichungen: $g : y = mx + b$ bedeutet $g = \{(x, y) : y = mx + b\}$. m heißt Steigung der Geraden.

Punktsteigungsform: $g : y = m(x - x_0) + y_0$ geht durch den Punkt (x_0, y_0) und hat die Steigung m.

Anmerkung

L. sollte erklären, warum die Gerade durch den Punkt $(x_0 \mid y_0)$ geht, und wann die Punkt-Steigungsform geschickt ist. Nun kann der Satz über die Tangentengleichung in einem Parabelpunkt formuliert und bewiesen werden.

Tafelanschrieb

Gerade $g : y = m(x - x_0) + x_0^2$ geht durch $Q(x_0 \mid x_0^2)$.

Schnitt mit p:

Gleichsetzen:
$$\begin{aligned} & y = x^2 \ \wedge \ y = m(x - x_0) + x_0^2 \\ \Rightarrow \ & x^2 = m(x - x_0) + x_0^2 && \mid -x_0^2 - m(x - x_0) \\ \Leftrightarrow \ & \underbrace{x^2 - x_0^2}_{=(x-x_0)(x+x_0)} - m(x - x_0) = 0 && \mid \text{Ausklammern} \\ \Leftrightarrow \ & (x - x_0)(x + x_0 - m) = 0 \\ \Leftrightarrow \ & x = x_0 \ \vee \ x = m - x_0 \end{aligned}$$

Beide Schnittpunkte sollen gleich sein: $x_0 = m - x_0 \ \Leftrightarrow \ 2x_0 = m$.

Gesuchte Gerade: $g : y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$.

Leitfrage

Welche der eingezeichneten Geraden haben wir nun bestimmt?

- *Dieser Beweis zeigt: Es gibt genau eine Gerade, die in der Form $y = mx + b$ dargestellt werden kann und Q als einzigen Schnittpunkt mit p besitzt. Dies ist die Gerade g_2 in der Zeichnung. Die Geraden g_3, g_4 besitzen jeweils einen weiteren Schnittpunkt mit der Parabel, auch wenn er in der Skizze nicht zu sehen ist.*

Tafelanschrieb

Satz: Sei die Parabel $p : y = x^2$ und der Punkt $Q(x_0, x_0^2)$ auf der Parabel gegeben. Dann gibt es genau eine Gerade g durch Q, die nicht parallel zur y-Achse ist und mit p nur den Punkt Q gemeinsam hat, nämlich $g : y = 2x_0x - x_0^2$.

Beweis: Letzte Rechnung

Definition: Diese Gerade heißt Tangente an p in Q. Die Steigung $2x_0$ der Tangente heißt Ableitung der Parabelfunktion $f(x) = x^2$ in x_0, geschrieben $f'(x_0) = 2x_0$.

Anmerkung

Spätestens hier kann die Frage auftauchen, warum nicht gleich mit der Ableitung gerechnet wurde. Zum Einen soll hier die geometrische Definition der Tangente im Vordergrund stehen, zum Anderen richtet sich dieses Skript an SuS ab Klasse 8.

3.3 Übungsphase

Dauer: 15 min
Ziel: Übertragung des Beweises auf andere Parabeln.
Material: Arbeitsblatt 3

Vorgehen: Arbeitsblatt 3 wird in Einzel-/Partnerarbeit gelöst. Besprechung durch Anschreiben des Ergebnisses.

Aufgabe 3.3 (*Arbeitsblatt 3, Aufgabe 2*)

a) Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = 2x^2$ und der Punkt $Q(x_0 \mid 2x_0^2)$ auf p.

a₁) Wie muss die Steigung der Geraden $g : y = m(x - x_0) + 2x_0^2$ gewählt werden, damit g und p nur den Punkt Q gemeinsam haben?

a₂) Gib die Gleichung der Tangente g an p im Punkt $Q(x_0 \mid 2x_0^2)$ an.

a₃) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an p in $Q_1(2 \mid 8)$ und in $Q_2(-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2})$?

a₄) Zeichne die Punkte Q_1, Q_2 und die ermittelten Tangenten an p in die Graphik ein.

b) **Zusatzaufgabe:** Sei $a > 0$ fest, p die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ und $Q(x_0 \mid ax_0^2)$ ein Punkt auf der Parabel. Zeige, dass es genau eine Gerade g durch Q gibt, die nicht parallel zur y-Achse ist und mit p nur den Punkt Q gemeinsam hat. Gib die Geradengleichung an.

Lösung: **a₁)** Schnitt Gerade und Parabel:

$$\begin{array}{rrcll}
 & 2x^2 & = & m(x-x_0)+2x_0^2 & \mid -m(x-x_0)-2x_0^2 \\
\Leftrightarrow & 2(x^2-x_0^2)-m(x-x_0) & = & 0 & \mid \text{3. binomische Formel} \\
\Leftrightarrow & 2(x-x_0)(x+x_0)-m(x-x_0) & = & 0 & \mid \text{Ausklammern} \\
\Leftrightarrow & (x-x_0)\big(2(x+x_0)-m\big) & = & 0 & \mid \text{Vereinfachen} \\
\Leftrightarrow & (x-x_0)(2x+2x_0-m) & = & 0 &
\end{array}$$

Dies ergibt zwei x-Werte für Schnittpunkte:

$$x = x_0, \; x = \frac{1}{2}m - x_0.$$

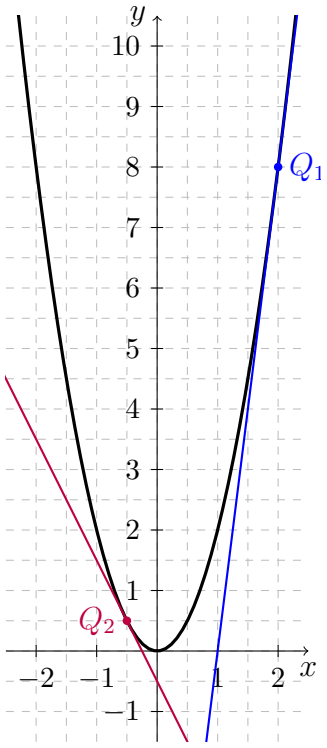
Diese Werte fallen genau dann zusammen, wenn

$$x_0 = \frac{1}{2}m - x_0 \;\Leftrightarrow\; 2x_0 = \frac{1}{2}m \;\Leftrightarrow\; m = 4x_0.$$

a₂) Die Tangentengleichung lautet

$$y = 4x_0(x - x_0) + 2x_0^2 = 4x_0x - 2x_0^2.$$

a₃) $g_1 : y = 8x - 8$, $g_2 : y = -2x - \frac{1}{2}$



b) Schnitt Gerade und Parabel:

$$\begin{array}{rrcll} & ax^2 & = & m(x-x_0)+ax_0^2 & \mid -m(x-x_0)-ax_0^2 \\ \Leftrightarrow & a(x^2-x_0^2)-m(x-x_0) & = & 0 & \mid \text{3. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow & a(x-x_0)(x+x_0)-m(x-x_0) & = & 0 & \mid \text{Ausklammern} \\ \Leftrightarrow & (x-x_0)\big(a(x+x_0)-m\big) & = & 0 & \mid \text{Vereinfachen} \\ \Leftrightarrow & (x-x_0)(ax+ax_0-m) & = & 0 & \end{array}$$

Dies ergibt zwei x-Werte für Schnittpunkte: $x_1 = x_0$, $x_2 = \frac{1}{a}m - x_0$. Diese Werte fallen genau dann zusammen, wenn

$$x_0 = \frac{1}{a}m - x_0 \;\Leftrightarrow\; 2x_0 = \frac{1}{a}m \;\Leftrightarrow\; m = 2ax_0.$$

Die Tangentengleichung lautet dann $y = 2ax_0(x-x_0) + ax_0^2 = 2ax_0x - ax_0^2$.

3.4 Konstruktion der Tangente

Dauer: 10 min
Ziel: Die geometrische Konstruktion der Tangente kennenlernen und begründen.
Material: Arbeitsblatt 4, OH-Folie 3

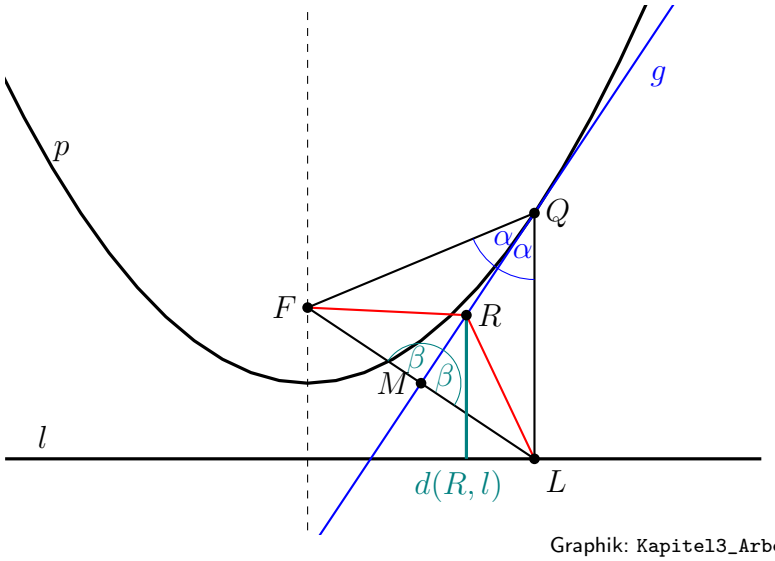
> **Leitfrage**
> Wie beweisen wir, dass die konstruierte Gerade die Tangente an die Parabel ist?
> - *Sie geht durch Q und jeder andere Punkt der Geraden liegt nicht auf der Parabel.*

Vorgehen: L. führt die Beweisskizze auf OH-Folie durch und schreibt den Beweis an die Tafel. SuS schreiben auf dem Arbeitsblatt mit.

Tafelanschrieb

Satz: Sei eine Parabel p mit Leitgerade l und Brennpunkt F gegeben. Für einen Punkt Q auf p sei g die Winkelhalbierende der Strecken QL und QF (L bezeichnet den Lotfußpunkt von Q auf l). Dann ist g die Tangente an p in Q.

Beweis:



Graphik: Kapitel3_Arbeitsblatt4_2.ggb

1) Die Winkelhalbierende g ist gleichzeitig die Mittelsenkrechte der Strecke FL, denn:

   Die Dreiecke MQF und LQM sind nach sws kongruent

   $\Rightarrow \begin{cases} \text{bei } M \text{ gilt } 2\beta = 180°, \text{ also } \beta = 90° \\ \overline{MF} = \overline{ML} \end{cases}$

2) g und p haben nur den einen Punkt Q gemeinsam, denn:

   Sei $R \neq Q$ ein beliebiger Punkt auf g.
   g ist Mittelsenkrechte $\Rightarrow$ $\overline{RF} = \overline{RL}$.
   $Q \neq R \Rightarrow$ L ist nicht Lotfußpunkt von R
   $\Rightarrow$ $d(R, l) \neq \overline{RL}$
   $\Rightarrow$ $d(R, l) \neq \overline{FR}$
   $\Rightarrow$ R liegt nicht auf p $\square$

Aufgabe 3.4 (*Arbeitsblatt 5, Aufgabe 3*)

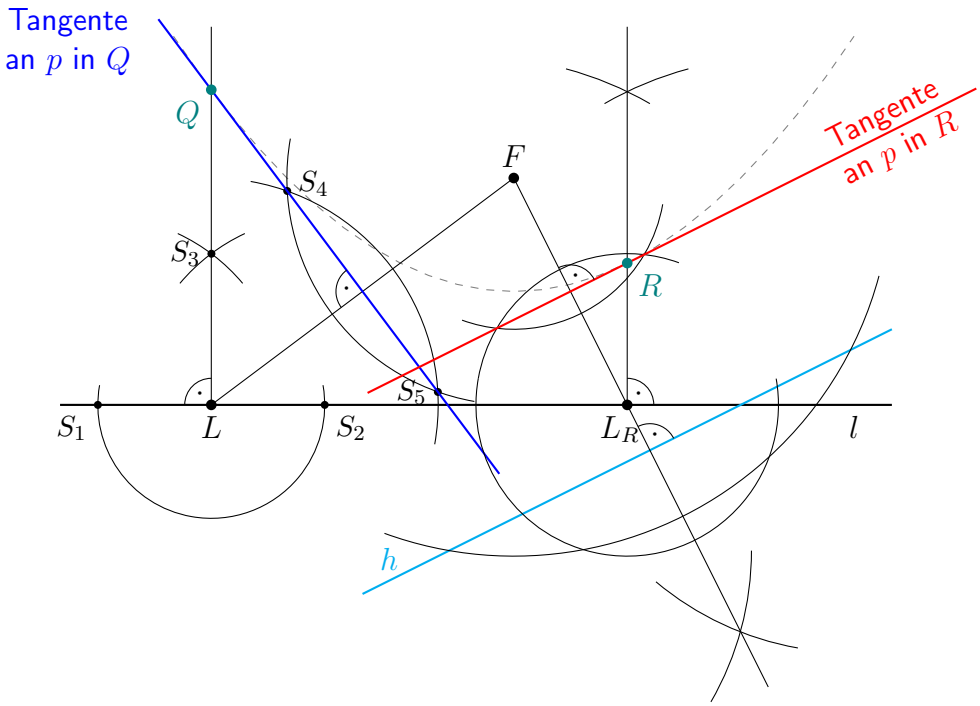
Gegeben sind die Parabel p durch den Brennpunkt F und die Leitgerade l und eine Gerade h (siehe unten stehende Graphik).

a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal den Punkt Q auf p, der den eingezeichneten Punkt L als Lotfußpunkt besitzt.
Hinweis: Die Orthogonale zu einer Geraden durch einen Punkt haben wir in Einheit 1 konstruiert. Die Konstruktion klappt auch, wenn der Punkt auf der Geraden liegt.

b) Die Tangente an p in Q hast Du bereits konstruiert. Warum? Zeichne die Tangente ein.

c) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangente an p, die parallel zu der eingezeichneten Geraden h ist, und ihren Berührpunkt R an p.
Hinweis: Konstruiere zunächst den Lotfußpunkt von R auf l.

Lösung:



a) Konstruktionsbeschreibung:

1) Kreis um L schneidet l in S_1 und S_2.
2) Kreise mit dem selben Radius um S_1 und S_2 schneiden sich in S_3.
3) Die Gerade durch L und S_3 ist orthogonal auf l und geht durch L. Auf dieser Geraden liegt Q.
4) Kreise mit dem selben Radius durch L und F schneiden sich in S_4 und S_5.
5) Die Gerade durch S_4 und S_5 ist die Mittelsenkrechte von L und F. Auf ihr liegt Q
6) Schnitt der beiden Geraden ergibt Q.

b) Die in Teil a) konstruierre Mittelsenkrechte von L und F ist die Tangente an p, die p in Q berührt.

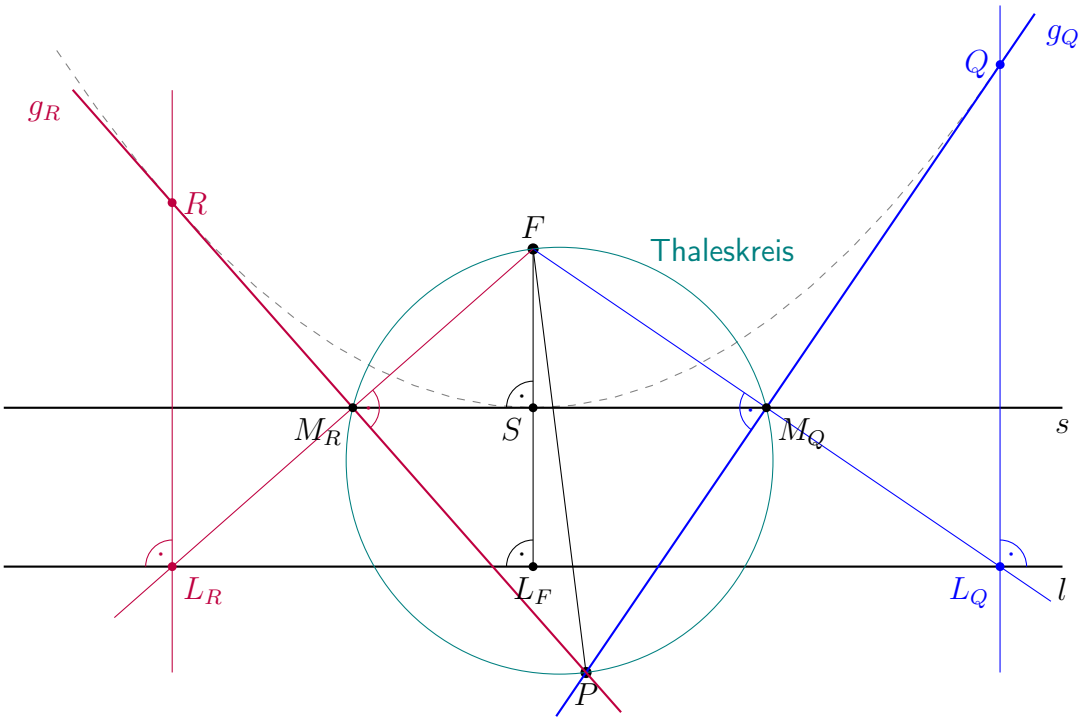
c) Verkürzte Konstruktionsbeschreibung:

1) Orthogonale auf h durch F schneidet l in L_R. Der gesuchte Punkt R liegt auf der Orthogonalen auf l durch L_R.
2) Konstruiere die Mittelsenkrechte zu F und L_R.
3) Schnitt der Mittelsenkrechten und der Orthogonalen auf l durch L_R ergibt den gesuchten Punkt R. Die Mittelsenkrechte ist die Tangente an p, die p in R berührt.

Aufgabe 3.5 (*Arbeitsblatt 5, Zusatzaufgabe 1*)

Gegeben ist eine Parabel p durch den Brennpunkt F und die Leitgerade l, siehe unten. Konstruiere die zwei Parabelpunkte, deren Tangenten an p durch den eingezeichneten Punkt P verlaufen sowie die Tangenten.
Hinweis: Ist Q ein Punkt auf p und L_Q der Lotfußpunkt von Q auf l, so liegt der Mittelpunkt M_Q der Strecke FL_Q auf der Geraden durch den Scheitel S der Parabel, die parallel zu l ist. M_Q liegt außerdem auf der Tangente an die Parabel in Q. Konstruiere zunächst S und die Parellele zu l durch S. Verwende den Satz des Thales, um M_Q zu konstruieren.

Lösung:



Verkürzte Konstruktionsbeschreibung:

1) Orthogonale auf l durch F schneidet l in L_F.

2) Mittelpunkt der Strecke FL_F ist der Scheitel S.

3) Auf der Geraden s parallel zu l durch S liegen die gesuchten Mittelpunkte M_Q und M_R.

4) Thaleskreis durch F und P schneidet s in M_Q und M_R.

5) Die Gerade g_q durch P und M_Q ist Tangente an p.

6) Gerade durch F und M_Q schneidet l in L_Q.

7) Orthogonale auf l durch L_Q schneidet g_Q im Punkt Q.

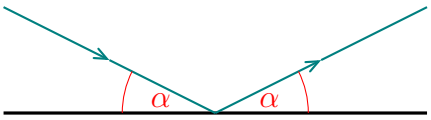
8) Entsprechend für R.

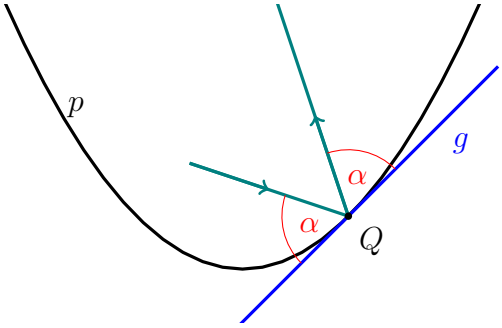
3.5 Anwendung: Reflexion an Parabelspiegeln

Dauer: 15 min
Ziel: Das Gesetz *Einfallswinkel = Ausfallswinkel* verstehen. Entdecken, dass Lichtsstrahlen, die vom Brennpunkt einer Parabel ausgehen, im Brennpunkt einer anderen Parabel gesammelt werden.
Material: Arbeitsblätter 4 und 5, OH-Folie 4

Tafelanschrieb

Physik: Ein Lichstrahl wird an einem Spiegel so reflektiert, dass Einfallswinkel = Ausfallswinkel gilt. Bei gekrümmten Spiegeln verwendet man die Tangente zur Bestimmung der Reflexionsrichtung.





Graphik: Kapitel3_Parabelspiegel.ggb

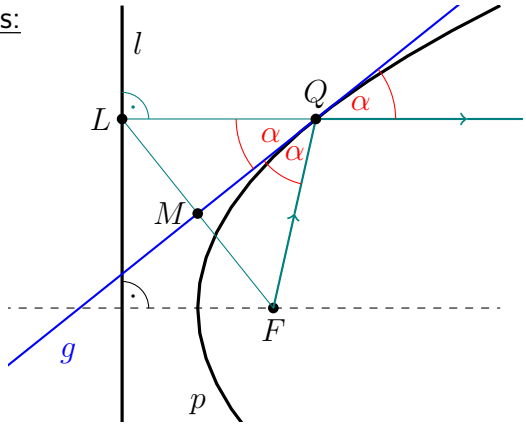
Vorgehen: Zum Beweis des nächsten Satzes ist auf der zweiten Seite des Arbeitsblattes 4 eine Parabel vorbereitet. Beim Beweis wird die Konstruktion der Tangente durchgeführt (und damit wiederholt), anschließend wird gezeigt, dass der reflektierte Lichtstrahl orthogonal zur Leitgeraden verläuft. L. führt die Beweisskizze auf OH-Folie durch und schreibt den Beweis an die Tafel, SuS schreiben auf dem Arbeitsblatt mit.

> **Leitfrage**
> Wie groß muss der Winkel γ sein, damit der reflektierte Lichtstrahl genau entlang der Verlängerung der Strecke LQ verläuft?
> - *Es muss $\gamma = \alpha$ gelten.*

Tafelanschrieb

Parabelspiegel: Sei ein Spiegel in einer Richtung parabelförmig gekrümmt. Ein Lichstrahl, der vom Brennpunkt F ausgeht und die Parabel trifft, verläuft nach der Reflexion senkrecht zur Leitgeraden.

Beweis:



Seien Q der Punkt, in dem der Lichtstrahl auf p trifft, L der Lotfußpunkt von Q, g die Tangente an p in Q und α der Winkel zwischen FQ und g.
g ist Winkelhalbierende $\Rightarrow$ LQ schließt mit g den Winkel α ein.
Die Verlängerung der Strecke LQ ist senkrecht auf l und schließt mit g den Winkel α ein (Scheitelwinkel).
$\Rightarrow$ Der reflektierte Lichtstrahl verläuft längs dieser Verlängerung, also senkrecht zu l.

Graphik: Kapitel3_Arbeitsblatt4_4.ggb

3.6 Schriftliche Aufgaben

Hier sind die Lösungen bereits in die entsprechenden Felder bzw. Graphiken eingetragen.

Aufgabe 3.6 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 4*)

Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = x^2$.

a) Gib die Koordinaten des Brennpunktes und die Gleichung der Leitgeraden an. Zeichne beides in der Graphik ein.

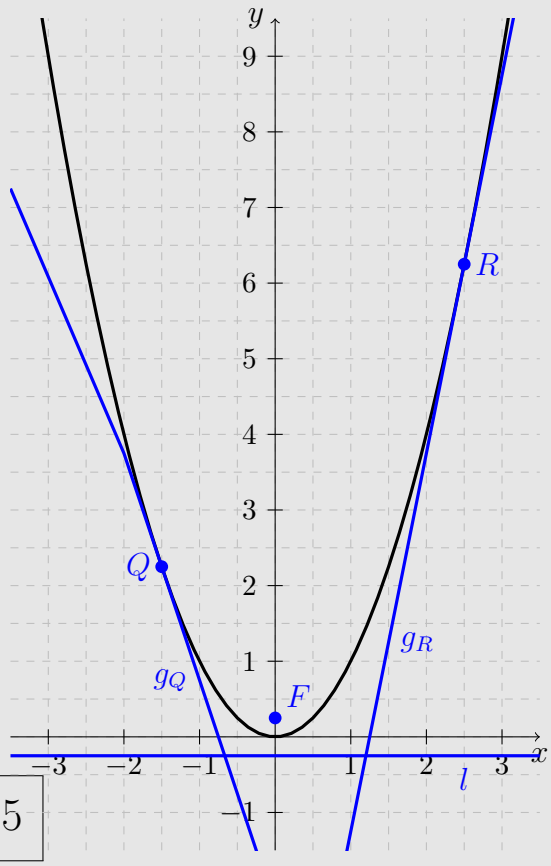
$F(0 \mid \frac{1}{4})$, $l : y = -\frac{1}{4}$

b) Gib die Gleichung der Tangente im Punkt $Q(-1,5 \mid 2,25)$ an und zeichne Punkt und Tangente in der Graphik ein.

Tangente $g_Q : y = -3x - 2,25$

c) Bestimme rechnerisch den Punkt R auf der Parabel, dessen Tangente die Steigung $m = 5$ besitzt. Gib die Gleichung der Tangente an und zeichne Punkt und Tangente in der Graphik ein.

$R(2,5 \mid 6,25)$, $g_R : y = 5x - 6,25$



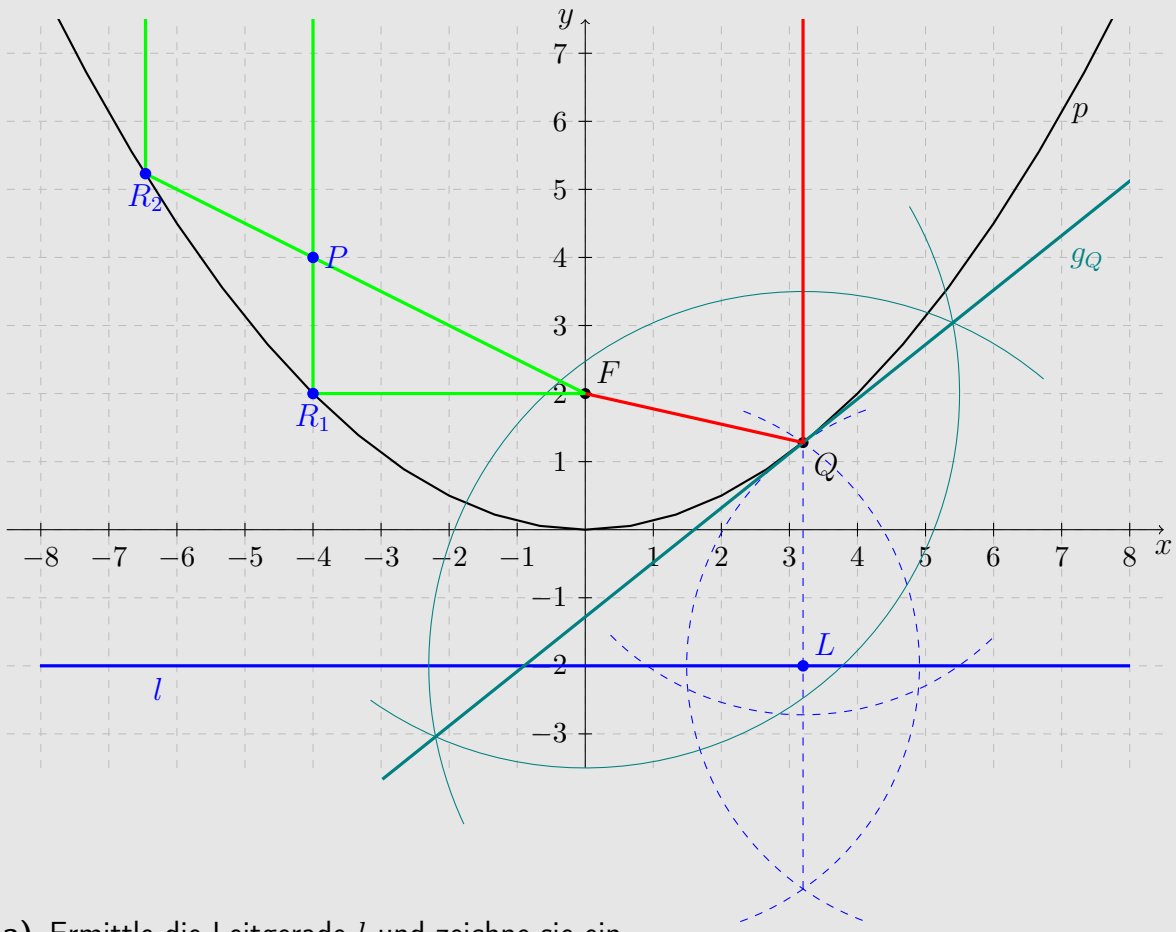
Aufgabe 3.7 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 5*)

Wahr oder falsch?

	w/f
Durch jeden Punkt der Parabel gibt es genau eine Gerade, die nur einen gemeinsamen Punkt mit der Parabel besitzt.	f
Die Tangente im Scheitelpunkt einer Parabel ist parallel zur Leitgeraden.	w
In jedem Punkt einer Parabel gibt es genau eine Tangente.	w
Es gibt auf jeder Parabel Punkte, in denen es keine Tangente an die Parabel gibt.	f
Sei eine Parabel gegeben, deren Leitgerade parallel zur x-Achse ist. Dann gibt es zu jeder Steigung m eine Tangente, die diese vorgegebene Steigung besitzt.	w
Sei eine Parabel gegeben, deren Leitgerade parallel zur y-Achse ist. Dann gibt es zu jeder Steigung m eine Tangente, die diese vorgegebene Steigung besitzt.	f

Aufgabe 3.8 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 6*)

Gegeben ist folgende Parabel p:



a) Ermittle die Leitgerade l und zeichne sie ein.

b) Konstruiere die Tangente an p im Punkt Q mit Zirkel und Lineal.

Ein vom Brennpunkt F ausgehender Lichtstrahl trifft im Punkt Q auf die Parabel und wird dort reflektiert.

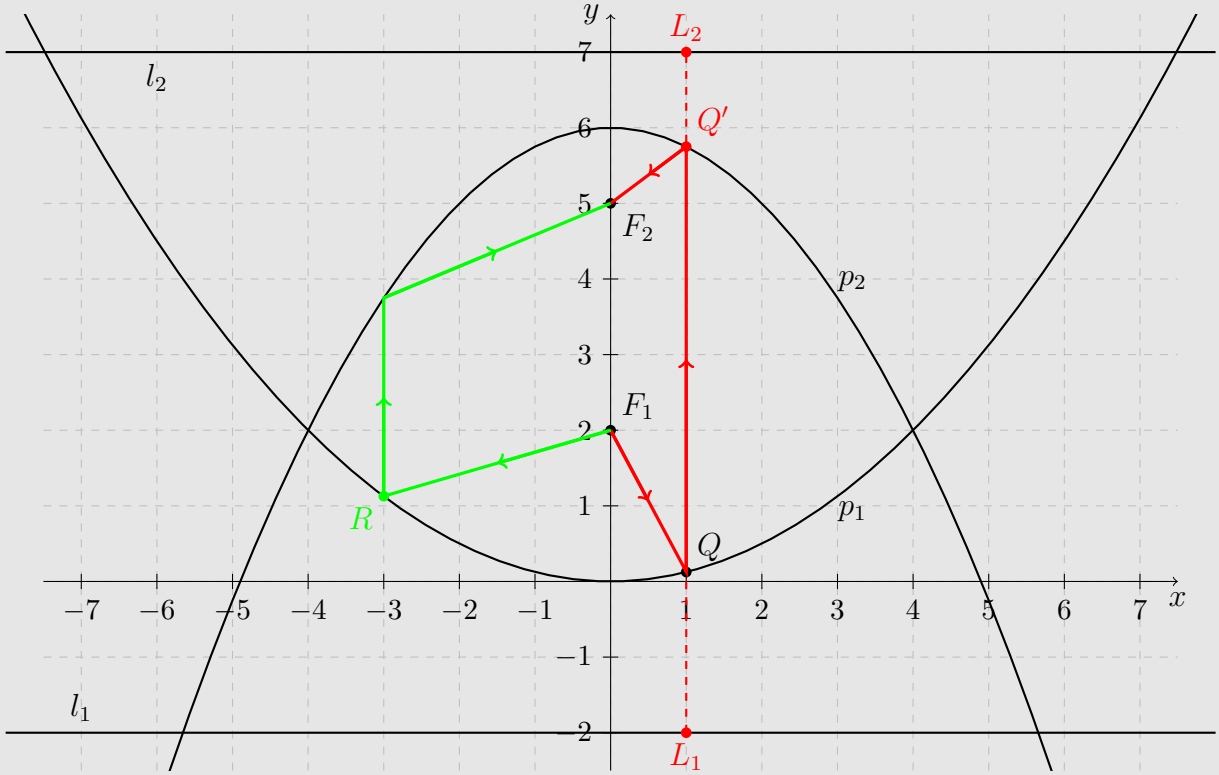
c) Zeichne den Verlauf des Lichtstrahls rot in die Zeichnung ein.

Nun sollen Lichstrahlen betrachtet werden, die von F ausgehen und durch den Punkt $P(-4 \mid 4)$ gehen.

d) Bestimme alle möglichen Reflexionspunkte zeichnerisch. Zeichne den Verlauf der Lichtstrahlen grün ein.

Aufgabe 3.9 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 7*)

Gegeben sind die beiden Parabeln $p_1 : y = \frac{1}{8}x^2$ und $p_2 : y = 6 - \frac{1}{4}x^2$ mit den Brennpunkten $F_1(0 \mid 2)$ und $F_2(0 \mid 5)$ bzw. den Leitgeraden $l_1 : y = -2$ und $l_2 : y = 7$. Außerdem ist der Punkt $Q(1 \mid \frac{1}{8})$ gegeben.



a) Ein von F_1 ausgehender Lichtstrahl trifft im Punkt Q auf p_1 und wird dort reflektiert, trifft dann auf p_2 und wird wieder reflektiert. Zeichne mit roter Farbe den Verlauf des Lichtstrahls ein, bis er F_2 erreicht.

b) Wähle einen weiteren Reflexionspunkt R auf der Parabel p_1 und zeichne mit grüner Farbe den Verlauf des Lichtstrahls ein, bis der Strahl F_2 erreicht.

c) Miss für beide eingezeichneten Lichtstrahlen die Länge des Weges, den der Lichtstrahl von F_1 bis F_2 zurückgelegt hat und vergleiche die beiden Werte.

Gemessene Länge des Lichtstrahls durch Q:	9LE
Gemessene Länge des Lichtstrahls durch R:	9LE
Beobachtung:	Die Längen sind gleich

d) **Zusatzaufgabe:** Beweise die folgende Aussage:
„Die zurückgelegte Strecke der Lichtstrahlen, die von F_1 ausgehen, zwei Mal reflektiert werden und in F_2 ankommen, ist gleich dem Abstand der beiden Leitgeraden."

Lösung von d): Verlängert man den Teil des rot gezeichneten Lichtstrahls, der parallel zur y-Achse verläuft, wie in der Zeichnung gestrichelt durchgeführt, so gelten:

$$\overline{QL_1} = \overline{QF_1} \text{ und } \overline{Q'L_2}. = \overline{Q'F_2}.$$

Das bedeutet, dass der rote Lichtstrahl genau so lang ist wie die Strecke L_1L_2. Die Länge $\overline{L_1L_2}$ ist genau der Abstand der parallelen Geraden l_1 und l_2. Die selbe Überlegung gilt für jeden Lichstrahl, der von F_1 ausgehend zuerst an p_1 und dann an p_2 reflektiert wird.

3.7 Ergänzung

Anwendung bei der Satellitenschüssel: Der Sender befindet sich auf dem Satellit im Brennpunkt F_1 eines parabelförmigen Spiegels. Der Empfänger befindet sich im Brennpunkt F_2 eines weiteren parabelförmigen Spiegels. Die Parabeln sind gegeneinander geöffnet, und die Verbindungsgerade der Brennpunkte ist senkrecht zu den beiden Leitgeraden.

Graphik: `Kapitel3_Richtfunk.ggb`

Dann gilt:

- Lichtstrahlen, die von F_1 ausgehen und von beiden Parabeln reflektiert werden, gehen durch F_2.
- Die Länge des Weges, die das Licht von F_1 zu F_2 zurücklegt, ist gleich dem Abstand von l_1 zu l_2, **unabhängig** davon, in welche Richtung der Lichtstrahl von F_1 losläuft. Dies ist wichtig, denn dann kommen alle Signale, die von F_1 ausgehen, zugleich in F_2 an, egal wie sie an den Parabeln reflektiert wurden.

4 Unterrichtseinheit 4 - Ellipse

Diese Einheit behandelt Ellipsen: Einerseits die geometrische Definition und andererseits die analytische Beschreibung durch die Ellipsengleichung.

4.1 Geometrische Definition einer Ellipse

Dauer: 25 min
Ziel: Geometrische Ellipsendefinition
Material: Bastelbogen (siehe Seite 146) offen und geklebt, Schnur und eine Hilfsperson zur Durchführung der Gärtnerkonstruktion, Arbeitsblatt 1, OH-Folie zu AB 1.

Vorgehen: Auf dem Bastelbogen ist eine Sinuskurve aufgedruckt. Schneidet man die Sinuskurve aus und rollt den Bogen zu einem Rohr zusammen, dann erscheint das Rohr schräg abgeschnitten. Der Bastelbogen wird zuerst offen präsentiert, damit die SuS die Sinuskurve sehen können. Dann wird das zusammengeklebte Modell gezeigt und die Ellipse, die als Randkurve zu sehen ist. (Dass die Schnittkurve eine Ellipse ist, wird später in einer Zusatzaufgabe nachgewiesen.)

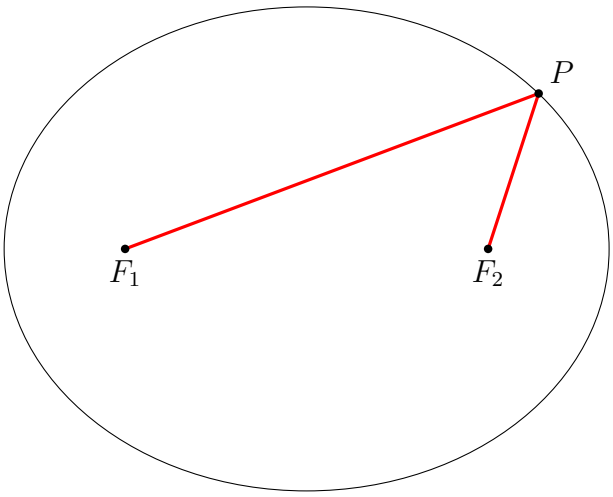
Tafelanschrieb

4. Ellipsen

Definition: Eine Ellipse ist gegeben durch zwei Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$. Die Ellipse ist die Menge aller Punkte P, für die gilt:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} \;=\; 2a.$$

Gärtnerkonstruktion: Einen Faden der Länge $2a$ mit den Enden in F_1 und F_2 befestigen. Mit einem Stift den Faden so entlang fahren, dass der Faden gespannt bleibt.



Anmerkung
SuS sollen nur den Text mitschreiben und bei der Durchführung der Gärtnerkonstruktion zusehen. Schnurlänge nicht zu kurz wählen.

Vorgehen: Zum Arbeitsblatt 1 erhalten die SuS Pinwand-Nadeln und ein vorbereitetes Fadenstück, mit dem sie die „Konstruktion“ auf dem Arbeitsblatt durchführen. Eventuell für geeignete Unterlagen sorgen (dicke Pappe oder Holz). SuS, die schnell sind, können noch weitere Ellipsen zeichnen.

Aufgabe 4.1 (*Arbeitsblatt 1, Aufgabe 1*)

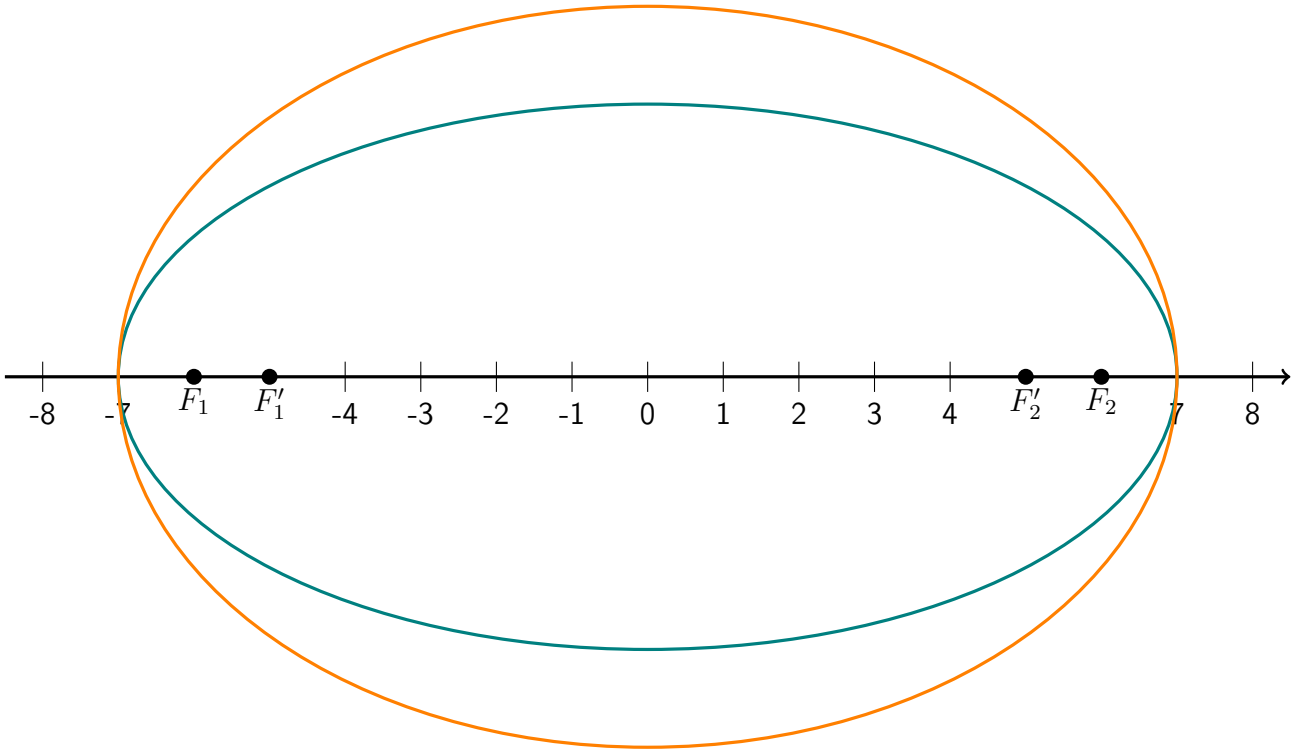
a) Führe die Gärtnerkonstruktion mit einem Faden der Länge 14LE und den Brennpunkten F_1, F_2 durch.

b) Zeichne mit demselben Faden eine weitere Ellipse mit den Brennpunkten F_1' und F_2'. Was ändert sich? Was bleibt gleich?

c) Welche Symmetrien kannst Du erkennen?

Hinweis: Lass die Nadeln von jemand anderes halten, dann kannst Du genauer zeichnen.

Lösung:



b) Die „Breite“ der Ellipsen ist gleich, aber die „Dicke“ ist verschieden.

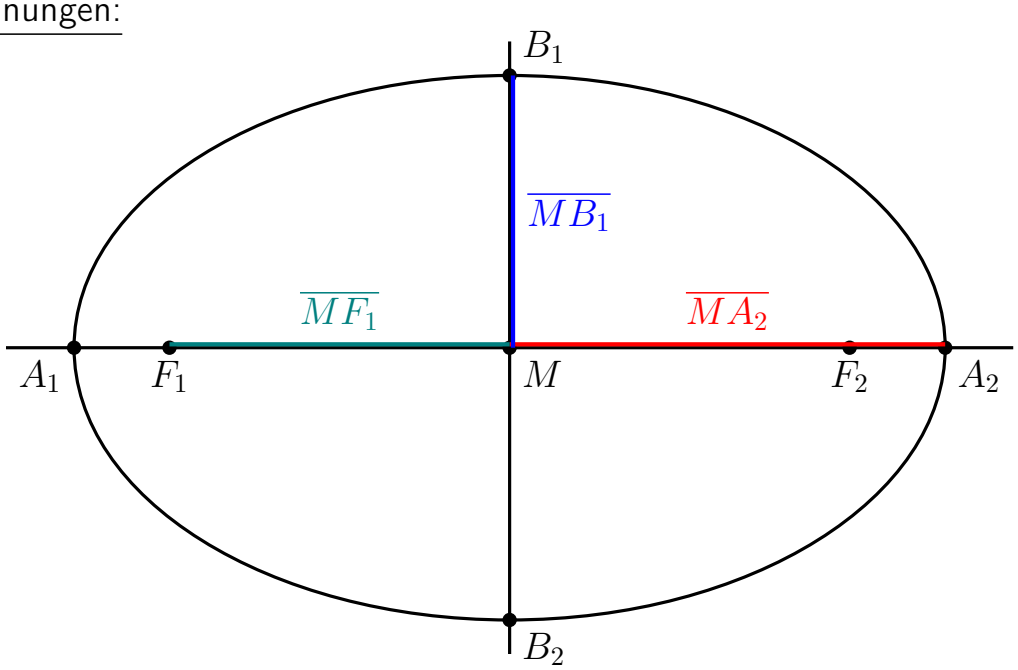
c) Die Ellipsen sind symmetrisch zur Geraden durch F_1 und F_2 und zur Mittelsenkrechten von F_1 und F_2.

> **Anmerkung**
> Zu Besprechung der Lösung steht eine OH-Folie mit den zwei Ellipsen zur Verfügung (Kapitel 11).

4.2 Bezeichnungen bei Ellipsen

Aufgabe 4.2 (*OH-Folie / Arbeitsblatt 2: Bezeichnungen bei Ellipsen*)

Bezeichnungen:



F_1, F_2: Brennpunkte

Gerade durch F_1 und F_2: Hauptachse

Mittelsenkrechte zu F_1 und F_2: Nebenachse

M: Mittelpunkt — Große Halbachse: $\overline{MA_1} = \overline{MA_2}$

A_1, A_2: Hauptscheitel — Kleine Halbachse: $\overline{MB_1} = \overline{MB_2}$

B_1, B_2: Nebenscheitel — Lineare Exzentrizität: $\overline{MF_1} = \overline{MF_2}$

Satz: Es sei eine Ellipse gegeben durch die Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$.

Dann gelten: 1) Für die große Halbachse: $\overline{MA_2} = a$

2) Für die lineare Exzentrizität: $e := \overline{MF_1} = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$

3) $\overline{F_1B_1} = \overline{F_2B_1} = a$

4) Für die kleine Halbachse: $b := \overline{MB_1} = \sqrt{a^2 - e^2}$

Vorgehen: Nachdem die Bezeichnungen geklärt sind, werden der Satz und sein Beweis auf dem Arbeitsblatt notiert. Parallel werden in der Graphik die Bezeichnungen a, b, e und die Strecken F_1B_1, F_2B_1 ergänzt.

Tafelanschrieb

Satz: Es sei eine Ellipse gegeben durch die Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$.

Dann gelten: 1) Für die große Halbachse: $\overline{MA_2} = a$
2) Für die lineare Exzentrizität: $e := \overline{MF_1} = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$
3) $\overline{F_1B_1} = \overline{F_2B_1} = a$
4) Für die kleine Halbachse: $b := \overline{MB_1} = \sqrt{a^2 - e^2}$

Beweis: 1) A_2 liegt auf der Ellipse
$\Rightarrow \quad 2a = \overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = \overline{MA_2} + e + \overline{MA_2} - e = 2\overline{MA_2}$
$\Rightarrow \quad \overline{MA_2} = a$

2) Klar

3) Symmetrie $\Rightarrow \overline{F_1B_1} = \overline{F_2B_1}$
B_1 liegt auf der Ellipse $\Rightarrow \; 2a = \overline{F_1B_1} + \overline{F_2B_1} = 2\overline{F_1B_1}$

4) Pythagoras: $a^2 = e^2 + b^2$

Vorgehen: Arbeitsblatt 3 wird in Einzel/Partnerarbeit gelöst. Besprechung anhand der OH-Folie kann auch durch SuS erfolgen. Die Aufgabe bereitet die Darstellung einer Ellipse im Koordinatensystem vor. Die letzte Teilaufgabe dient als Überleitung: Man sieht, wie umständlich es ist, festzustellen, ob ein gegebener Punkt auf der Ellipse liegt.

Aufgabe 4.3 (*Arbeitsblatt 3, Aufgabe 2*)

Gegeben sind zwei Punkte $F_1(-6 \mid 0)$, $F_2(6 \mid 0)$ und $a = 9$. Dadurch wird eine Ellipse definiert.
Hinweis: Diese Aufgabe kann ohne Taschenrechner gelöst werden. Du kannst für die Zeichnung $\sqrt{55} \approx 7,4$ oder $\sqrt{45} \approx 6,7$ verwenden.

a) Gib e an und berechne b.

b) Gib die Koordinaten der Haupt- und Nebenscheitel an und zeichne sie unten im Koordinatensystem ein.

c) Zeichne den Punkt $P(6 \mid 5)$ ein und die Verbindungsstrecken zu den Brennpunkten. Beweise, dass P auf der Ellipse liegt.
Hinweis: Verwende den Satz des Pythagoras, um die Länge $\overline{F_1P}$ zu berechnen.

d) Spiegle P an den Symmetrieachsen der Ellipse, um drei weitere Punkte P_1, P_2, P_3 zu erhalten, die auf der Ellipse liegen. Gib die Koordinaten der Punkte an.

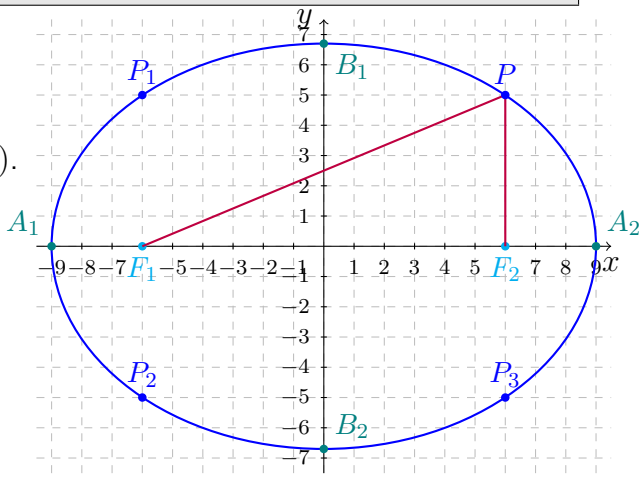
e) Skizziere die Ellipse.

Lösung: **a)** $e = 6$, $b = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} \approx 6,7$.

b) $A_1(-9 \mid 0)$, $A_2(9, \mid 0)$, $B_1(0 \mid 6{,}7)$, $B_2(0 \mid -6{,}7)$.

c) $\overline{F_1P} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$, $\overline{F_2P} = 5$
$\Rightarrow \; \overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 18 = 2a$
$\Rightarrow \; P$ liegt auf der Ellipse.

d) $P_1(-6 \mid 5)$, $P_1(-6 \mid -5)$, $P_1(6 \mid -5)$.



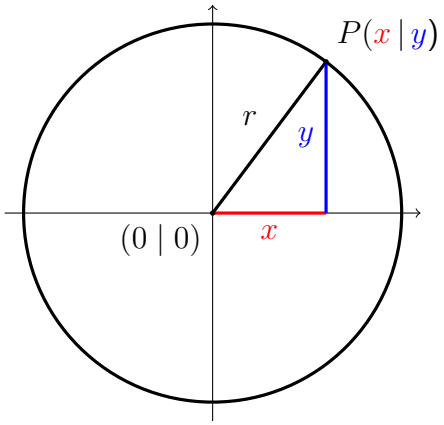
4.3 Die Ellipsengleichung

Dauer: 40 min
Ziel: Herleitung der Ellipsengleichung für eine Ellipse in Hauptachsenlage. Vertraut werden mit der Ellipsengleichung.
Material: Arbeitsblatt 4

Vorgehen: Zunächst schreiben die SuS nicht mit. Die Erinnerung an die Kreisgleichung dient nur zur Motivation. Ab dem Hilfssatz schreiben die SuS mit.

Tafelanschrieb

Kreisgleichung:



$P(x \mid y)$ liegt auf Kreis

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 \text{ (Pythagoras)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

Ellipsengleichung: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Tafelanschrieb

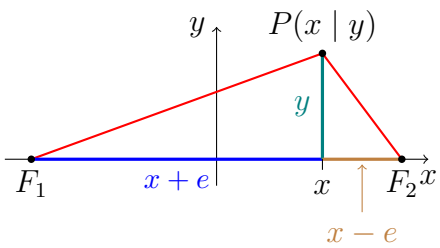
Hilfssatz: Seien $a > b > 0$, $e := \sqrt{a^2 - b^2}$ und die Punkte $F_1(-e \mid 0)$, $F_2(e \mid 0)$ gegeben. Für jeden Punkt $P(x \mid y)$ mit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ gelten:

$$\overline{PF_1} \;=\; a + \frac{e}{a}\,x, \qquad \overline{PF_2} \;=\; a - \frac{e}{a}\,x$$

Beweis: 1) Koordinatengleichung nach y^2 auflösen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x^2}_{(*)}$$

2)



$$\begin{aligned}
\overline{PF_1}^2 &= (x+e)^2 + y^2 \\
&= x^2 + 2ex + \underbrace{e^2 + b^2}_{=a^2} - \tfrac{b^2}{a^2}\,x^2 \\
&= x^2\left(1 - \tfrac{b^2}{a^2}\right) + 2ex + a^2 \\
&\overset{(*)}{=} \tfrac{x^2}{a^2}\big(\underbrace{a^2 - b^2}_{=e^2}\big) + 2ex + a^2 \\
&= \left(\tfrac{x}{a}\,e + a\right)^2 \\
\Rightarrow\; \overline{PF_1} &= \left|\tfrac{x}{a}\,e + a\right| \;=\; a + \tfrac{x}{a}\,e.
\end{aligned}$$

Genauso: $\overline{PF_2}^2 = (x-e)^2 + y^2 \;\Rightarrow\; \overline{PF_2} = a - \frac{x}{a}\,e.$ □

Tafelanschrieb

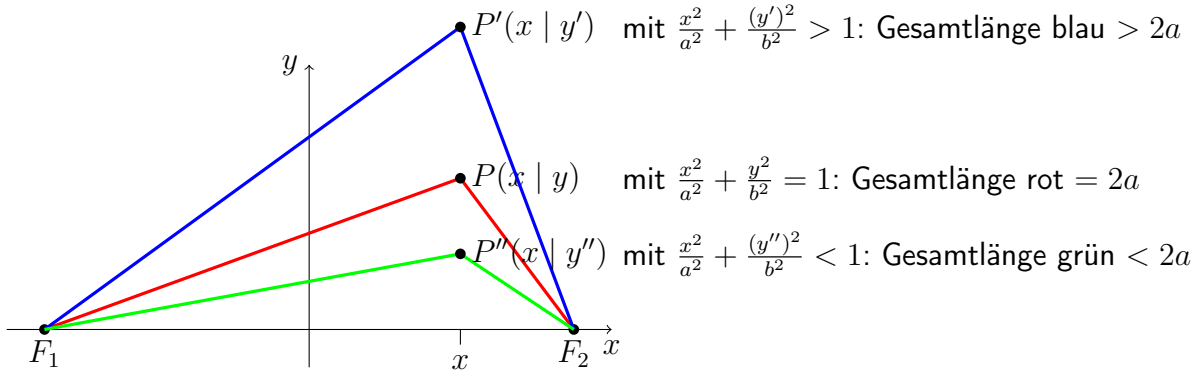
Satz: Seien $a > b > 0$ und $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ beschreibt eine Ellipse mit den Brennpunkten $F_1(-e \mid 0)$, $F_2(e \mid 0)$ und $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

Beweis: 1) Sei $P(x \mid y)$ mit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Dann folgt aus dem Hilfssatz:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} \;=\; a + \frac{e}{a}x + a - \frac{e}{a}x \;=\; 2a.$$

Also liegt P auf der Ellipse.

2) Punkte, deren Koordinaten die Gleichung nicht erfüllen, liegen nicht auf der Ellipse: Siehe Skizze.



Aufgabe 4.4 (*Arbeitsblatt 4, Aufgabe 3*)

Gegeben ist eine Ellipse durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} \;=\; 1.$$

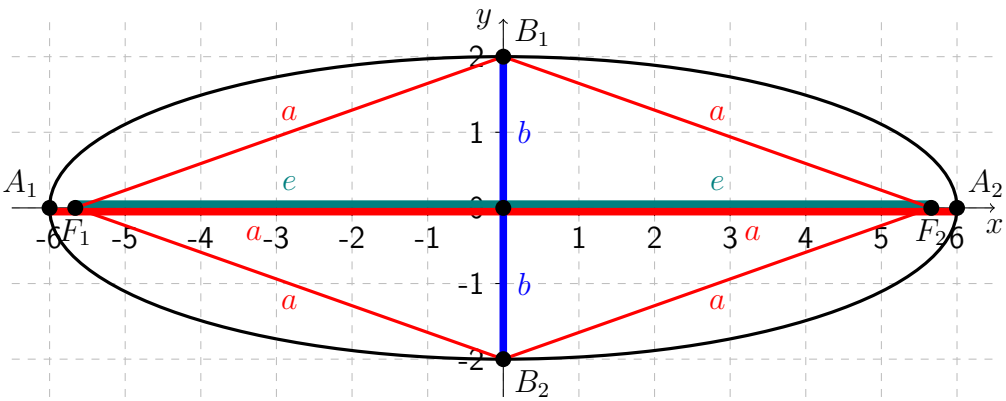
a) Gib a, b an und berechne e (*Hinweis:* Du kannst einen der beiden Werte $\sqrt{32} \approx 5,7$ oder $\sqrt{40} \approx 6,3$ verwenden).

b) Zeichne die Brennpunkte und die Haupt- und Nebenscheitel der Ellipse ein. Skizziere die Ellipse.

c) Zeichne in Deiner Skizze ein, wo die Größen a, b oder e als Längen auftreten.

Lösung: **a)** $a = 6,\ b = 2,\ e = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} \approx 5,66.$

b)–c)



Aufgabe 4.5 (*Arbeitsblatt 4, Aufgabe 4*)

Bestimme in jeder Teilaufgabe die Gleichung der Ellipse, die den Mittelpunkt M im Ursprung hat und die angegebene Eigenschaft besitzt.

a) Die Scheitel liegen in $A(2 \mid 0)$ und $B(0 \mid 1)$.

b) Ein Brennpunkt hat die Koordinaten $F(2 \mid 0)$, und $a = \sqrt{12}$.

c) Die Punkte $P(2 \mid 2)$ und $Q(4 \mid 1)$ liegen auf der Ellipse.
Hinweis: Setze die Koordinaten der Punkte in die Ellipsengleichung ein, um a^2 und b^2 zu bestimmen.

Lösung: **a)** Aus den Scheitelkoordinaten folgt $a = 2$ und $b = 1$.

Die gesuchte Ellipse besitzt die Gleichung $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

b) Aus den Brennpunktkoordinaten folgt $e = 2$. Damit ergibt sich $b^2 = a^2 - e^2 = 12 - 4 = 8$.

Die gesuchte Ellipse besitzt die Gleichung $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

c) Ansatz: Die Ellipse besitzt die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, die Konstanten $a, b > 0$ sind zu bestimmen.

Punkt P einsetzen: $\dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$, (1)

Punkt Q einsetzen: $\dfrac{16}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$. (2)

Aus (1): $\dfrac{4}{a^2} = 1 - \dfrac{4}{b^2}$. Dies in (2) eingesetzt:

$$4 - \frac{16}{b^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; 3 = \frac{15}{b^2} \;\Leftrightarrow\; b^2 = 5.$$

$b^2 = 5$ in (1) eingesetzt:

$$\frac{4}{a^2} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; a^2 = 20.$$

Die gesuchte Ellipse besitzt die Gleichung $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Aufgabe 4.6 (*Arbeitsblatt 4, Zusatzaufgabe 1*)

Was passiert, wenn $b > a > 0$ gilt?

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

a) Berechne die Koordinaten aller Punkte $P(x, y)$, die auf der Ellipse und auf einer der Koordinatenachsen liegen. Zeichne die Punkte ins Koordinatensystem ein.

b) Skizziere die Ellipse.

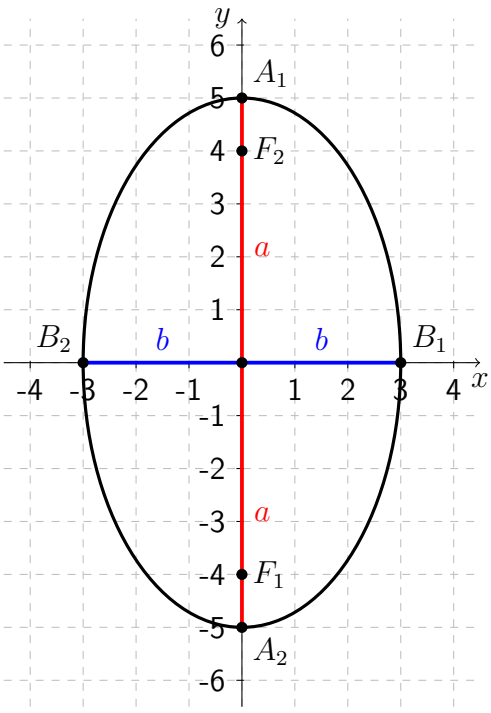
c) Zeichne die große und die kleine Halbachse in die Skizze ein.

d) Berechne die lineare Exzentrizität e und zeichne die Brennpunkte ein.

Lösung: **a)** $x = 0 \;\Rightarrow\; y = \pm 5$ Dies ergibt die Punkte $(0 \mid 5)$ und $(0 \mid -5)$.

$y = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 3$ Dies ergibt die Punkte $(3 \mid 0)$ und $(-3 \mid 0)$.

b)–d)

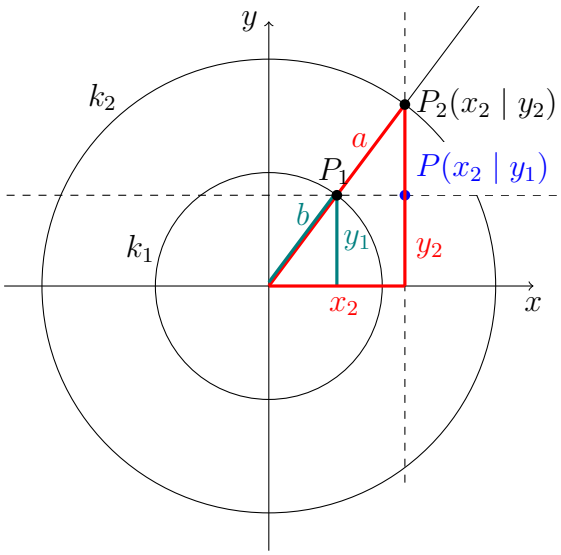


4.4 Konstruktion von Ellipsenpunkten mit vorgegebener x- oder y-Koordinate

Tafelanschrieb

Konstruktion von Ellipsenpunkten: Seien $a > b > 0$, k_1 ein Kreis um $(0 \mid 0)$ mit Radius b, k_2 ein Kreis um $(0 \mid 0)$ mit Radius a und $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ die Schnittpunkte einer Ursprungshalbgeraden mit k_1 bzw. k_2.

Dann liegt der Punkt $P(x_2 \mid y_1)$ auf der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Pythagoras: $x_2^2 + y_2^2 = a^2$

Strahlensatz: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a} \Rightarrow y_1 = \frac{b}{a} y_2$.

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a} y_2\right)^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{a^2} = 1$$

$\Rightarrow P(x_2 \mid y_1)$ liegt auf der Ellipse.

Vorgehen: Nun mündlich erklären, wie mit diesem Satz Ellipsenpunkte mit vorgegebener x-Koordinate konstruiert werden können.

Aufgabe 4.7 (*Arbeitsblatt 5, Aufgabe 5*)

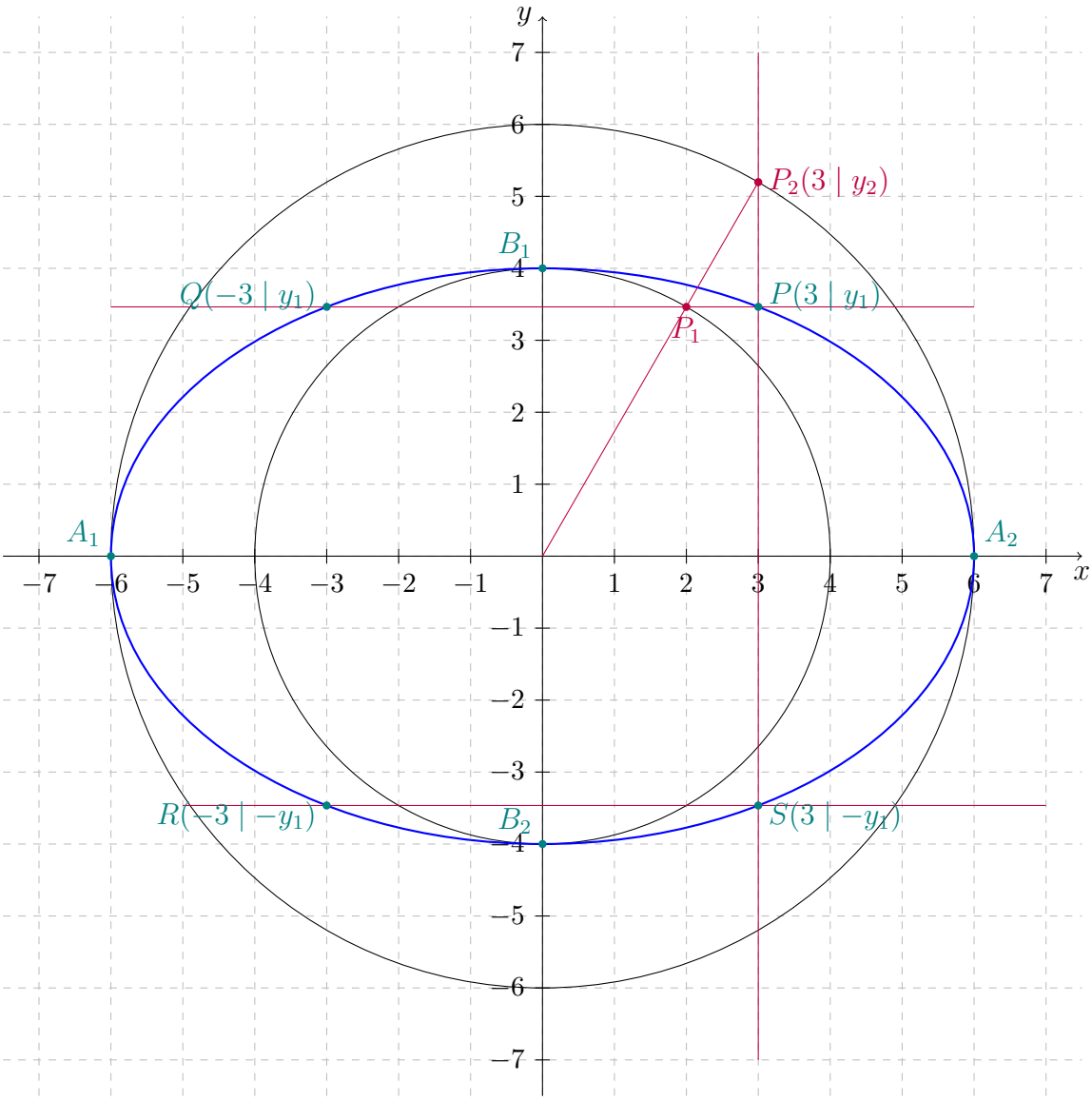
Gegeben ist eine Ellipse mit großer Halbachse $a = 6$LE und kleiner Halbachse $b = 4$LE.

a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen Punkt P, der auf der Ellipse liegt und die x-Koordinate 3 besitzt. Parallelen dürfen mit dem Geodreieck gezeichnet werden.

b) Spiegle P mit dem Geodreieck an den Symmetrieachsen der Ellipse, um drei weitere Punkte zu erhalten, die auf der Ellipse liegen.

c) Zeichne Haupt- und Nebenscheitel ein und skizziere die Ellipse.

Lösung:



Verkürzte Kontruktionsbeschreibung:

- Senkrechte auf x-Achse durch $(3 \mid 0)$ schneidet den großen Kreis im Punkt P_2.
- Strecke vom Ursprung zu P_2 schneidet den kleinen Kreis im Punkt P_1.
- Parallele zur x-Achse durch P_1 schneidet die Senkrechte auf die x-Achse im Ellipsenpunkt P. Dieser Punkt wird nun an den Koordinatenachsen und am Ursprung gespiegelt, um die Ellipsenpunkte Q, R und S zu erhalten.

4.5 Schriftliche Aufgaben

Hier sind die Lösungen bereits in die entsprechenden Felder bzw. Graphiken eingetragen.

Aufgabe 4.8 (*Schriftliches Aufgabenblatt, Aufgabe 6*)

Gegeben sind zwei Punkte $F_1(-4 \mid 0)$, $F_2(4 \mid 0)$ und $a = 5$. Dadurch wird eine Ellipse definiert.

a) Bestimme die Koordinaten der Hauptscheitel: $\boxed{A_1(-5 \mid 0),\ A_2(5 \mid 0)}$

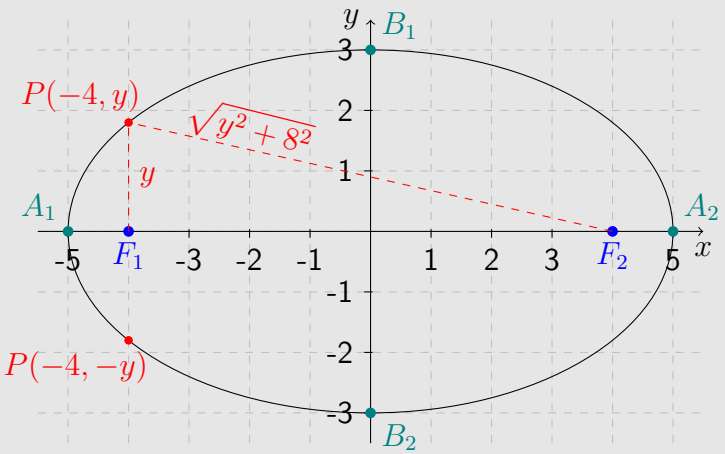
b) Bestimme die Koordinaten der Nebenscheitel: $\boxed{B_1(0 \mid 3),\ A_2(0 \mid -3)}$

c) Skizziere die Ellipse im unten stehenden Koordinatensystem.

d) **Zusatzaufgabe:** Berechne die Koordinaten der Punkte $P(-4 \mid y)$, die auf der Ellipse liegen.

Lösung: $\boxed{P_1(-4 \mid 1,8),\ P_2(-4 \mid -1,8)}$

Tipp: Verwende die Bedingung dafür, dass P auf der Ellipse liegt und versuche, alle Summanden durch y auszudrücken. Wende den Satz des Pythagoras an!



d) Für $P(-4 \mid y)$ mit $y > 0$ gelten

$$\overline{PF_1} = y,\ \overline{PF_2} = \sqrt{y^2 + 8^2}.$$

P liegt genau dann auf der Ellipse, wenn

$$\begin{aligned} & y + \sqrt{y^2 + 8^2} = 10 \\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{y^2 + 8^2} = 10 - y \\ \Leftrightarrow\ & y^2 + 8^2 = (5 - y)^2 \\ & \qquad = 100 - 20y + y^2 \\ \Leftrightarrow\ & 20y = 100 - 64 = 36 \\ \Leftrightarrow\ & y = 1,8 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.9 (*Schriftliches Aufgabenblatt, Aufgabe 7*)

Wahr oder falsch?

	w/f
Eine zur y-Achse parallele Gerade trifft immer zwei Punkte der Ellipse.	f
Es gibt ein paar wenige Ellipsen, bei denen ein Brennpunkt auf der Ellipse selbst liegt.	f
Setzt man in der Ellipsengleichung $a = b$, so erhält man einen Kreis.	w
Die Nebenscheitel einer Ellipse liegen auf der Mittelsenkrechten der Brennpunkte.	w
Die Hauptscheitel einer Ellipse sind die beiden Punkte der Ellipse, die den größten Abstand voneinander haben.	w
Die Nebenscheitel einer Ellipse sind die beiden Punkte der Ellipse, die den kleinsten Abstand voneinander haben.	f
Die Brennpunkte einer Ellipse liegen immer auf der Hauptachse.	w
Der Abstand der Nebenscheitel einer Ellipse von ihrem Mittelpunkt ist immer kleiner als der Abstand ihrer Brennpunkte vom Mittelpunkt.	f

Aufgabe 4.10 (*Schriftliches Aufgabenblatt, Aufgabe 8*)

Diese Aufgabe ist durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal und ohne Taschenrechner zu lösen. Mögliche Werte, die du benötigst, sind $\sqrt{40} \approx 6,3$ oder $\sqrt{58} \approx 7,6$.

Gegeben ist eine Ellipse durch die Gleichung $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

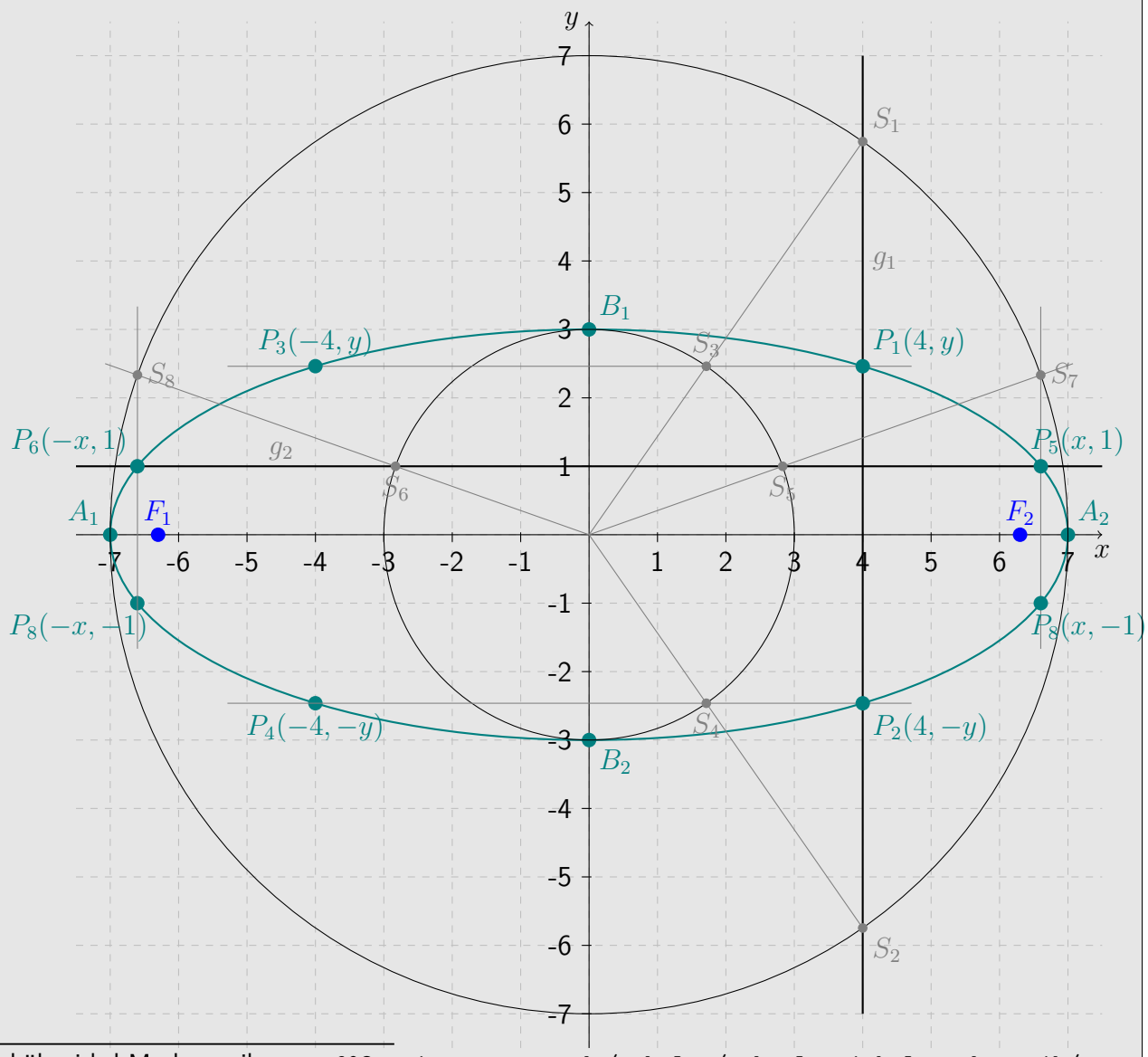
a) Gib die Längen der großen und der kleinen Halbachse an und berechne die lineare Exzentrizität:

$$\boxed{a = 7,\ b = 3,\ e = \sqrt{40} \approx 6,3}$$

b) Konstruiere alle Punkte der Ellipse mit der Eigenschaft $x = 4$. Bestimme alle weiteren Punkte, die sich aus Symmetriegründen durch geeignete Spiegelung ergeben.

c) Zeichne die Haupt- und Nebenscheitel und die Brennpunkte der Ellipse in das Koordinatensystem ein. Skizziere die Ellipse.

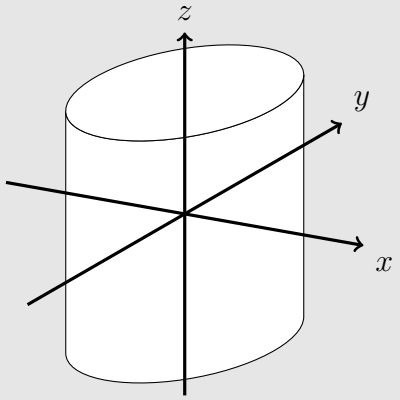
d) **Zusatzaufgabe:** Konstruiere alle Punkte der Ellipse mit der Eigenschaft $y = 1$. Zeichne alle weiteren Punkte der Ellipse ein, die durch Spiegelung dieser Punkte erhalten werden können.



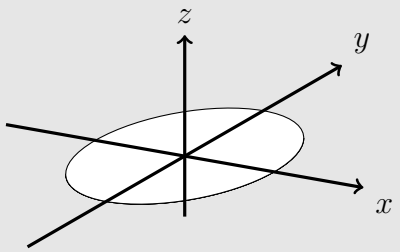
4.6 Zusatzaufgaben

Aufgabe 4.11 (*Zusatzblatt, Zusatzaufgabe 1*)

Warum ist die Schnittkurve eines Zylindermantels mit einer Ebene ein Kreis oder eine Ellipse?

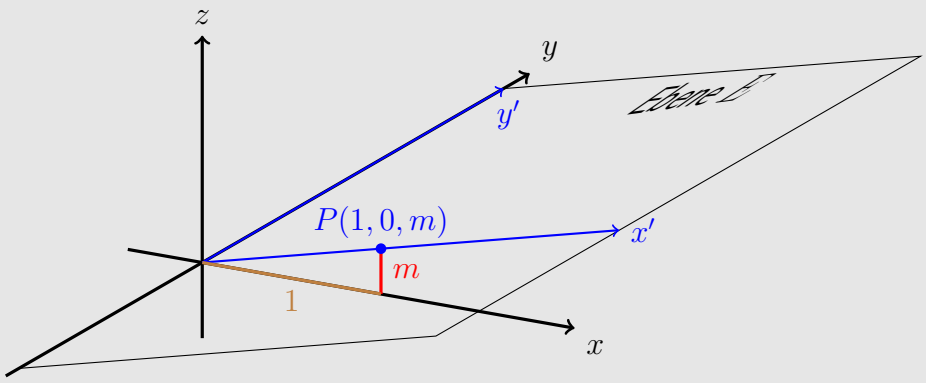


Ein Zylinder wird bei geschickter Wahl des Koordinatensystems durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ charakterisiert. D.h. genau alle Punkte $(x \mid y \mid z)$, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen, liegen auf dem Zylindermantel.



Eine Ebene E, die schräg zur Zylinderachse verläuft, wird bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems durch die Gleichung $z = mx$ mit $m \geq 0$ beschrieben. In dieser Ebene E liegt die Schnittkurve. Der Fall $m = 0$ bedeutet $z = 0$, d.h. die Schnittkurve ist der Kreis in der x-y-Ebene mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$.

Für den Fall $m > 0$ wird auf der schneidenden Ebene ein neues x'-y'-Koordinatensystem eingeführt: Der Ursprung liegt im Punkt $(0 \mid 0 \mid 0)$, die y'-Achse ist identisch mit der y-Achse und die x-Achse verläuft orthogonal dazu in E (vgl. Graphik). Nun müssen Koordinaten ineinander umgerechnet werden. Wir nehmen an, dass $m > 0$ fest vorgegeben ist und dass für alle Achsen dieselbe Längeneinheit verwendet wird.



a) Es sei $P(1 \mid 0 \mid m)$ ein Punkt auf der x'-Achse. Wie lauten seine Koordinaten $(x' \mid y')$?

b) Nun sei $P(a \mid 0 \mid ma)$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt auf der x'-Achse. Wie können seine Koordinaten $(x' \mid y')$ aus a, m berechnet werden?

c) Es sei $P(x \mid y \mid mx)$ ein Punkt auf der Ebene E. Wie können seine Koordinaten $(x' \mid y')$ aus x, y, m berechnet werden?

d) Es sei ein Punkt auf der Ebene durch $P(x' \mid y')$ gegeben. Wie berechnet man daraus seine Koordinaten $P(x \mid y \mid z)$? Überprüfe Deine Formel am Ergebnis von a).

e) Nun sei bekannt, dass der Punkt $P(x' \mid y')$ auf der Ebene und auf dem Zylindermantel liegt. Zeige mit Hilfe der umgerechneten Koordinaten $P(x \mid y \mid z)$ und der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, dass seine Koordinaten x', y' eine Ellipsengleichung erfüllen.

Lösung: **a)** Die x'-Koordinate ergibt sich als Abstand von $(0 \mid 0 \mid 0)$: $x' = \sqrt{1+m^2}$.
Da P auf der x'-Achse liegt, gilt $y' = 0$.

b) Für $a \geq 0$ ergibt sich $x' = \sqrt{a^2 + a^2m^2} = \sqrt{1+m^2}\,a$.
Für $a < 0$ gilt $x' = -\sqrt{a^2+a^2m^2} = -\sqrt{1+m^2}\,|a| = \sqrt{1+m^2}\,a$.
D.h. in jedem Fall gilt $x' = \sqrt{1+m^2}\,a$.
Da P auf der x'-Achse liegt, gilt $y' = 0$.

c) $x' = \sqrt{1+m^2}\,x,\ y' = y$.

d) $x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}x',\ y = y',\ z = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}x'$.
In a) ergab sich $x' = \sqrt{1+m^2},\ y' = 0$. Unsere Formel ergibt als Koordinaten $(x \mid y \mid z)$ von P:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}x' = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{1+m^2} = 1, \\ y &= y' = 0, \\ z &= \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}x' = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{1+m^2} = m. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit $P(1 \mid 0 \mid m)$ überein.

e) Es muss $x^2 + y^2 = r^2$ gelten. Setze die Beziehungen $x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}x',\ y = y'$ ein:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}x'\right)^2 + y'^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x'^2}{r^2(1+m^2)} + \frac{y'^2}{r^2} = 1 \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen $a = r\sqrt{1+m^2}$ und $b = r$.

Aufgabe 4.12 (*Zusatzblatt, Zusatzaufgabe 2*)

Es sei eine Ellipse durch $a > b > 0$ und die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben. Außerdem sei die Gerade g parallel zur y-Achse durch $x = -\frac{a^2}{e}$ gegeben.

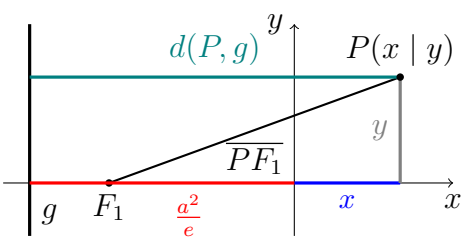
Beweise, dass für jeden Punkt P auf der Ellipse gilt:

$$\overline{PF_1} = \frac{e}{a}\,d(P,g).$$

Hinweis: Benütze die Formel aus dem Hilfssatz.

Man nennt g die **Leitgerade** der Ellipse. Die zu beweisende Gleichung entspricht bei der Parabel der Tatsache, dass die Entfernung von Parabelpunkten zur Leitgerade gleich der Entfernung zum Brennpunkt ist. Für Ellipsenpunkte muss der Abstand zur Leitgeraden mit dem Faktor $\frac{e}{a} < 1$ multipliziert werden, damit sich der Abstand zum Brennpunkt ergibt.

Lösung:



Aus dem Hilfssatz: $\overline{PF_1} = a + \frac{e}{a}x$.

Abstand zu g: $d(P,g) = \frac{a^2}{e} + x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{e}{a}\,d(P,g) &= \frac{e}{a}\left(\frac{a^2}{e} + x\right) \\ &= a + \frac{e}{a}x \quad = \overline{PF_1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.13 (*Arbeitsblatt 4, Aufgabe 2*)

Gegeben ist eine Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $a > b > 0$. Berechne die y-Koordinaten (als Formel von a, b) der Punkte, die die selbe x-Koordinate wie einer der Brennpunkte haben.

Lösung: Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Setzt man $x = e$ in die Ellipsengleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}_{=1-b^2/a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{b^4}{a^2} \qquad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Das bedeutet: Die vier Punkte, die mit einem der Brennpunkte in der x-Koordinate übereinstimmen, haben folgende Koordinaten:

$$P_1\Big(\sqrt{a^2 - b^2}, \frac{b^2}{a}\Big), \quad P_2\Big(\sqrt{a^2 - b^2}, -\frac{b^2}{a}\Big), \quad P_3\Big(-\sqrt{a^2 - b^2}, \frac{b^2}{a}\Big), \quad P_4\Big(-\sqrt{a^2 - b^2}, -\frac{b^2}{a}\Big).$$

Aufgabe 4.14 (*Zusatzaufgabe 2*)

Es seien $a > b > 0$ gegeben. Dann beschreibt die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Ellipse mit den Brennpunkten $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$ auf der x-Achse.

a) Überlege: Was ändert sich an der Ellipsengleichung, wenn die Ellipse so gespiegelt wird, dass die Brennpunkte der gespiegelten Ellipse auf der y-Achse liegen?

b) Wie kann man an einer Ellipsengleichung erkennen, ob die Brennpunkte auf der x- oder y-Achse liegen?

Lösung: **a)** Es müssen die x- und y-Koordinate vertauscht werden:

$$\text{Aus der Gleichung } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ wird die Gleichung } \frac{y^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nun ist der Nenner bei x^2 kleiner als bei y^2. Dies ist der einzige Unterschied in der Gleichung.

b) Ist eine Ellipse durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben, so gilt:

Ist $a > b > 0$, so liegen die Brennpunkte auf der x-Achse,

Ist $b > a > 0$, so liegen die Brennpunkte auf der y-Achse.

Aufgabe 4.15 (*Ergänzungaufgabe 2*)

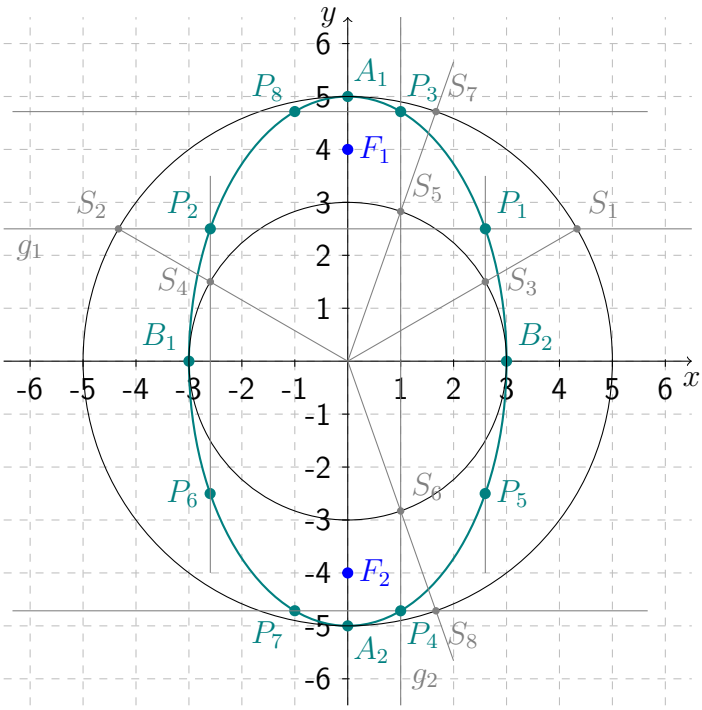
Gegeben ist die Ellipse $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. Berechne e. Überlege, wie die Ellipse liegen muss, wenn der Nenner bei y^2 größer als der bei x^2 ist. Zeichne die Scheitel und die Brennpunkte der Ellipse in ein Koordinatensystem ein. Konstruiere jeweils alle Punkte auf der Ellipse mit der angegebenen Eigenschaft:

b₁) $y = 2,5$ **b₂)** $x = 1$ **b₃)** $y = -2,5$ **b₄)** $x = -1$

Skizziere die Ellipse.

Lösung: Da die größere Halbachse in y-Richtung verläuft, liegen die Brennpunkte auf der y-Richtung.

$e = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F(0 \mid \pm 4)$, die Hauptscheitel $A(0 \mid \pm 5)$, die Nebenscheitel $B(\pm 3 \mid 0)$.



b₁) Gerade g_1 mit $y = 2,5$ schneidet Kreis um $(0 \mid 0)$ mit Radius 5LE in S_1 und S_2. Strecke von $(0 \mid 0)$ nach S_1 schneidet Kreis um $(0 \mid 0)$ mit Radius 3LE in S_3. Gerade durch S_3 parallel zur y-Achse schneidet g_1 in P_1. P_1 ist Punkt auf der Ellipse mit y-Koordinate $2,5$.
Entsprechend wird der zweite Punkt P_2 mit y-Koordinate $2,5$ konstruiert.

b₂) Gerade g_2 mit $x = 1$ schneidet Kreis um $(0 \mid 0)$ mit Radius 3LE in S_5 und S_6. Gerade durch $(0 \mid 0)$ und S_5 schneidet Kreis um $(0 \mid 0)$ mit Radius 5LE in S_7. Gerade durch S_7 parallel zur x-Achse schneidet g_2 in P_3. P_3 ist Punkt auf der Ellipse mit x-Koordinate 1.
Entsprechend wird der zweite Punkt P_4 mit x-Koordinate 1 konstruiert.

b₃) Spiegelung von P_1, P_2 an der x-Achse liefert P_5, P_6.

b₄) Spiegelung von P_3, P_4 an der y-Achse liefert P_7, P_8.

5 Unterrichtseinheit 5 - Ellipse und Tangente

In dieser Einheit wird die Tangente an eine Ellipse in einem Ellipsenpunkt geometrisch untersucht. Damit können technische Anwendungen betrachtet werden. Außerdem wird die analytische Beschreibung von Tangenten hergeleitet.

5.1 Konstruktion von Ellipsenpunkten

Dauer: 15 min
Ziel: Wiederholung der geometrischen Definition einer Ellipse
Material: AB1, OH-Folie 1: Aufgabe 1

> **Anmerkung**
> Falls das Ergänzungsmaterial behandelt wurde, sollte darauf hingewiesen werden, dass hier eine andere Konstruktion verlangt ist, als die, die letztes Mal am Schluss vorgestellt wurde.

Aufgabe 5.1 (*Arbeitsblatt 1, Aufgabe 1*)

Gegeben sind zwei Punkte $F_1(-4 \mid 0)$, $F_2(4 \mid 0)$ und $a = 6$. Dadurch wird eine Ellipse definiert. Die Ellipse besteht aus allen Punkten P, für die $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = 12$ gilt: Die Summe der Abstände von P zu F_1 und zu F_2 ist gleich 12LE (LE = Längeneinheit).

a) Konstruiere mit dem Zirkel die Punkte B_1, B_2 der Ellipse, die von F_1 und F_2 gleich weit entfernt sind.

b) Konstruiere mit dem Zirkel alle Punkte der Ellipse, die von F_1 den Abstand 9LE haben.

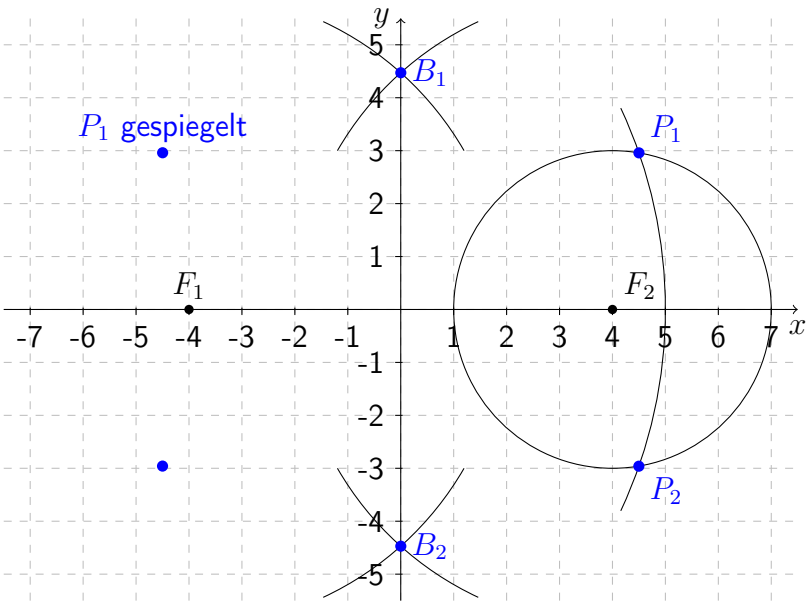
Wie bekommt man aus diesen Punkten die Punkte der Ellipse, die von F_2 den Abstand 9LE haben? Zeichne auch diese Punkte ein (Konstruktion mit Geodreieck genügt).

c) Konstruiere mit dem Zirkel alle Punkte der Ellipse, die von F_1 den Abstand 8LE oder 7LE haben. Zeichne zusätzlich alle Punkte der Ellipse ein, die von F_2 den Abstand 8LE oder 7LE haben.

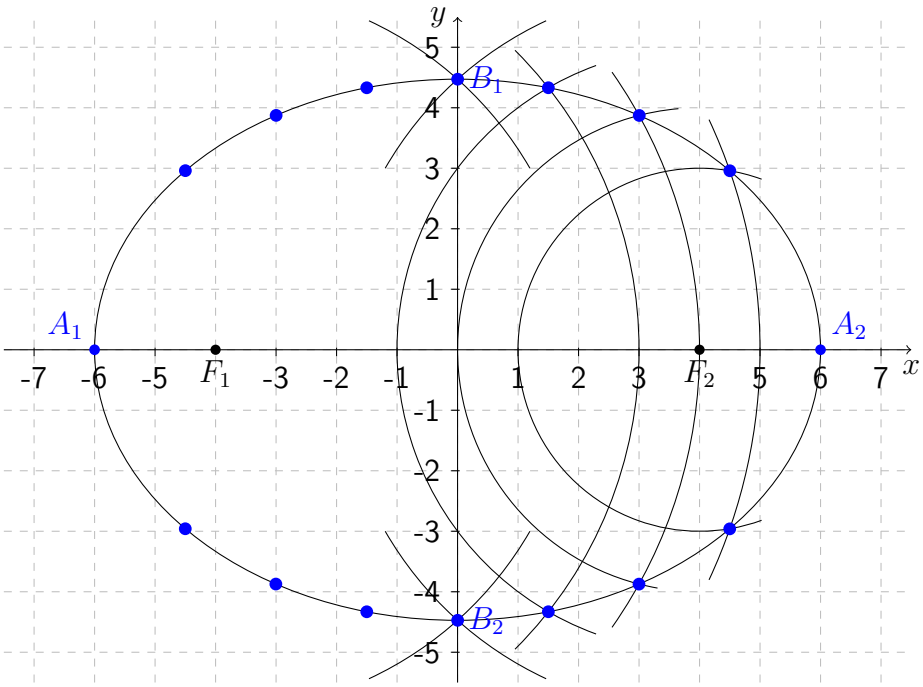
d) Zeichne die Punkte A_1, A_2 der Ellipse ein, die von F_1 oder von F_2 den Abstand 2LE haben. Warum liegen diese auf der x-Achse? Skizziere die Ellipse.

Lösung: **a)** Diese Punkte haben von F_1 und von F_2 den Abstand $6LE$. Man erhält sie als Schnitt zweier Kreise. Zeichnung siehe b).

b) Wenn P auf der Ellipse liegt und von F_1 den Abstand 9LE hat, dann hat P von F_2 den Abstand 3LE. Man kann also die zwei Punkte, die diese Bedingung erfüllen, als Schnitt zweier Kreise konstruieren. Die anderen Punkte erhält man durch Spiegelung an der y-Achse.



c) - d) Ein Punkt auf der Ellipse , der von F_1 den Abstand 2LE hat, hat von F_2 den Abstand 10LE. Da $\overline{F_1F_2} = 8$, muss der Punkt auf der Verlängerung von F_1F_2 liegen, das ist die x-Achse.



> **Anmerkung**
> Auf eine Wiederholungsaufgabe zur Ellipsengleichung wurde aus Zeitgründen verzichtet. Diese Wiederholung befindet sich auf dem Blatt zur Berührbedingung.

5.2 Tangente in einem Ellipsenpunkt

Dauer: 10 min
Ziel: Definition der Tangente verstehen, Tangente als Winkelhalbierende der Brennstrahlen kennenlernen
Material: OH-Folie 2: Tangente als Winkelhalbierende, Arbeitsblatt 1

Tafelanschrieb

5. Ellipsen und Tangenten

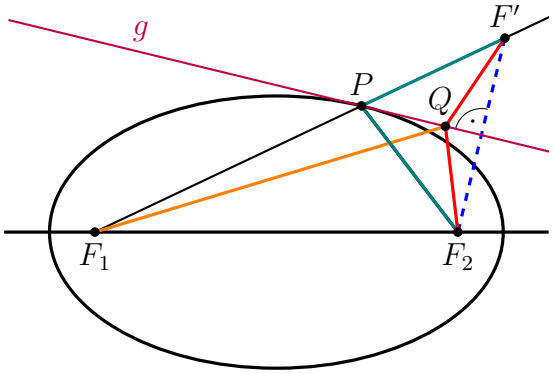
Definition: Ist P ein Punkt auf einer Ellipse, so ist die Tangente an die Ellipse in P diejenige Gerade g, die mit der Ellipse genau den Punkt P gemeinsam hat. Man sagt: g berührt die Ellipse in P.

Vorgehen: L. schreibt den Beweis an die Tafel, SuS schreiben auf dem Arbeitsblatt 2 mit.

Tafelanschrieb

Satz: Es sei P ein Punkt auf einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1, F_2 und g die Winkelhalbierende der Strecke F_2P und der Verlängerung der Strecke F_1P über P hinaus. Dann ist g die Tangente an die Ellipse in P.

Beweis:



Zu zeigen: Jeder Punkt Q auf g mit $Q \neq P$ liegt nicht auf der Ellipse.
Spiegelung von F_2 an g ergibt F'. Dann gilt

$$\overline{PF'} = \overline{PF_2}, \text{ also } \overline{F_1F'} = 2a$$

Sei Q ein beliebiger Punkt auf g mit $Q \neq P$. Dann gilt $\overline{QF'} = \overline{QF_2}$ (denn g ist auch Mittelsenkrechte zu F_2 und F')

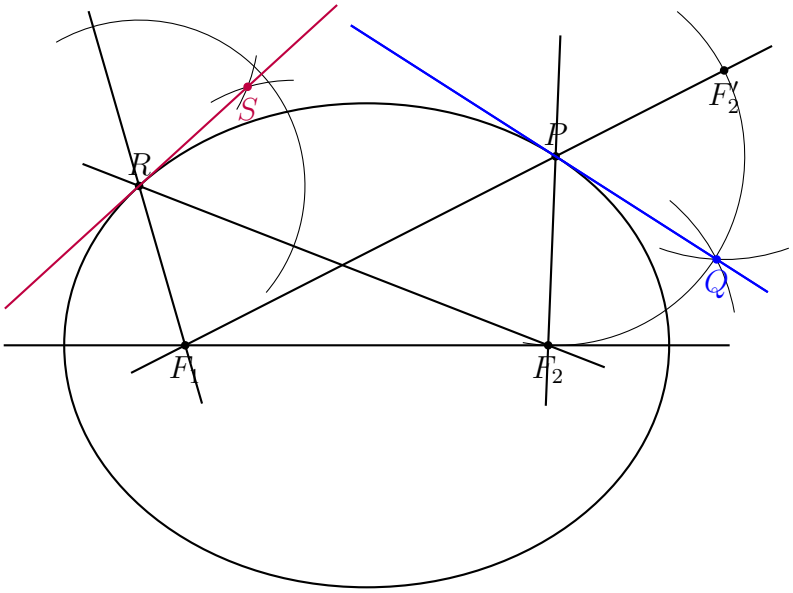
$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} &= \overline{F_1Q} + \overline{QF'} \\ &> \overline{F_1F'} = 2a. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Q liegt nicht auf der Ellipse. □

Aufgabe 5.2 (*Arbeitsblatt 3, Aufgabe 2*)

Gegeben ist die Ellipse in der Graphik und zwei Punkte P, R auf der Ellipse. Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangenten an die Ellipse in P und in R.

Lösung:



Die Tangente in P wird konstruiert als Winkelhalbierende der Geraden durch F_2 und P und der Geraden durch F_1 und P.

Entsprechend ist die Tangente in R eine Winkelhalbierende der Geraden durch F_1 und R und der Geraden durch F_2 und R.

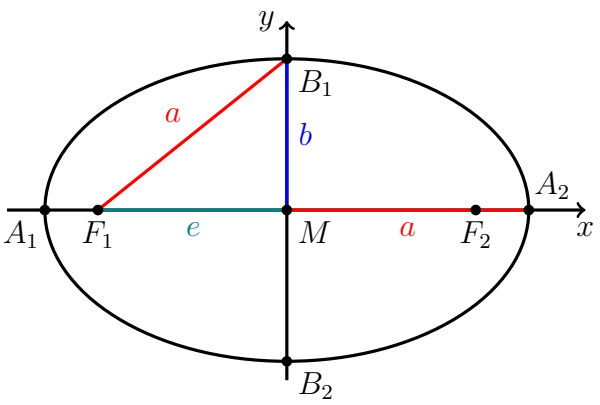
5.3 Die Berührbedingung

Dauer: 40 min
Ziel: Wiederholung der Ellipsengleichung, Bedingung an Geradengleichungen kennenlernen, die genau dann erfüllt ist, wenn die Gerade Tangente an die Ellipse ist.
Material: Arbeitsblatt 4

Zur Auffrischung des Wissens über die Ellipsengleichung befinden sich folgender Text und die Skizze auf dem Arbeitsblatt 4:

Seien $a > b > 0$. In einem Koordinatensystem wird durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Ellipse beschrieben. D.h. auf der Ellipse liegen genau alle Punkte $(x \mid y)$, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen.

Dann ist a die Länge der Hauptachse, b die Länge der Nebenachse. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Für alle Punkte P der Ellipse gilt $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.



Vorgehen: Arbeitsblatt 4 wird in Einzel- oder Partnerarbeit bearbeitet. Zur Auflösung der quadratischen Gleichung wird eventuell ein Taschenrechner benötigt. Man kann auch auf die Lösungsformel für quadratische Gleichungen verzichten und das vollständige Quadrat erkennen.

Aufgabe 5.3 (*Arbeitsblatt 4: Aufgabe 3*)

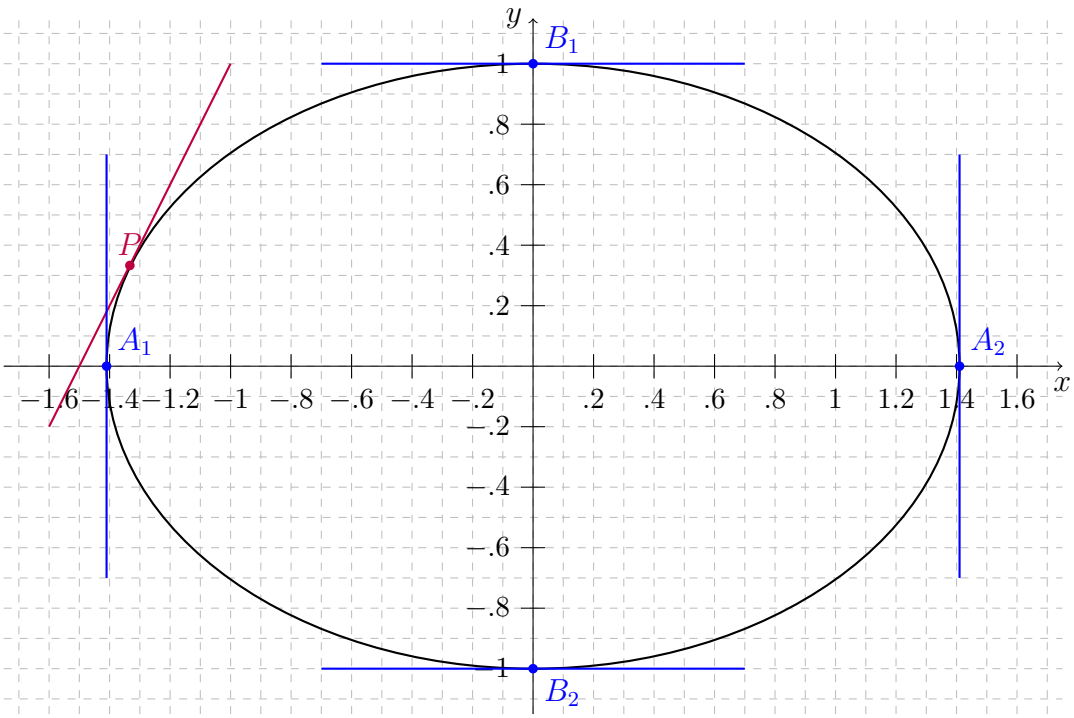
Gegeben sind die Ellipse $k : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ und die Gerade $g : y = 2x + 3$.

a) Zeichne Haupt- und Nebenscheitel in das gegebene Koordinatensystem ein und skizziere die Ellipse ($\sqrt{2} \approx 1,41$).

b) Weise rechnerisch nach, dass die Gerade g und die Ellipse k genau einen gemeinsamen Punkt besitzen und berechne seine Koordinaten. Zeichne den Berührpunkt und die Tangente ein.

c) Zeichne die Tangenten in den Haupt- und Nebenscheiteln ein und bestimme jeweils die Gleichungsdarstellung der Tangente.

Lösung: **a)** Skizze für a), b), c):



b) Geradengleichung quadriert: $y^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

Schnitt mit Ellipse: Einsetzen von y^2 in die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{2} + 4x^2 + 12x + 9 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 8x^2 + 24x + 18 = 2 \;\Leftrightarrow\; 9x^2 + 24x + 16 = 0.$$

In der letzten Gleichung steht ein vollständiges Quadrat: $(3x+4)^2 = 0$. Also haben die Gerade und die Ellipse genau einen Punkt gemeinsam. Alternativ Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{18} = -\frac{24}{18} = -\frac{4}{3}.$$

Der einzige Schnittpunkt ist also $P(-\frac{4}{3} \mid \frac{1}{3})$.

Aus Symmetriegründen ist die an der x-Achse gespiegelte Gerade ebenfalls Tangente. Sie wird durch die Gleichung $y = -2x - 3$ beschrieben.

Dann können beide Geraden auch noch an der y-Achse gespiegelt werden, um zwei weitere Tangenten zu erhalten. Diese haben die Gleichungen $y = -2x + 3$ und $y = 2x - 3$.

c) Die Hauptscheitel haben die Koordinaten $A_1(-\sqrt{2} \mid 0)$ und $A_2(\sqrt{2} \mid 0)$. Die Tangenten sind parallel zur y-Achse und werden durch die Gleichungen $x = -\sqrt{2}$ bzw. $x = \sqrt{2}$ beschrieben.

Die Tangenten in den Nebenscheiteln sind parallel zur x-Achse und werden durch die Gleichungen $y = 1$ bzw. $y = -1$ beschrieben.

> **Anmerkung**
> Aufgabe 3, Teil c), sollte auf jeden Fall besprochen werden. Der Spezialfall senkrechter Tangenten wird später benötigt.

Tafelanschrieb

Satz: Durch $a > b > 0$ und $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ sei eine Ellipse k gegeben. Für jede Gerade $g : y = mx+c$ gilt: Erfüllen m, c die Berührbedingung $a^2m^2 + b^2 = c^2$, so ist g Tangente an k, d.h. g und k haben genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis: Setze $y^2 = (mx + c)^2$ in die umgeformte Ellipsengleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ein:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mxc + c^2) &= a^2b^2 \\ \Leftrightarrow\quad x^2(\underbrace{b^2 + a^2m^2}_{=c^2 \leftarrow \text{Berührbedingung} \rightarrow}) + 2ma^2xc + \underbrace{a^2c^2 - a^2b^2}_{=a^2(c^2-b^2)=a^2a^2m^2=a^4m^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow\quad (xc)^2 + 2xca^2m + (a^2m)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow\quad (xc + a^2m)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow\quad x = -\frac{a^2m}{c}. \end{aligned}$$

Genau ein x-Wert $\Rightarrow$ g und k haben genau einen Punkt gemeinsam. □

Anmerkung

- Da lauter Äquivalenzumformungen durchgeführt werden, zeigt der Beweis, dass g und die Ellipse genau einen Schnittpunkt besitzen. Es muss nicht nachgerechnet werden, ob zu dem gefundenen x-Wert ein Punkt der Ellipse existiert. Das ist durch den Ansatz und die Umformungen garantiert.
- Didaktische Reduktion: Es wird nicht die genau-dann-Eigenschaft der Berührbedingung bewiesen.

Aufgabe 5.4 (*Arbeitsblatt 5, Aufgabe 4*)

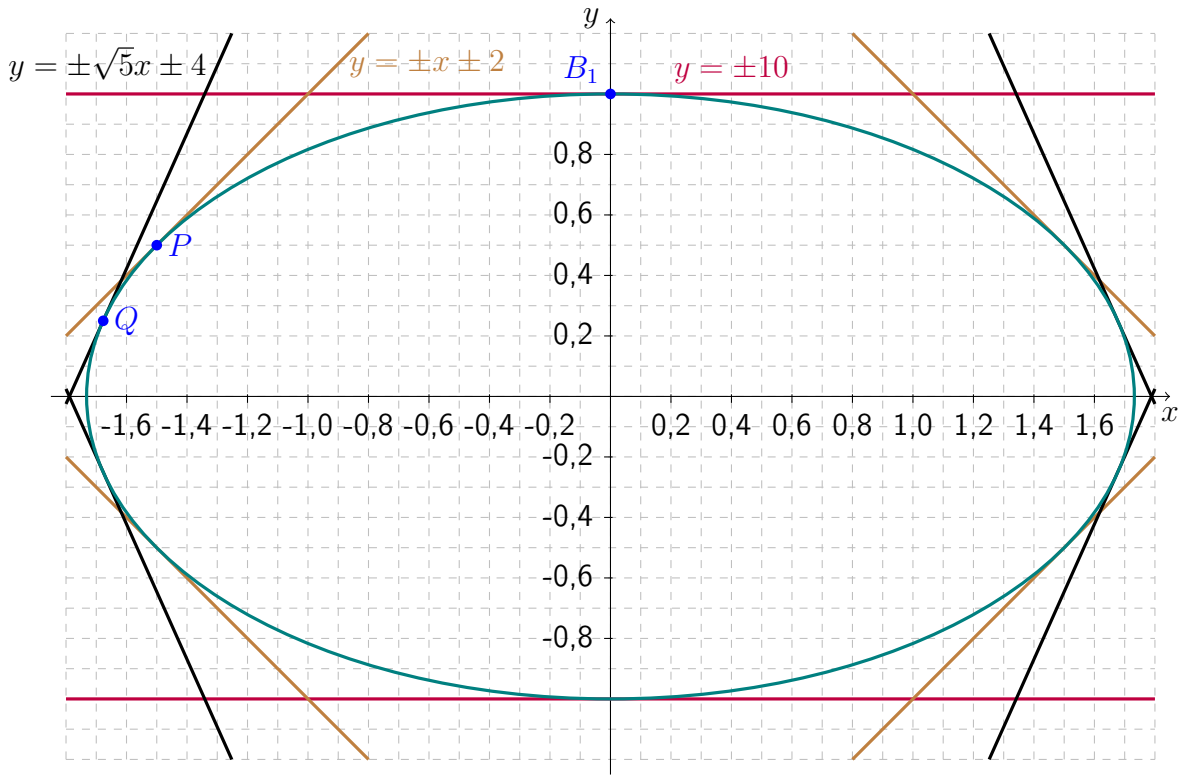
Gegeben ist die Ellipse $k : \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

a) Schreibe die Berührbedingung für eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ und der gegebenen Ellipse auf. Gib drei verschiedene m-Werte mit dazugehörigen c-Werten an, die die Berührbedingung erfüllen. Zeichne die dazugehörigen Tangenten $y = mx \pm c$ in das Koordinatensystem ein.

b) Berechne die Berührpunkte der Tangenten. Du kannst dafür die Formel $x = -\frac{a^2m}{c}$ aus dem Beweis des Hilfssatzes verwenden.

c) Zeichne Haupt- und Nebenscheitel der Ellipse und die Berührpunkte der Tangenten ein. Skizziere die Ellipse ($\sqrt{3} \approx 1,73$).

Lösung: **a)** Skizze für a), b) und c):



b) Die Bedingung lautet $a^2m^2 + b^2 = c^2$, also hier $3m^2 + 1 = c^2$. Mögliche Lösungen sind z.B.

$$(m, c) = (0, 1), \quad (m, c) = (1, 2), \quad (m, c) = (\sqrt{5}, 4).$$

Die zugehörigen Tangenten sind oben eingezeichnet.

c) Für die Tangente $y = 1$ ist der Berührpunkt $B_1(0 \mid 1)$.

Für die Tangente $y = x + 2$ ergibt die Formel aus dem Beweis

$$x = -\frac{a^2m}{c} = -\frac{3}{2}.$$

Mit der Geradengleichung folgt $y = x + 2 = \frac{1}{2}$. Also ist der Berührpunkt $P(-\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2})$.

Für die Tangente $y = \sqrt{5}\,x + 4$ ergibt die Formel aus dem Beweis

$$x = -\frac{a^2m}{c} = -\frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

Mit der Geradengleichung folgt $y = \sqrt{5}x + 4 = 4 - \frac{15}{4} = \frac{1}{4}$. Also ist der Berührpunkt $Q(-\frac{3\sqrt{5}}{2} \mid \frac{1}{4}) \approx (-1,67 \mid 0,25)$.

5.4 Tangentengleichung

Dauer: 35 min

Ziel: Die Gleichung einer Tangente an eine Ellipse aufstellen können, wenn der Berührpunkt gegeben ist.

Material: Tafel, OH-Folie Tangentengleichung, AB 6

Tafelanschrieb

Satz: Ist $P(x_0 \mid y_0)$ ein Punkt auf der Ellipse $k: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dann ist die Tangente an k in P durch die Gleichung $g: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ gegeben.

Beweis: Fall $y_0 \neq 0$:

1) P liegt auf der Geraden: Es gilt $\frac{x_0 x_0}{a^2} + \frac{y_0 y_0}{b^2} = 1$, da P auf k liegt.

2) Geradengleichung nach y auflösen:

$$\frac{y_0 y}{b^2} = 1 - \frac{x_0 x}{a^2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0 x}{a^2}\right) = \underbrace{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}_{=:m} x + \underbrace{\frac{b^2}{y_0}}_{=:c}$$

m, c erfüllen die Bedingung aus dem Hilfssatz:

$$\begin{aligned} a^2 m^2 + b^2 &= a^2 \frac{b^4 x_0^2}{a^4 y_0^2} + b^2 = \frac{b^4 x_0^2 + b^2 a^2 y_0^2}{a^2 y_0^2} \\ &= \frac{b^2}{a^2 y_0^2} \underbrace{(b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2)}_{=a^2 b^2 \text{ da } P \text{ auf Ellipse}} = \frac{b^2 a^2 b^2}{a^2 y_0^2} = \frac{b^4}{y_0^2} = c^2. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} m, c \text{ erfüllen die Berührbedingung} \\ P \text{ liegt auf } g \text{ und auf } k \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ ist Tangente an } k \text{ in } P$$

Fall $y_0 = 0$: Dann gilt $x_0 = \pm a$. Die Tangente ist parallel zur y-Achse und hat die Gleichung $x = a$ oder $x = -a$. Diese Gleichung ergibt sich auch, wenn man $y_0 = 0$ und $x_0 = \pm a$ in die Gleichung von g einsetzt:

$$\frac{\pm a x}{a^2} + 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm a. \qquad \square$$

Vorgehen: Partner-/Einzelarbeit. Bei der Besprechung der Aufgabe werden nur die Ergebnisse an die Tafel geschrieben.

Aufgabe 5.5 (*Arbeitsblatt 6: Aufgabe 5*)

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) Bestimme die Geradengleichung der Tangenten an die Ellipse durch die Punkte
(i) $P_1(\sqrt{6} \mid 1)$, (ii) $P_2(\frac{8}{3} \mid \frac{2}{3})$, (iii) $P_3(0 \mid 2)$, (iv) $P_4(\sqrt{8} \mid 0)$.

b) Zeichne die Punkte und die Tangenten in die Graphik ein ($\sqrt{6} \approx 2,45$; $\sqrt{8} \approx 2,83$).

c) **Zusatzaufgabe:** Bestimme die Gleichungen der Tangenten mit Steigung $m = 2$, indem du das Tangentenkriterium verwendest.

d) **Zusatzaufgabe:** Bestimme die Schnittpunkte der Tangenten aus Teil b) mit der Ellipse. Benutze dafür die umgeformte Tangentengleichung aus dem Beweis. Prüfe dein Ergebnis auf Plausibilität, indem Du die Tangenten oben in der Graphik einzeichnest.

Lösung: **a)** (i) $\dfrac{\sqrt{6}x}{8} + \dfrac{y}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; y = 4 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}x,$

(ii) $\dfrac{2x}{8} + \dfrac{\sqrt{2}y}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; y = 2\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x,$

(iii) $\dfrac{2y}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; y = 2,$

(iv) $x = \sqrt{8}.$

b) Tangentenkriterium $a^2m^2 + b^2 = c^2$ mit $a^2 = 8$, $b^2 = 4$ und $m = 2$:

$$8 \cdot 4 + 4 = c^2 \;\Leftrightarrow\; c^2 = 36 \;\Leftrightarrow\; c = \pm 6.$$

Die Gleichungen der beiden Tangenten lauten: $y = 2x \pm 6$.

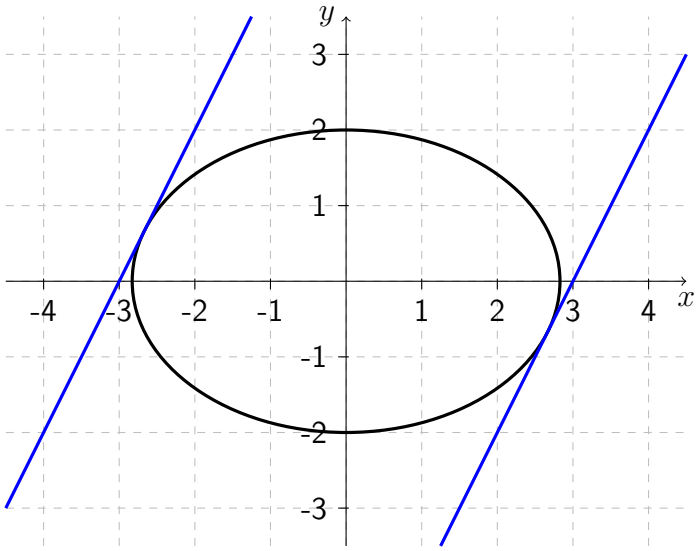
c) Aus dem Beweis:

$$m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}, \quad c = \frac{b^2}{y_0}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \pm 6 = \frac{4}{y_0} \quad &\Leftrightarrow \quad y_0 = \pm\frac{4}{6} = \pm\frac{2}{3} \\ 2 = -\frac{4x_0}{8 \cdot \left(\pm\frac{2}{3}\right)} \quad &\Leftrightarrow \quad x_0 = \mp\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Die Berührpunkte sind also $P(\frac{2}{3} \mid -\frac{8}{3})$ und $Q(-\frac{2}{3} \mid \frac{8}{3})$.



5.5 Anwendungen

Dauer: 15 min
Ziel: Anwendungen bei Reflexionen von Schallwellen kennenlernen. Konstruktion der Tangente an eine Ellipse wiederholen,
Material: Arbeitsblatt 4

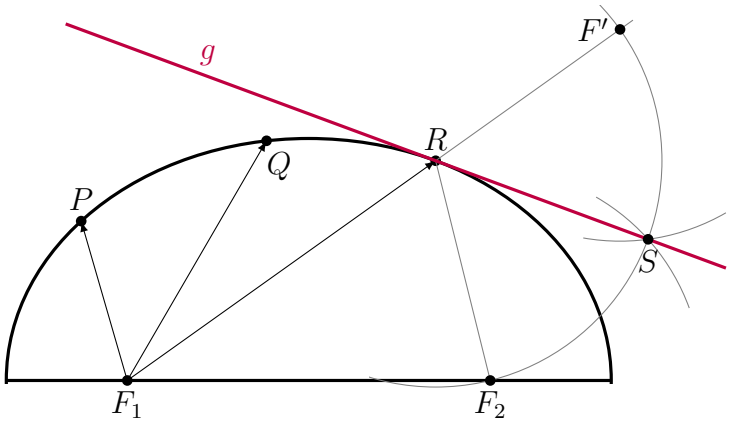
Aufgabe 5.6 (*Arbeitsblatt 6, Aufgabe 6*)

Werden Schallwellen an einer glatten ebenen Wand reflektiert, so gilt wie bei der Reflexion von Lichtstrahlen an einem ebenen Spiegel das Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel". Bei gekrümmten Wänden gilt für die Reflexion ebenfalls „Einfallswinkel = Ausfallswinkel", wobei hier die Winkel zur Tangente bzw. Tangentialebene gemeint sind. Wir untersuchen nun, wie Schallwellen an einem Gewölbe reflektiert werden, das beim senkrechten Durchschneiden eine Ellipse bildet. Ein solches Gewölbe befindet sich z.B. in der sizilianischen Kathedrale von Agrigent.

a) Wähle einen der Punkte P, Q, R. Konstruiere die Tangente an die Ellipse in diesem Punkt.

b) Konstruiere mit der von Dir gezeichneten Tangente den Verlauf der Schallwelle, die von F_1 zu dem von Dir gewählten Punkt verläuft und dann an der Ellipse reflektiert wird. Vergleiche mit dem Ergebnis Deines Nachbars.

Lösung: **a)** Konstruktion für die Tangente im Punkt R:

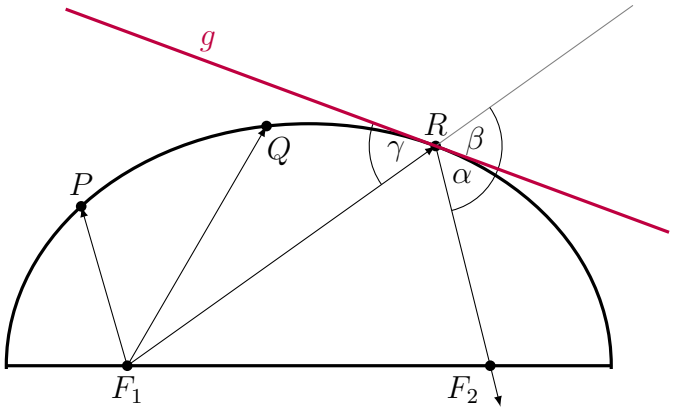


Kreis um R durch F_2 schneidet die Verlängerung der Strecke F_1R über R hinaus in F'.

Kreise mit demselben Radius um F' und um F_2 schneiden sich in S. (Der zweite Schnittpunkt wird nicht benötigt.)

Die Gerade durch R und S ist die gesuchte Tangente.

b)



Die reflektierte Schallwelle geht durch den Punkt F_2.

Beweis:

Die Tangente ist Winkelhalbierende: $\alpha = \beta$.

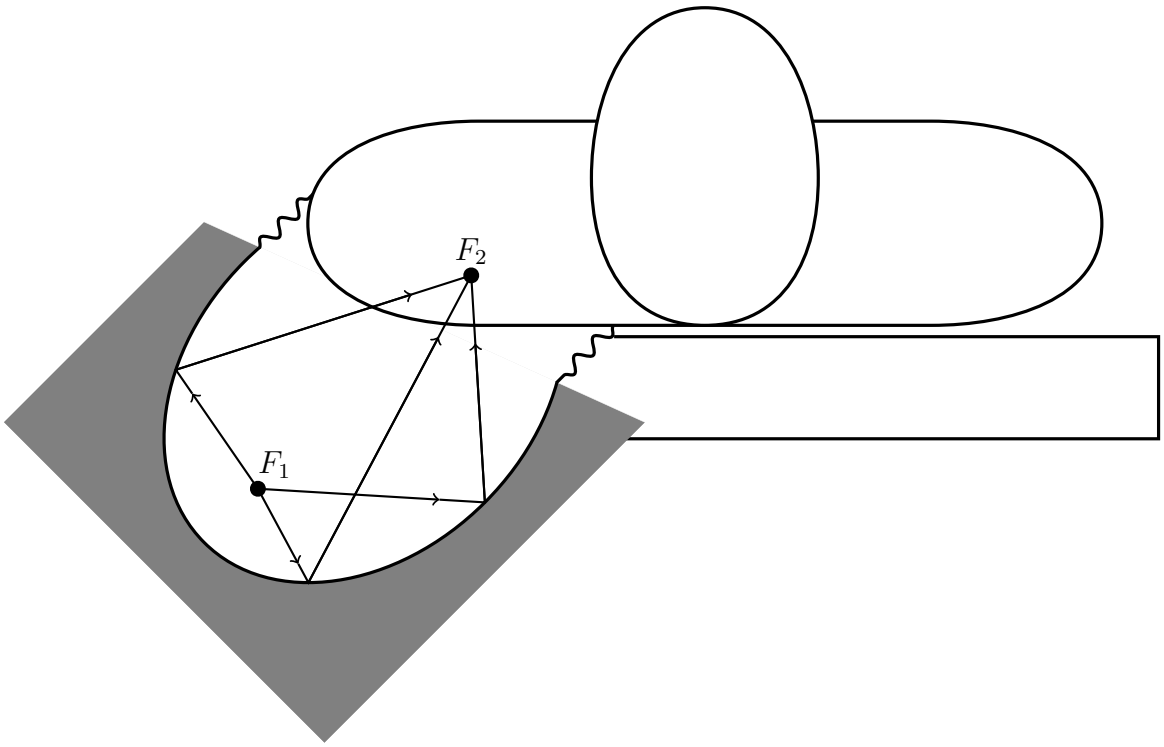
β und γ sind Scheitelwinkel, also gleich.

$\Rightarrow$ der reflektierte Strahl verläuft längs der Strecke RF_2.

Funktionsweise des Nierensteinzertrümmerers

Nierensteine können in ca. 90% der Fälle ohne Operation durch Stoßwellen zerkleinert werden, so dass sie nach der Zerkleinerung von alleine aus der Niere ausgespült werden.

Das Gerät besteht aus einem abgeschnittenen Ellipsoid, im Querschnitt aus einer abgeschnittenen Ellipse. Im Brennpunkt F_1 der Ellipse befindet sich ein Gerät zur Erzeugung von Stoßwellen (sehr starke Schallwellen). Das Gerät wird so am Patienten, der auf dem Rücken liegt, positioniert, dass sich der Nierenstein im Brennpunkt F_2 befindet. Das Innere des Ellipsoids ist mit Wasser gefüllt, das die Stoßwellen überträgt. Das Körpergewebe leitet die Stoßwellen ebenfalls gut weiter. Durch die Ellipsenform werden die Stoßwellen im Nierenstein konzentriert.



Aufgabe 5.7 (*Zusatzaufgabe 1*)

Gegeben sei eine Ellipse mit $2a = 10$ LE und den Brennpunkten $F_1(3 \mid 0)$ und $F_2(-3 \mid 0)$.

Hinweis: Ein Punkt P liegt genau dann auf der Ellipse, wenn $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ gilt.

a) Konstruiere die Ellipse, indem du dich an die Anleitung der Konstruktion von letzter Stunde erinnerst. (Konstruktion mit Zirkel und Geodreieck.)

(Hinweis: Konstruiere zunächst die Scheitelpunkte und wähle dir dann zwei Punkte auf der Ellipse, die du konstruieren willst. Spiegle die Punkte geeignet und zeichne die Ellipse ein.)

b) Stelle die Ellipsengleichung in der Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ auf.

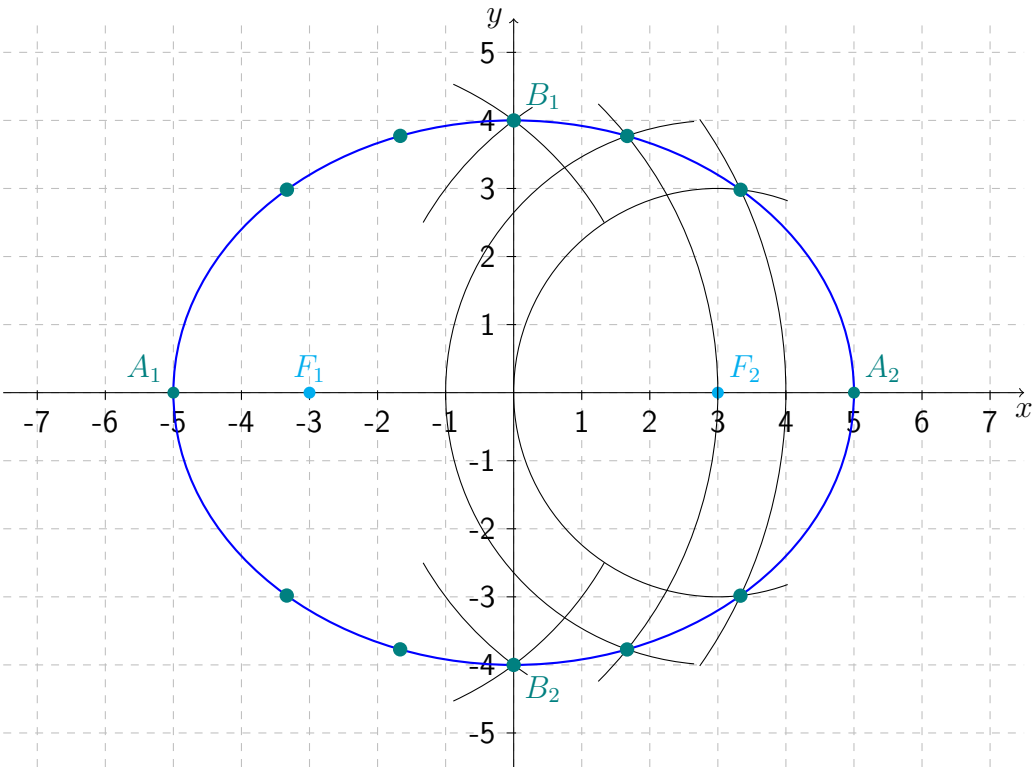
c) Prüfe, ob folgende Geraden Tangenten an die Ellipse sind:

(i) $g : y = 2x + 11$, (ii) $h : y = \frac{3}{5}x + 5$.

Hinweis: Berührbedingung.

d) **Zusatzaufgabe**: Berechne den Schnittpunkt der Ellipse mit den Tangenten aus Aufgabe c).

Lösung: **a)**



b) Es gilt $a = 5$, $e = 3$ und $b^2 = a^2 - e^2 = 16$. Die Ellipsengleichung lautet $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

c) Tangentenkriterium: Für die Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ muss $a^2m^2 + b^2 = c^2$ erfüllt sein.

(i) $m = 2$ und $c = 11$ eingesetzt: $25 \cdot 4 + 16 = 116 \neq 121 = 11^2$, also liegt keine Tangente vor.

(ii) $m = \frac{3}{5}$ und $c = 5$ eingesetzt: $25 \cdot \frac{9}{25} + 16 = 25 = c^2$, also liegt eine Tangente vor.

d) Aus dem Beweis des Tangentenkriteriums: $x = -\dfrac{a^2m}{c}$. Dies ergibt für die Tangente aus (ii):

$$x = -\frac{25 \cdot \frac{3}{5}}{5} = -3, \quad y = -\frac{3}{5} \cdot 3 + 5 = \frac{16}{5}.$$

Der Schnittpunkt ist $P(-3 \mid \frac{16}{5})$.

5.6 Schriftliche Aufgaben

Hier sind die Lösungen bereits in die entsprechenden Felder bzw. Graphiken eingetragen.

Aufgabe 5.8 (*Schriftliches Aufgabenblatt, Aufgabe 7*)

Wahr oder falsch?

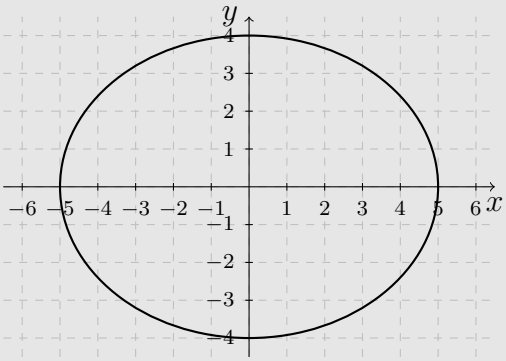
	w/f
Der Punkt einer Ellipse, der zum Brennpunkt F_1 den kleinsten Abstand hat, ist ein Nebenscheitel.	f
Der Punkt einer Ellipse, der zum Brennpunkt F_1 den kleinsten Abstand hat, ist ein Hauptscheitel.	w
Der Punkt einer Ellipse, der zum Brennpunkt F_1 den größten Abstand hat, ist ein Hauptscheitel.	w
Für jeden Punkt P einer Ellipse, der kein Hauptscheitel ist, ist die Tangente in P eine Winkelhalbierende der Geraden durch P und F_1 bzw. durch P und F_2.	w
In jedem der Hauptscheitel einer Ellipse ist die Tangente parallel zur Hauptachse.	f
In jedem der Nebenscheitel einer Ellipse ist die Tangente parallel zur Hauptachse.	w
Wenn eine Gerade $g : y = mx + c$ Tangente an eine Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, so gilt $a^2m^2 + b^2 = c^2$.	w

Aufgabe 5.9 (*Schriftliches Aufgabenblatt, Aufgabe 8*)

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

siehe Skizze.



a) Gib eine Gleichung für die Tangente an die Ellipse im Punkt $P(4 \mid \frac{12}{5})$ an. Die Gleichung muss nicht nach y aufgelöst werden.

Antwort: $\boxed{g : \frac{4x}{25} + \frac{12y}{80} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{20}{3} - \frac{16}{15}x}$

b) Prüfe, ob die jeweils angegebene Gerade Tangente an die Ellipse ist.

Geradengleichung	Tangente j/n	Geradengleichung	Tangente j/n
$g_3 : y = 4$	j	$g_4 : y = -5$	n
$g_1 : y = 2x + 11$	n	$g_2 : y = \frac{3}{5}x + 5$	j
$g_5 : x = 4$	n	$g_6 : x = -5$	j

Hinweis: Eventuell die Berührbedingung verwenden.

Aufgabe 5.10 (*Schriftliches Aufgabenblatt, Aufgabe 9*)

Gegeben ist die Ellipse k mit den Brennpunkten $F_1(-5 \mid 0)$, $F_2(5 \mid 0)$ und $a = 7$.

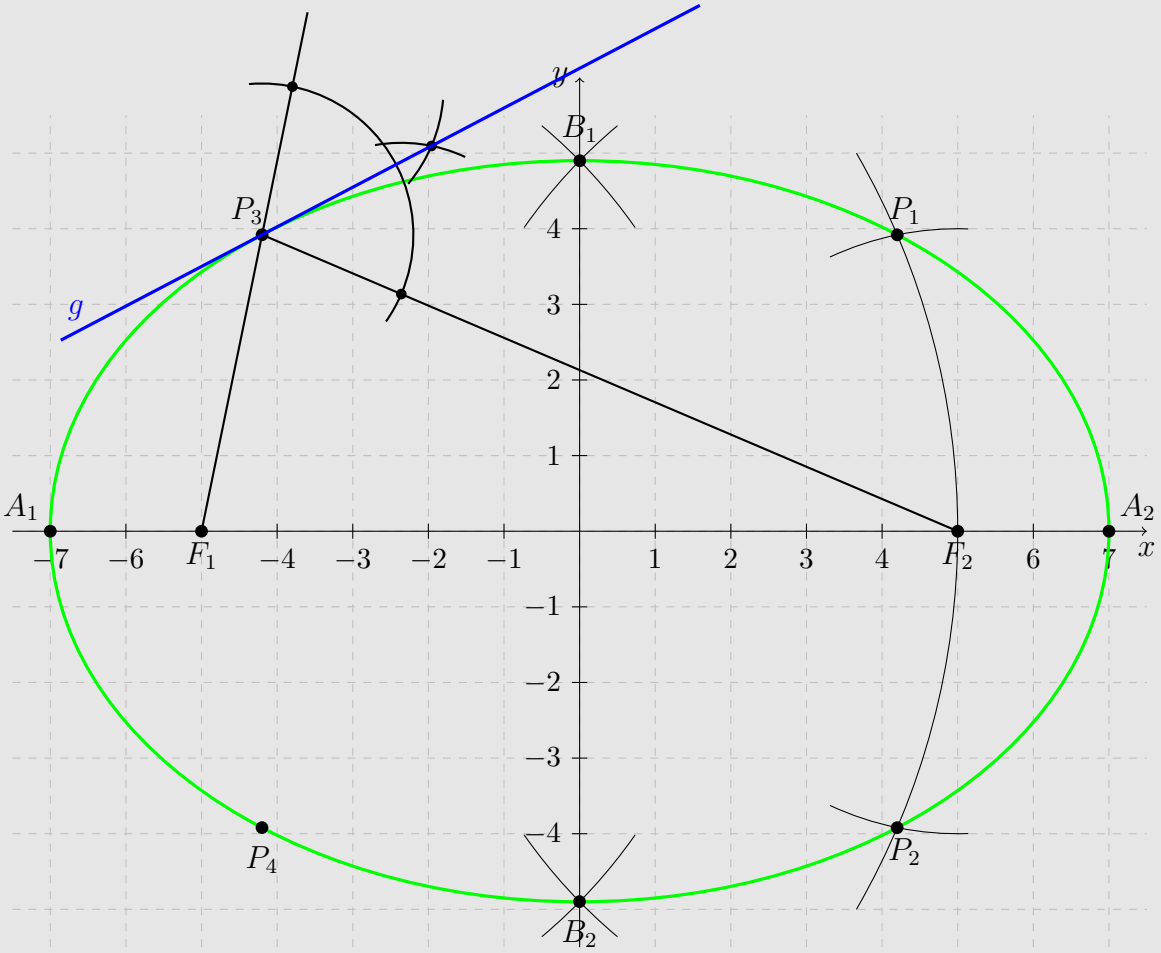
a) Konstruiere mit dem Zirkel die Nebenscheitel der Ellipse.

b) Konstruiere mit dem Zirkel die Punkte P_1, P_2 der Ellipse, die von F_1 den Abstand 10LE haben (LE = Längeneinheit).

c) Spiegle P_1, P_2 mit dem Geodreieck an der y-Achse, um zwei weitere Punkte P_3, P_4 der Ellipse zu erhalten.

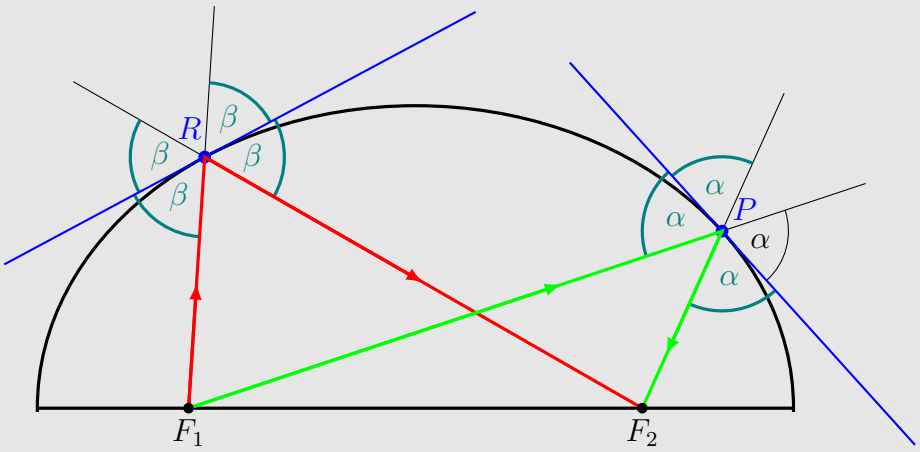
d) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangente g an die Ellipse in P_3. Zeichne g in blauer Farbe ein.

e) Zeichne die Hauptscheitel der Ellipse ein und skizziere die Ellipse k in grüner Farbe.



Aufgabe 5.11 (*Schriftliches Aufgabenblatt, Aufgabe 10*)

Werden Schallwellen an einer glatten ebenen Wand reflektiert, so gilt wie bei der Reflexion von Lichtstrahlen an einem ebenen Spiegel das Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“. Bei gekrümmten Wänden gilt für die Reflexion ebenfalls „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“, wobei hier die Winkel zur Tangente bzw. Tangentialebene gemeint sind. Wir untersuchen nun, wie Schallwellen an einem Gewölbe reflektiert werden, das beim senkrechten Durchschneiden eine Ellipse bildet. Ein solches Gewölbe wird als *Flüstergewölbe* bezeichnet.



In der Zeichnung sind die Tangenten in den Punkten P und R eingezeichnet.

a) Beim Punkt P ist ein Winkel α eingezeichnet. Trage bei den drei weiteren Winkeln, die gleich groß sind wie α, ebenfalls α ein.

b) Beim Punkt R sind vier der sechs Winkel gleich groß. Trage bei diesen Winkeln β ein.

c) Eine Schallwelle geht von F_1 aus und wird im Punkt P reflektiert. Trage den Verlauf der Schallwelle mit grüner Farbe ein. In welchem Punkt trifft sie auf die Hauptachse?
Antwort: Im Punkt $\boxed{F_1}$

d) Eine Schallwelle geht von F_1 aus und wird im Punkt R reflektiert. Trage den Verlauf der Schallwelle mit roter Farbe ein. In welchem Punkt trifft sie auf die Hauptachse?
Antwort: Im Punkt $\boxed{F_1}$

Damit ist der Name *Flüstergewölbe* erklärt: Eine Person, die in F_2 steht, kann das Flüstern einer anderen Person, die im Punkt F_1 steht, gut hören.

6 Unterrichtseinheit 6 - Hyperbel, Tangente an Hyperbel

6.1 Konzept

- Vorbereitung: Diskussion einer Hyperbelgleichung
- Geometrische Definition
- Bezeichnungen
- Gleichungsdarstellung ohne Beweis
- Tangente als Winkelhalbierende mit Aufgabe zur Reflexion

6.2 Einführung

Aufgabe 6.1 (*Arbeitsblatt 1, Aufgabe 1*)

Gegeben ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1. \qquad (*)$$

Wir betrachten die Menge k aller Punkte $P(x \mid y)$, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen.

a) Was unterscheidet diese Gleichung von einer Ellipsengleichung?

b) Bestimme die x-Koordinate aller Punkte aus k, für die $y = 0$ gilt. Zeichne die Punkte ins Koordinatensystem ein.

c) Bestimme die x-Koordinate aller Punkte, für die $y = \frac{9}{4}$ oder $y = -\frac{9}{4}$ gilt. Zeichne die Punkte ins Koordinatensystem ein.

d) Gibt es Punkte in k mit der x-Koordinate $x = 0$?

e) In welchen Intervallen muss x liegen, damit die Gleichung $(*)$ mindestens eine Lösung y besitzt?

f) Wenn ein Punkt $P(x \mid y)$ in k liegt, dann liegt auch der Punkt $P(-x \mid y)$ in k. Welche Symmetrie der Menge k wird dadurch beschrieben?

g) Wenn ein Punkt $P(x \mid y)$ in k liegt, dann liegt auch der Punkt $P(x \mid -y)$ in k. Welche Symmetrie der Menge k wird dadurch beschrieben?

h) Die Gleichung $(*)$ kann umgeformt werden zu

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{9}{16} - \frac{9}{x^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{9}{16} - \frac{9}{x^2}}.$$

Für große Werte von x^2 gilt dann $\frac{y}{x} \approx \pm\frac{3}{4}$. Zeichne die beiden Geraden $g_1 : y = \frac{3}{4}x$ und $y = -\frac{3}{4}x$ ins Koordinatensystem ein.

i) Skizziere die Menge k. Beachte hierbei, dass alle Punkte von k mit positiven x-Werten unterhalb von g_1 und oberhalb von g_2 liegen. Benütze die Symmetrieeigenschaften aus **f)** und **g)**.

Lösung: **a)** Das Minuszeichen vor dem y^2-Term.

b) $y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 4$.
Die Koordinaten der Punkte $P_1(-4 \mid 0)$ und $P_2(4 \mid 0)$ erfüllen die Gleichung $(*)$.

c) $y = \pm\frac{9}{4} \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{16} - \frac{81}{9\cdot 16} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{16} - \frac{9}{16} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 9 = 16 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 25 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 5$
Die Koordinaten der Punkte $(\pm 5 \mid \frac{9}{4})$ erfüllen die Gleichung $(*)$.

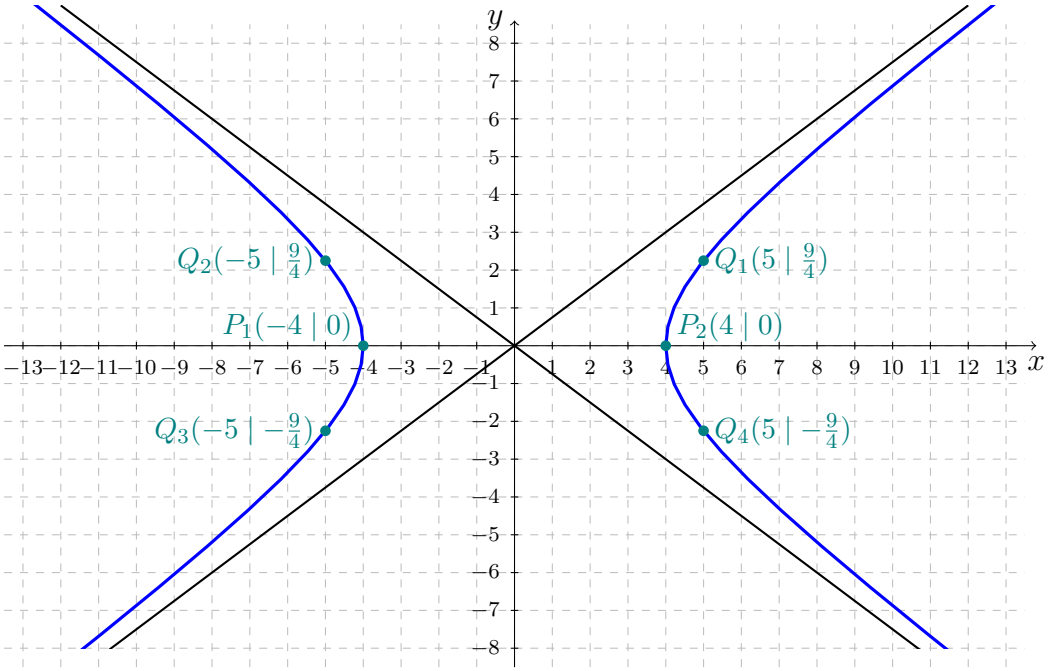
d) $x = 0$ ist nicht möglich, denn dann müsst $y^2 = -9$ gelten.

e) Damit $(*)$ lösbar ist, muss $x^2 \geq 16$ gelten. D.h. genau für $x \leq 4$ oder $x \geq 4$ besitzt $(*)$ mindestens eine Lösung y.

f) Achsensymmetrie zur y-Achse.

g) Achsensymmetrie zur x-Achse.

h) und **i)**



Mündlich: Die Menge k nennt man Hyperbel, die beiden Geraden g_1 und g_2 nennt man Asymptoten, denn die Punkte der Hyperbel kommen den Geraden beliebig nahe, und die Hyperbel schneidet die Geraden nicht.

6.3 Definition von Hyperbeln

Dauer: 20 min
Ziel: Geometrische Definition von Hyperbeln kennen
Material: Tafel, AB3 und OH-Folie Lösungsbesprechung Hyperbelkonstruktion

Tafelanschrieb

6. Hyperbeln

Definition: Eine Hyperbel ist gegeben durch zwei Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > 0$ mit $2a < \overline{F_1F_2}$. Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte P der Ebene, für die

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| \;=\; 2a$$

gilt.

Aufgabe 6.2 (*Arbeitsblatt 2, Aufgabe 2*)

Gegeben ist die Hyperbel mit $F_1(-4 \mid 0)$, $F_2(4 \mid 0)$ und $a = 2$. Konstruiere jeweils mit dem Zirkel alle Punkte der Hyperbel, die die angegebene Bedingung erfüllen:

a) P mit $\overline{PF_1} = 2$. (Wie groß muss $\overline{PF_2}$ sein?)

b) P' mit $\overline{P'F_2} = 2$.

c) Q, Q' mit $\overline{QF_1} = 4$ bzw. $\overline{Q'F_2} = 4$.

d) R, R' mit $\overline{RF_1} = 6$ und $\overline{RF_2} = 10$ bzw. $\overline{R'F_1} = 10$ und $\overline{R'F_2} = 6$.

e) Gegeben ist der Punkt $S(4 \mid 6)$. Berechne $\overline{SF_1}$ und $\overline{SF_2}$. Zeige, dass S auf der Hyperbel liegt, d.h. dass die Eigenschaft $\left|\overline{SF_1} - \overline{SF_2}\right| = 4$ erfüllt ist.

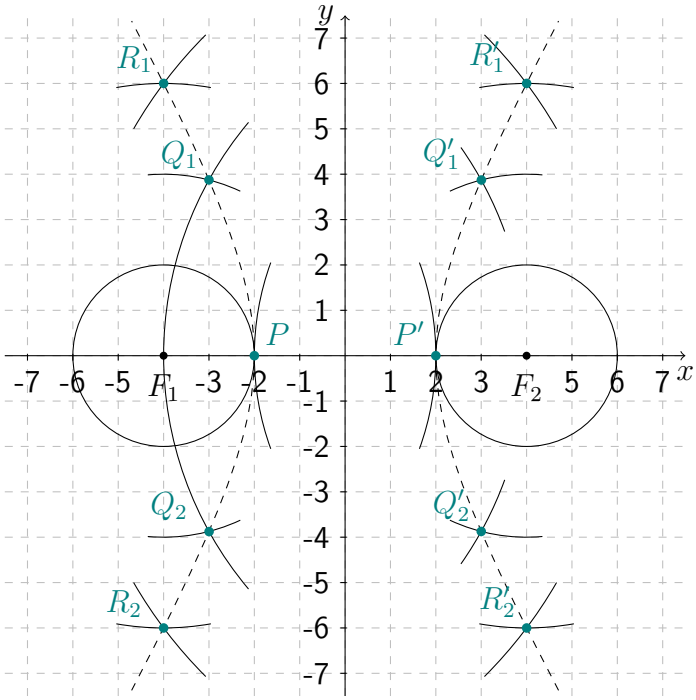
Lösung: **a)** Es muss gelten: $\left|2 - \overline{PF_2}\right| = 4$. Daraus folgt $\overline{PF_2} = 6$.

b) Nun muss $\overline{P'F_1} = 6$ gelten.

c) Die Bedingung $\left|4 - \overline{QF_2}\right| = 4$ liefert $\overline{QF_2} = 0$ oder $\overline{QF_2} = 8$. Die erste Möglichkeit passt nicht mit $\overline{F_1F_2} = 8$ zusammen, also bleibt die zweite Möglichkeit.

Für Q' gilt entsprechend $\overline{Q'F_1} = 8$.

d) Hier stehen alle Angaben in der Aufgabenstellung. Konstruktion siehe unten.



e) Es gilt

$$\begin{aligned} \overline{SF_1}^2 &= \left(4 - (-4)\right)^2 + (6-0)^2 \\ &= 64 + 36 = 10^2 \\ \overline{SF_2}^2 &= \left(4 - 4\right)^2 + (6-0)^2 \\ &= 6^2 \end{aligned}$$

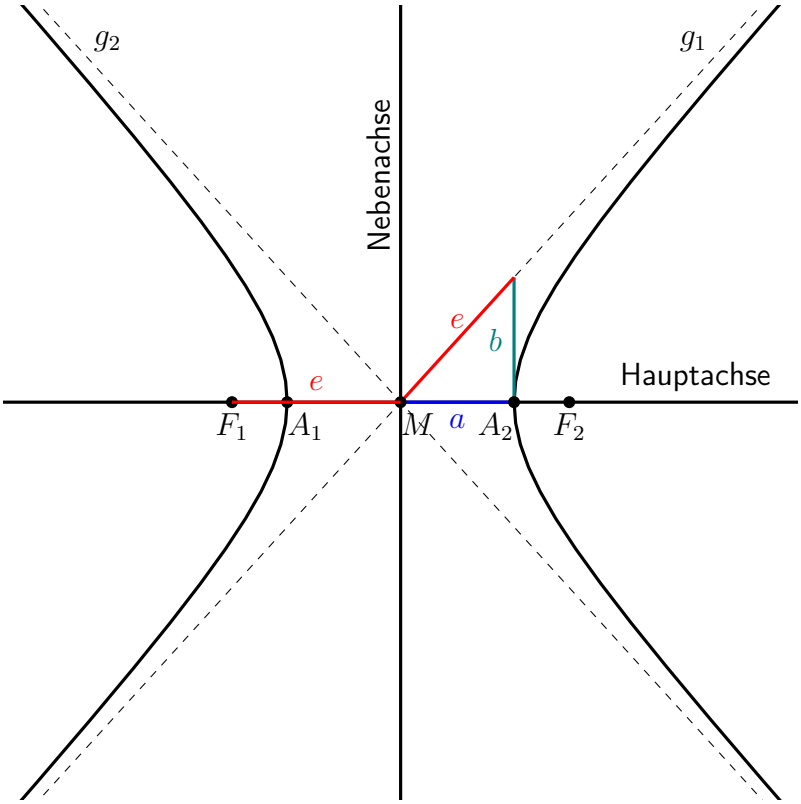
$\Rightarrow \overline{SF_1} - \overline{SF_2} = 6 - 10 = -4$. Also ist $\left|\overline{SF_1} - \overline{SF_2}\right| = 4$ erfüllt.

6.4 Bezeichnungen bei Hyperbeln

Dauer: 5 min
Ziel: Bezeichnungen bei Hyperbeln kennen
Material: AB3 und OH-Folie Bezeichnungen bei Hyperbeln

Vorgehen: L. trägt die Längen und Bezeichnungen auf der Folie ein, SuS schreiben auf AB3 mit

Aufgabe 6.3 (*OH-Folie / Arbeitsblatt 3: Bezeichnungen bei Hyperbeln*)



Ein Punkt liegt genau dann auf der Hyperbel, wenn $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$.

F_1, F_2:	Brennpunkte	$e :=$	$\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$
A_1, A_2:	Scheitel	$\overline{A_1A_2} =$	$2a$
M:	Mittelpunkt	$\overline{MF_1} =$	e
		$\overline{MA_1} =$	a

Gerade durch F_1, F_2: Hauptachse

Gerade durch M senkrecht zu F_1, F_2: Nebenachse

g_1, g_2: Asymptoten $\quad b := \sqrt{e^2 - a^2}$

Mündlich: Warum liegen A_1, A_2 auf der Hyperbel?

6.5 Die Hyperbelgleichung

Tafelanschrieb

Satz: Für gegebene feste Zahlen $a, b > 0$ sei $e := \sqrt{a^2 + b^2}$ Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschreibt eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$. D.h. genau dann, wenn die Koordinaten eines Punktes $P(x \mid y)$ die Gleichung erfüllen, gilt

$$\left|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}\right| = 2a.$$

Beweis: Siehe Arbeitsblatt 4.

Vorgehen: Der Beweis des Satzes wurde nicht besprochen. Er funktioniert genau so wie bei der Ellipsengleichung. Für interessierte SuS steht er auf dem Arbeitsblatt 4.

Beweis auf zweiter Seite von AB4

Satz: Jeder Punkt, dessen Koordinaten die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllen, liegt auf der Hyperbel, deren Punkte die Bedingung

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| \;=\; 2a$$

mit $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$, $e = \sqrt{a^2+b^2}$ erfüllen.

Beweis: Sei $P(x \mid y)$ mit $x > 0$ und $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Beweise als Erstes, dass

$$\overline{PF_1} \;=\; \frac{e}{a}x + a \qquad (*)$$

gilt.

Löse zunächst die Koordinatengleichung nach y^2 auf:

$$y^2 \;=\; \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\overline{PF_1}^2 &= (x+e)^2 + y^2 \\
&= x^2 + 2ex + e^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 \\
&= \frac{x^2}{a^2}(\underbrace{a^2+b^2}_{=e^2}) + 2ex + \underbrace{e^2-b^2}_{=a^2} \\
&= \left(\frac{xe}{a} + a\right)^2.
\end{aligned}$$

Dies beweist $(*)$. Genauso folgt

$$\overline{PF_2} \;=\; \left|\frac{e}{a}x - a\right| \;=\; \frac{e}{a}x - a. \qquad (**)$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt nun $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$.

Für $x < 0$ gelten $(*)$ und $(**)$ entsprechend, es müssen nur die rechten Seiten mit (-1) multipliziert werden. □

Aufgabe 6.4 (*Arbeitsblatt 4, Aufgabe 3*)

Berechne in jeder Teilaufgabe die Größen a, b, e für die gegebene Hyperbel. Zeichne jeweils die Brennpunkte, die Scheitel, die Asymptoten und die Hyperbel ein ($\sqrt{11} \approx 3{,}3$, $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

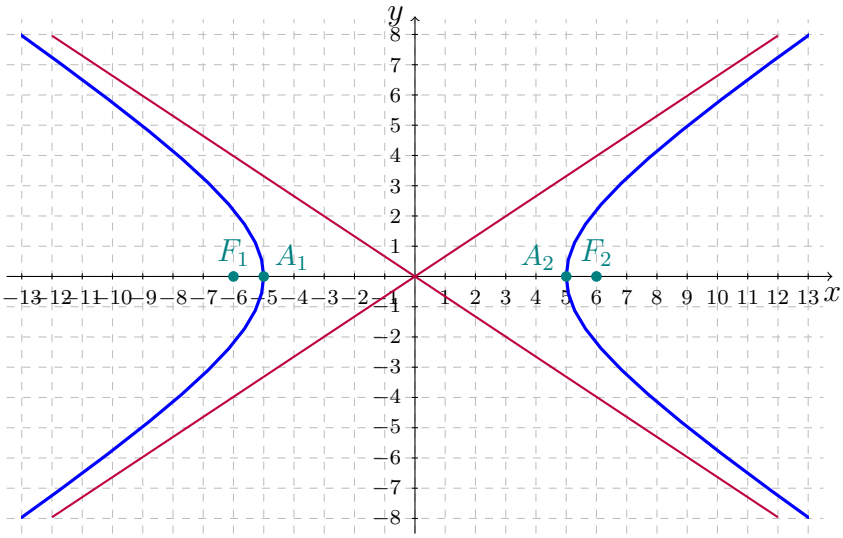
a) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

c) $x^2 - y^2 = 1.$

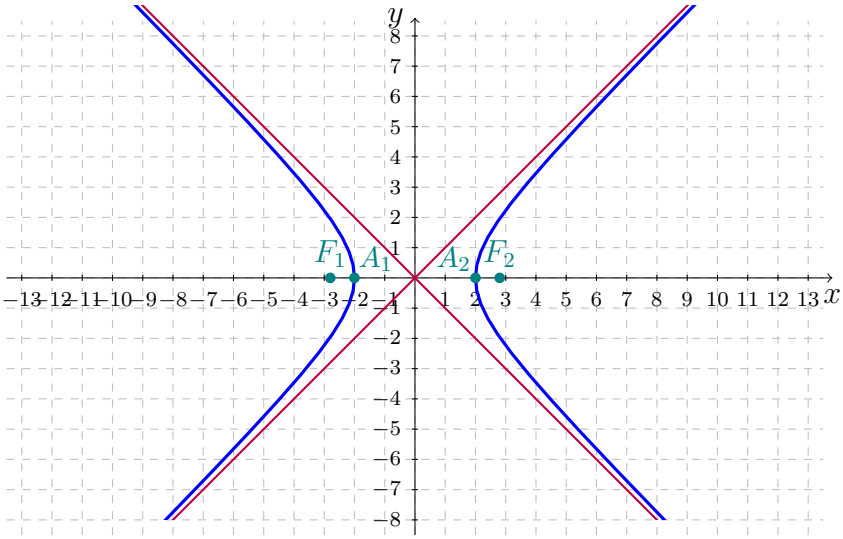
Lösung: **a)**

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ b &= \sqrt{11} \\ e &= 6 \end{aligned}$$



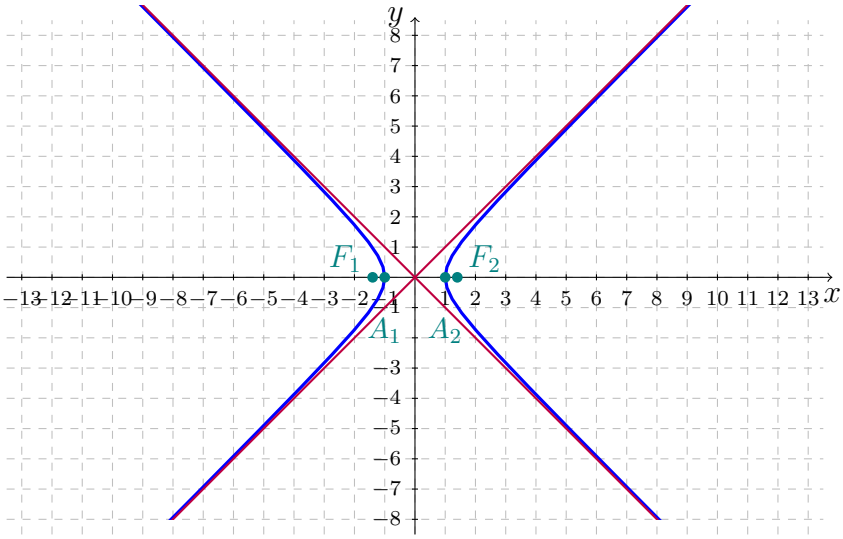
b)

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 2 \\ e &= 2\sqrt{2} \approx 2,8 \end{aligned}$$



c)

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \\ e &= \sqrt{2} \approx 1,4 \end{aligned}$$



6.6 Tangente an Hyperbel

Dauer: 15 min
Ziel: Konstruktion einer Tangente an eine Hyperbel verstehen.
Material: Arbeitsblatt 5, Arbeitsblatt 5 als OH-Folie 3.

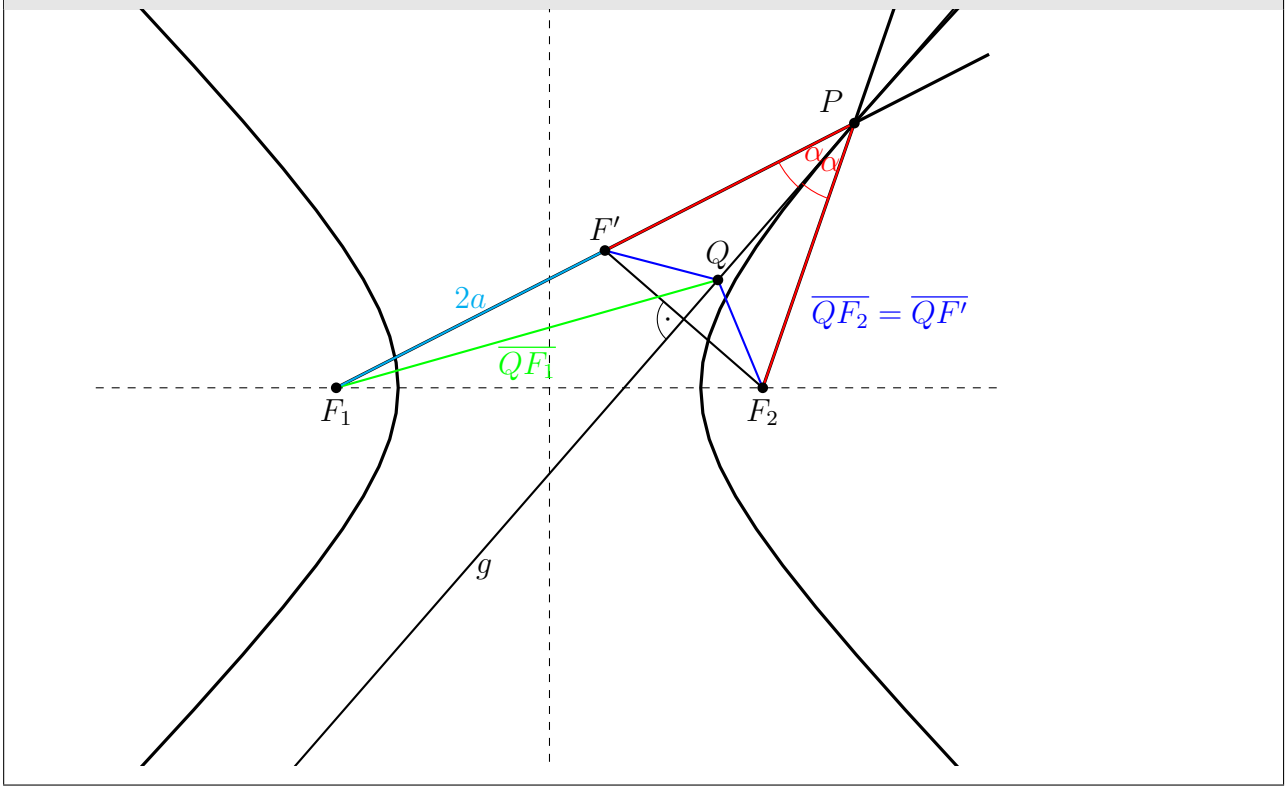
Leitfrage
Was kennzeichnet eine Tangente?
- *Sie hat genau einen Punkt mit der Hyperbel gemeinsam.*

Vorgehen: L. vervollständigt Skizze auf OH-Folie, SuS schreiben auf AB mit.

Tafelanschrieb

Satz: Es sei P ein Punkt auf einer Hyperbel und g die Winkelhalbierende der Strecken PF_1 und PF_2. Dann ist g die Tangente an die Hyperbel in P.

Arbeitsblatt 5 als OH-Folie



Tafelanschrieb

Beweis: Spiegelung von F_2 an g ergibt F' auf F_1P $\Rightarrow$ $\overline{PF_2} = \overline{PF'}$.

$\Rightarrow$ $\overline{F_1F'} = \overline{F_1P} - \overline{PF'} = \overline{F_1P} - \overline{PF_2} = 2a$ (da P auf Hyperbel).

Zeige: Für jeden Punkt Q auf g mit $Q \neq P$ gilt $\left|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}\right| \neq 2a$. Dann liegt Q nicht auf der Hyperbel.

Q liegt auf g $\Leftrightarrow$ $\overline{QF_2} = \overline{QF'}$ (denn g ist Mittelenkrechte zu F_2F').

Außerdem $\overline{QF_1} < \overline{QF'} + 2a \;\Rightarrow\; \overline{QF_1} - \overline{QF'} < 2a$
$2a + \overline{QF_1} > \overline{QF'} \;\Rightarrow\; \overline{QF_1} - \overline{QF'} > -2a$

$\Rightarrow$ $-2a < \overline{QF_1} - \overline{QF_2} = \overline{QF_1} - \overline{QF'} < 2a$.

$\Rightarrow$ Jeder Punkt Q auf g mit $Q \neq P$ liegt nicht auf der Hyperbel.

$\Rightarrow$ g ist Tangente an die Hyperbel. $\square$

6.7 Reflexion an hyperbelförmigen Spiegeln

Dauer: 25 min
Ziel: Konstruktion von Strahlen, die an Hyperbeln reflektiert werden.
Material: Arbeitsblatt 6, OH-Folie 4

Vorgehen: Bearbeitung der Aufgabe in Einzel/Partnerarbeit. Besprechung an OH-Folie durch Schülerin oder Schüler.

Aufgabe 6.5 (*Arbeitsblatt 6, Aufgabe 4*)

Werden Lichtwellen an einem ebenen Spiegel reflektiert, so gilt das Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel". Bei gekrümmten Spiegeln gilt für die Reflexion ebenfalls „Einfallswinkel = Ausfallswinkel", wobei hier die Winkel zur Tangente bzw. Tangentialebene gemeint sind. In dieser Aufgabe wird untersucht, wie Lichtwellen an hyperbelförmig gekrümmten Spiegeln reflektiert werden. Gegeben ist ein Hohlspiegel mit hyperbelförmiger Krümmung (siehe Zeichnung).

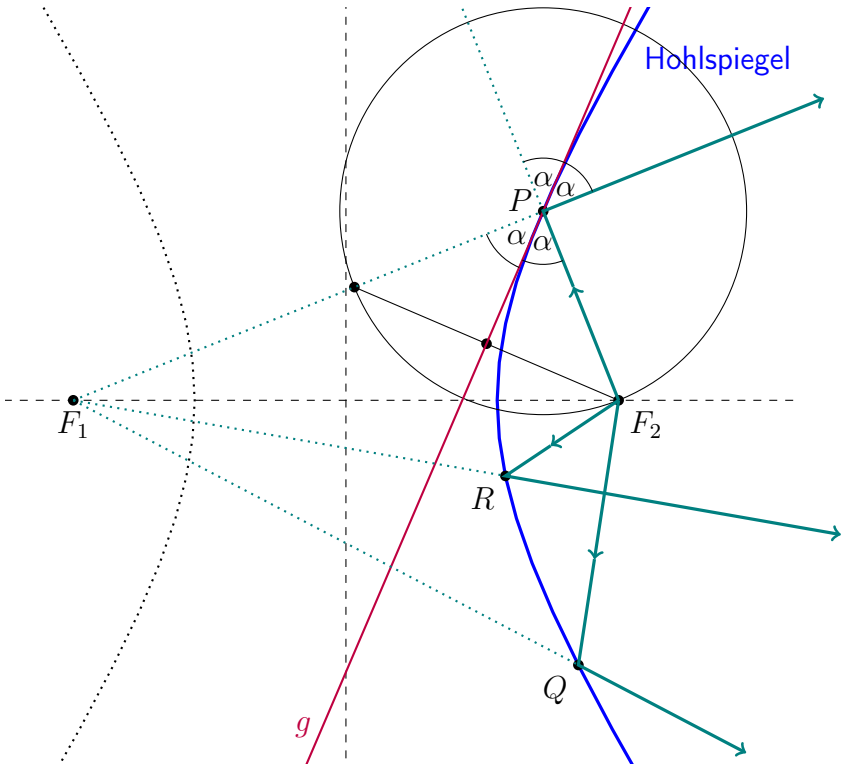
a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangente g an die Hyperbel im Punkt P.

b) Zeichne die vier gleichen Winkel α ein, die die Tangente und die Geraden durch P und F_1 bzw. durch P und F_2 einschließen.

c) Zeichne den Verlauf eines Lichtstrahls, der von einer Lichquelle im Brennpunkt F_2 ausgeht und im Punkt P von der konstruierten Tangente g reflektiert wird.

d) Zeichne zwei weitere Punkte Q, R auf der Hyperbel unterhalb der waagrechten Symmetrieachse ein und zeichne den Verlauf der Lichstrahlen, die von F_2 ausgehen und in Q bzw. R reflektiert werden.

Lösung:



Aufgabe 6.6 (*Arbeitsblatt 6, Aufgabe 5*)

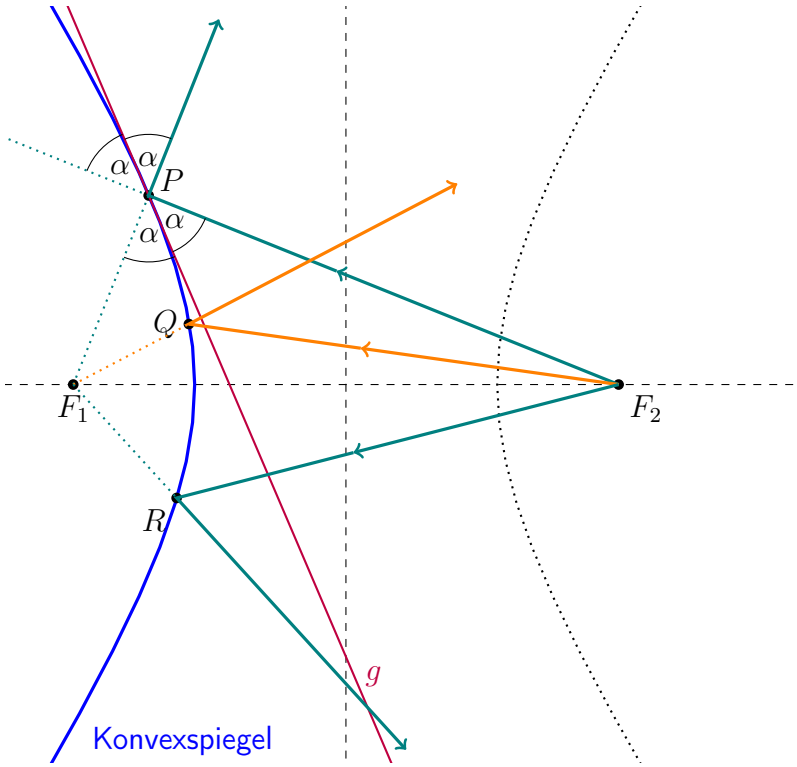
Nun ist ein Konvexspiegel mit hyperbelförmiger Krümmung gegeben (siehe Graphik).

a) Zeichne die Geraden durch P und F_1 bzw. durch P und F_2 und die vier gleichen Winkel α ein, die die Tangente und diese Geraden einschließen.

b) Zeichne den Verlauf eines Lichtstrahls, der von einer Lichquelle im Brennpunkt F_2 ausgeht und im Punkt P von der eingezeichneten Tangente g reflektiert wird.

c) Zeichne zwei weitere Punkte Q, R auf der Hyperbel ein, die nicht auf der Hauptachse der Hyperbel liegen, und zeichne den Verlauf der Lichstrahlen, die von F_2 ausgehen und in Q bzw. R reflektiert werden.

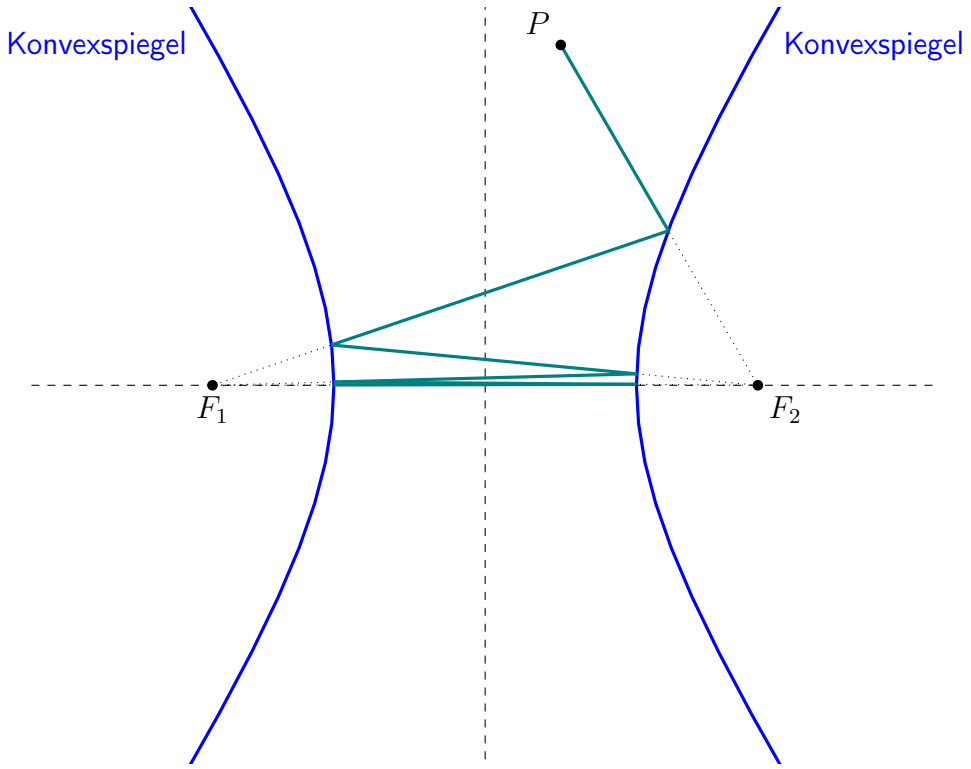
Lösung:



Aufgabe 6.7 (*Arbeitsblatt 6, Aufgabe 6*)

Gegeben sind zwei Konvexspiegel mit hyperbelförmiger Krümmung (siehe Skizze). Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der von P aus in Richtung F_2 verläuft und dann mehrfach an beiden Spiegeln reflektiert wird.

Lösung:



6.8 Schriftliche Aufgaben

Hier sind die Lösungen bereits in die entsprechenden Felder bzw. Graphiken eingetragen.

Aufgabe 6.8 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 7*)

a) Eine Hyperbel ist durch zwei Punkte F_1, F_2 und eine Länge $a < \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ gegeben. Vervollständige die Sätze.

Die Punkte F_1 und F_2 werden als Brennpunkte bezeichnet.

Mit A_1 und A_2 werden die Scheitel bezeichnet.

Für jeden Punkt P der Hyperbel gilt $\left|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}\right| = 2a$

Die Gerade durch F_1 und F_2 heißt Hauptachse.

b) Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$. Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte und der Scheitel sowie die Gleichungen der Asymptoten.

$F_1(-13 \mid 0)$	$F_2(13 \mid 0)$	$A_1(-12 \mid 0)$	$A_2(12 \mid 0)$
$g_1 : y = \frac{5}{12}x$		$g_2 : y = -\frac{5}{12}x$	

Aufgabe 6.9 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 8*)

Wahr oder falsch?

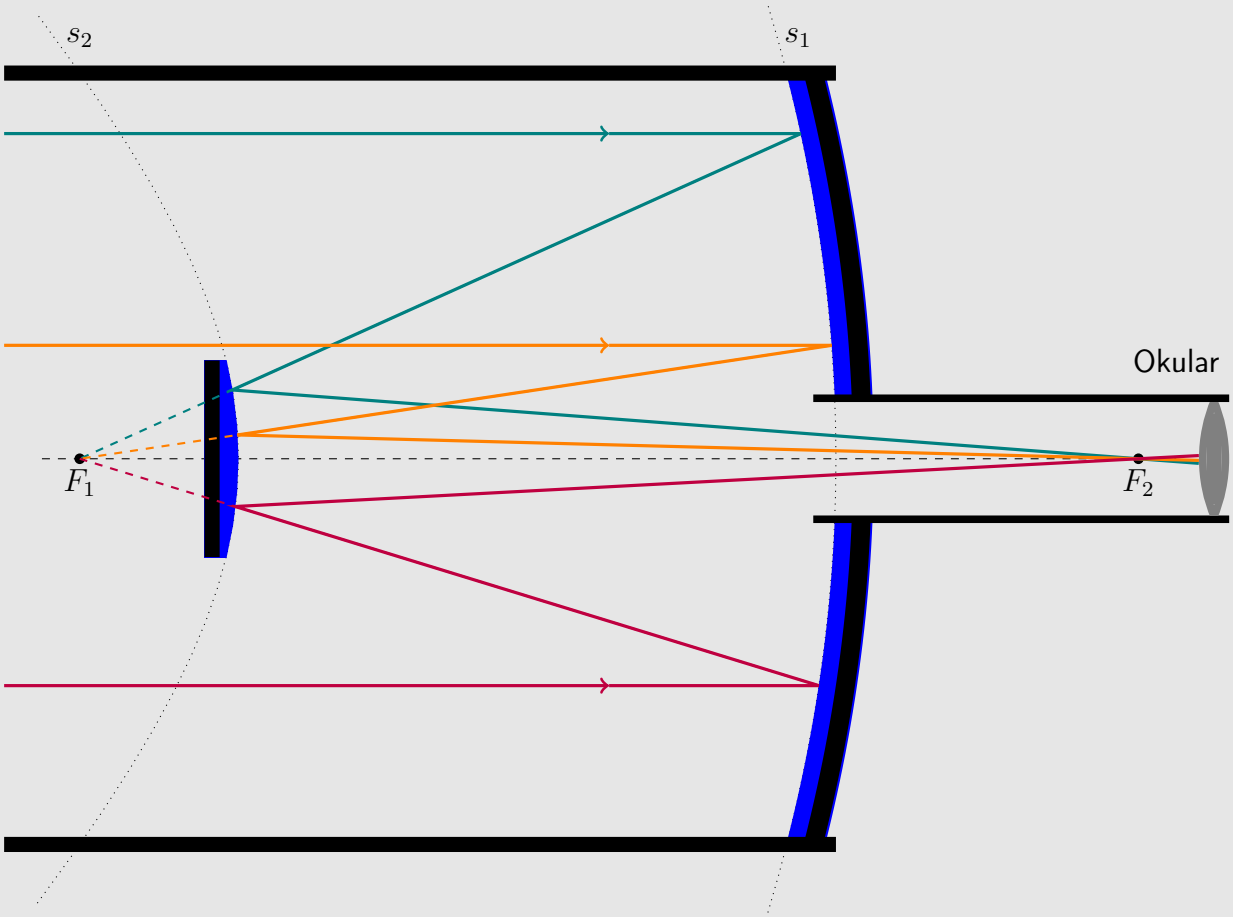
	w/f
Für alle Punkte P einer Hyperbel hat die Differenz $\overline{F_1P} - \overline{F_2P}$ den selben Wert.	f
Eine Asymptote einer Hyperbel ist eine Gerade, der die Hyperbelpunkte beliebig nahe kommen.	w
Der Punkt einer Hyperbel, der zum Brennpunkt F_1 den kleinsten Abstand hat, ist ein Scheitel.	w
Jede Hyperbel ist punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt.	w
Die Brennpunkte einer Hyperbel haben vom Mittelpunkt M immer einen größeren Abstand als die Scheitel .	w
Seien $a, b > 0$. Die Asymptoten zu einer Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ besitzen die Steigung $m = \frac{a}{b}$ oder $m = -\frac{a}{b}$.	f
In jedem Scheitel einer Hyperbel ist die Tangente parallel zur Nebenachse.	w
Sei eine Hyperbel durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben. Im Fall $a > b > 0$ ist die x-Achse die Hauptachse, im Fall $b > a > 0$ ist die y-Achse die Hauptachse.	f

Aufgabe 6.10 (*Schriftliches Arbeitsblatt, Aufgabe 9*)

Im Cassegrain-Teleskop werden die (von links parallel einfallenden) Lichtstrahlen zuerst von einem parabelförmig gekrümmten Hohlspiegel s_1 (mit Loch in der Mitte) und danach von einem hyperbelförmig gekrümmten Konvexspiegel s_2 reflektiert Die Spiegel sind so angeordnet, dass die Symmetrieachse von Parabel und Hyperbel übereinstimmen und auch der Brennpunkt der Parabel und der Brennpunkt F_1 der Hyperbel zusammenfallen. Zeichne den Strahlengang für die drei Lichtstrahlen bis zur Linse des Okulars ein.

Hinweis: Im Bild sind die gemeinsame Symmetrieachse der Parabel und der Hyperbel (gestrichelt), die Brennpunkte F_1, F_2 der Hyperbel und die Parabel s_1 und Hyperbel s_2 (gepunktet) eingezeichnet.

Lösung:



6.9 Zusatzaufgaben

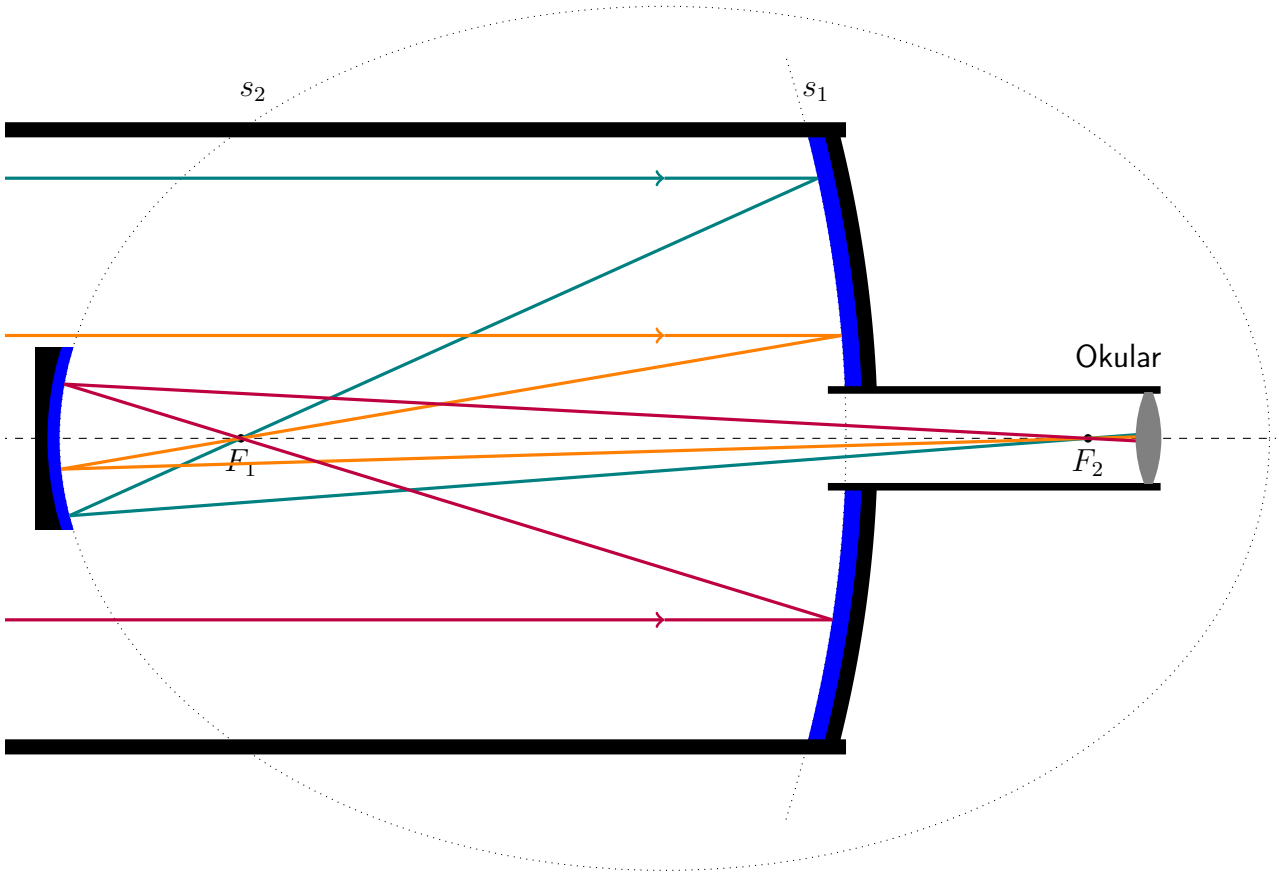
Aufgabe 6.11 (*Zusatzaufgabe 1*)

Im Gregory-Teleskop werden die (von links parallel einfallenden) Lichtstrahlen zuerst von einem parabelförmig gekrümmten Hohlspiegel s_1 (mit Loch in der Mitte) und danach von einem ellipsenförmig gekrümmten Konvexspiegel s_2 reflektiert Die Spiegel sind so angeordnet, dass die Symmetrieachse von Parabel und Ellipse übereinstimmen und auch der Brennpunkt der Parabel und der Brennpunkt F_1 der Ellipse zusammenfallen. Zeichne den Strahlengang für die drei Lichtstrahlen bis zur Linse des Okulars ein.

Überlege, welche Unterschiede zwischen Gregory-Teleskop und Cassegrain-Teleskop bestehen. Was könnten Vor- oder Nachteile sein?

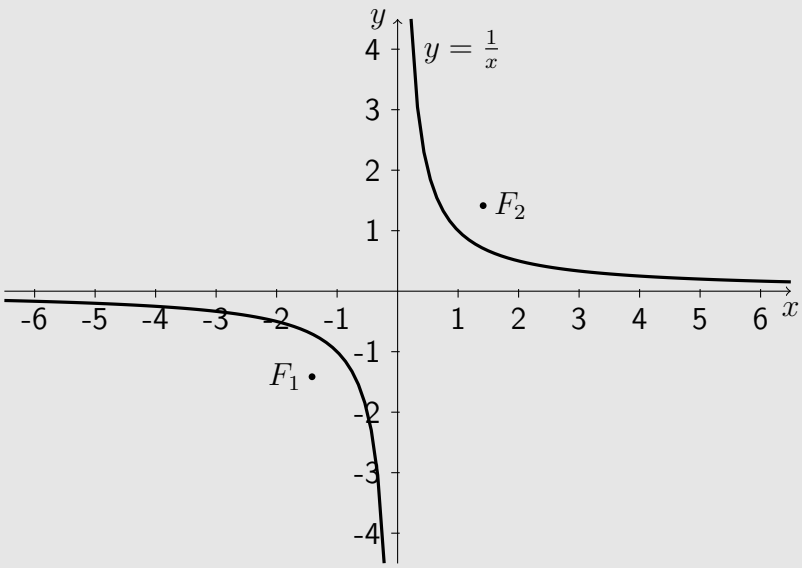
Hinweis: Im Bild sind die gemeinsame Symmetrieachse der Parabel und der Hyperbel (gestrichelt), die Brennpunkte F_1, F_2 der Hyperbel und die Parabel s_1 und Hyperbel s_2 (gepunktet) eingezeichnet.

Lösung: Ein Hauptunterschied zwischen Gregory- und Cassegrain-Teleskop besteht darin, dass der Brennpunkt des kleinen Spiegels beim Cassegrain-Teleskop außerhalb des Teleskops liegen kann, während er beim Gregory-Teleskop innerhalb des Teleskops liegt. Dadurch wird das letztere bei gleicher Vergrößerung länger sein.



Aufgabe 6.12 (*Zusatzaufgabe 2*)

Gegeben sind die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und die Punkte $F_1(-\sqrt{2} \mid -\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2} \mid \sqrt{2})$ (siehe Zeichnung).



a) Multipliziere aus: $\left(x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2$.

b) Sei $x > 0$ und $P(x, \frac{1}{x})$ ein Punkt auf dem Graphen von f. Berechne das Quadrat des Abstandes von P zu F_2. Vergleiche $\overline{PF_2}^2$ mit dem Ergebnis aus a) und gib $\overline{PF_2}$ ohne Verwendung der Wurzelfunktion an.

c) Sei wieder $x > 0$ und $P(x, \frac{1}{x})$ ein Punkt auf dem Graphen von f. Stelle $\overline{PF_1}^2$ als vollständiges Quadrat dar.

d) Berechne $\overline{PF_2} - \overline{PF_1}$.

Lösung: **a)**

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 2x\frac{1}{x} - 2x\sqrt{2} - 2\frac{1}{x}\sqrt{2} \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 - 2x\sqrt{2} - 2\frac{1}{x}\sqrt{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\overline{PF_2}^2 &= (x - \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 &&= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{2}}{x} + 2 \\ &= x^2 - 2\sqrt{2}x + \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{2}}{x} + 4 &&= \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_2} = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$$

c) Vorüberlegung: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

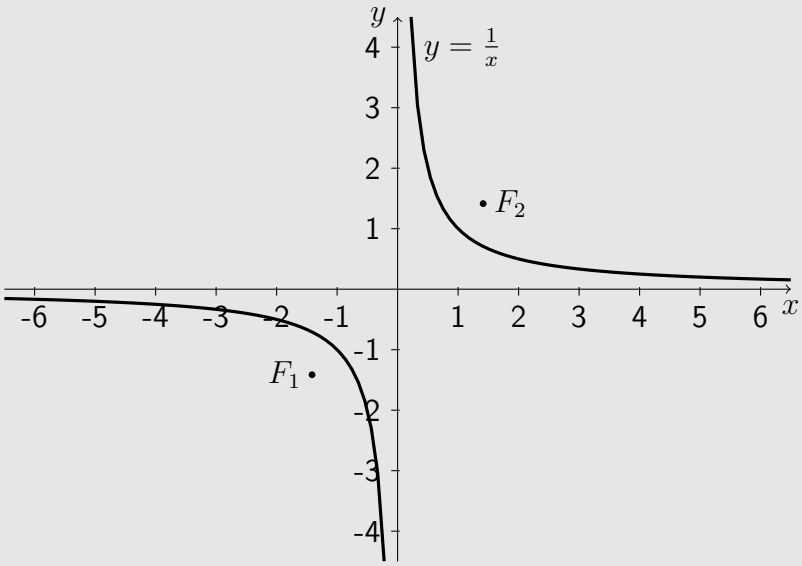
$$\begin{aligned}\overline{PF_1}^2 &= (x + \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 &&= x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2\sqrt{2}}{x} + 2 \\ &= \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_1} = x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}$$

d) $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2\sqrt{2}$

Aufgabe 6.13 (*Zusatzaufgabe 3*)

Gegeben sind die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ und die Punkte $F_1(-\sqrt{2} \mid -\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2} \mid \sqrt{2})$ (siehe Zeichnung).



a) Multipliziere aus: $\left(x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2$.

b) Sei $x > 0$ und $P(x, \frac{1}{x})$ ein Punkt auf dem Graphen von f. Berechne das Quadrat des Abstandes von P zu F_2. Vergleiche $\overline{PF_2}^2$ mit dem Ergebnis aus a) und gib $\overline{PF_2}$ ohne Verwendung der Wurzelfunktion an.

c) Sei wieder $x > 0$ und $P(x, \frac{1}{x})$ ein Punkt auf dem Graphen von f. Stelle $\overline{PF_1}^2$ als vollständiges Quadrat dar.

d) Berechne $\overline{PF_2} - \overline{PF_1}$.

Lösung: **a)**

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 2x\frac{1}{x} - 2x\sqrt{2} - 2\frac{1}{x}\sqrt{2} \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 - 2x\sqrt{2} - 2\frac{1}{x}\sqrt{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\overline{PF_2}^2 &= (x - \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 &&= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{2}}{x} + 2 \\ &= x^2 - 2\sqrt{2}x + \frac{1}{x^2} - \frac{2\sqrt{2}}{x} + 4 &&= \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{PF_2} = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$$

c) Vorüberlegung: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$\begin{aligned}\overline{PF_1}^2 &= (x + \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 &&= x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2\sqrt{2}}{x} + 2 \\ &= \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

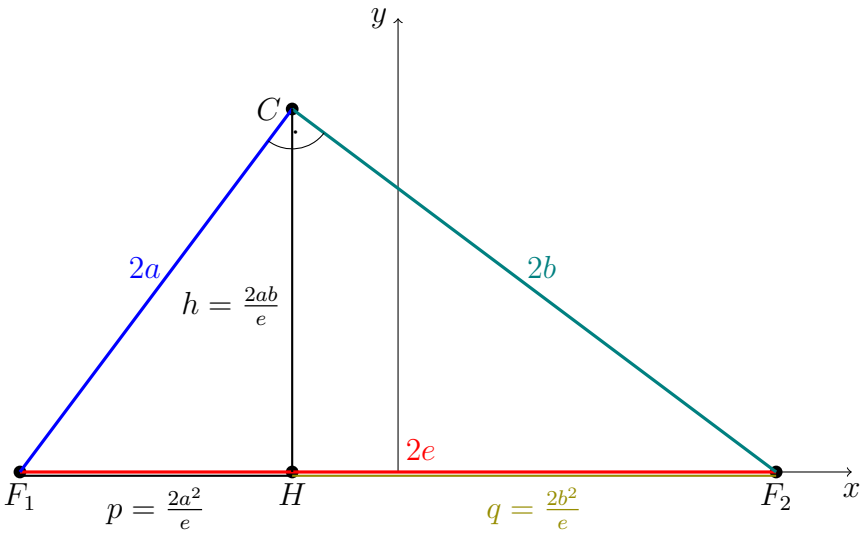
$$\Rightarrow \overline{PF_1} = x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}$$

d) $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2\sqrt{2}$

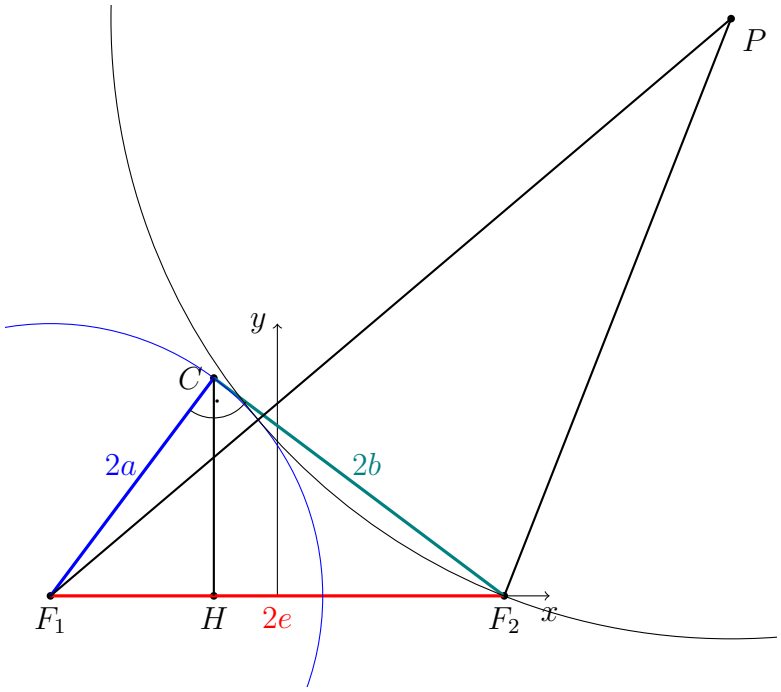
6.10 Ergänzung

Geometrischer Beweis, dass die bei der Hyperbel eingezeichneten Geraden Asymptoten sind.

Wir skizzieren zunächst ein wichtiges rechtwinkliges Dreieck als Grundlage



Beachte: Die Gerade g durch F_1 und C besitzt die Steigung $m_g = \dfrac{h}{p} = \dfrac{2ab}{2a^2} = \dfrac{b}{a}$.



Die beiden Kreise berühren sich, wegen $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$.

Je größer der Abstand von P zum Ursprung ist, desto mehr nähern sich die Steigungen von F_1P und F_2P an, im Grenzfall werden sie parallel. Im Grenzfall wird der Abschnitt der Kreislinie zwischen F_2 und dem Berührpunkt mit dem blauen Kreis zu einer geraden Strecke, die den blauen Kreis berührt. Dann geht die Strecke F_1P in die Verlängerung von F_1C über. Das bedeutet, dass sich P bei größer werdendem Abstand zum Ursprung an die Gerade durch F_1 und C annähert.

7 Bonusmaterial - Parabel, Ellipse und Hyperbel als Kegelschnitte

Im ersten Teil dieser Einheit wird erklärt, wie Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Schnitte eines Doppelkegels mit verschiedenen Ebenen entstehen. Im zweiten Teil wird geometrisch bewiesen, dass der Schnitt eines Doppelkegels mit einer geeigneten Ebene eine Hyperbel darstellt.

7.1 Schnitte von Ebenen mit Doppelkegeln

Dauer: 10 min
Ziel: Sehen, wie Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln als Schnitte eines Doppelkegels mit verschiedenen Ebenen entstehen.
Material: Kegelmodelle und Karton mit passend ausgeshnittener Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Vorgehen: L. zeigt anhand der Modelle, wie die Ebenen den Kegel durchdringen.

> **Anmerkung**
> Bei der Präsentation des Kegels gleich mit einer Schnur zeigen, dass eine Gerade durch einen Punkt des Kegelmantels und durch die Kegelspitze ganz auf dem Mantel des Doppelkegels liegt. Dies bereitet die Überlegungen im nächsten Kapitel vor.

> **Anmerkung**
> Es ist geplant, Bastelbögen für Kegel mit aufgedruckten Schnittlinien und mit zugehörige Schnittkurven zu entwickeln.

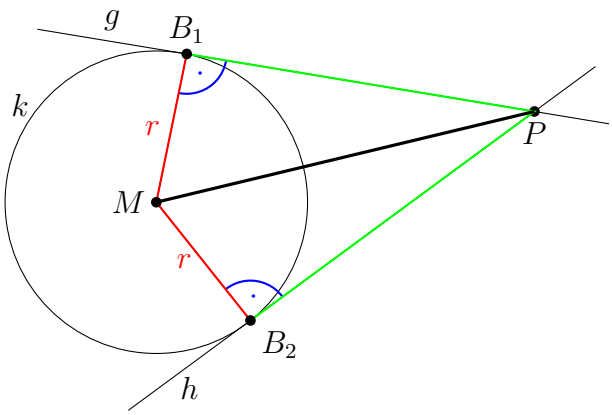
7.2 Hyperbel als Kegelschnitt

Dauer: 20 min
Ziel: Kennen des geometrischen Beweises dafür, dass durch den Schnitt einer geeigneten Ebene mit einem Doppelkegel eine Hyperbel entsteht.
Material: Arbeitsblatt 1, OH-Folie 1: Tangentenabschnitte, OH-Folie 2: Hyperbel als Kegelschnitt.

> **Leitfrage**
> Wie ist eine Hyperbel definiert?
> - *Für alle Hyperbelpunkte gilt: Die Differenz der Abstände zu den Brennpunkten ist konstant.*

Vorgehen: L. vervollständigt die Skizzen auf den OH-Folien und schreibt den Text an die Tafel. SuS schreiben auf dem Arbeitsblatt mit.

OH-Folie/Tafel: Arbeitsblatt 1



<u>Satz:</u> Sind g, h Tangenten an einen Kreis, die sich in einem Punkt P schneiden, so sind die Tangentenabschnitte gleich lang:

$$\overline{PB_1} = \overline{PB_2}$$

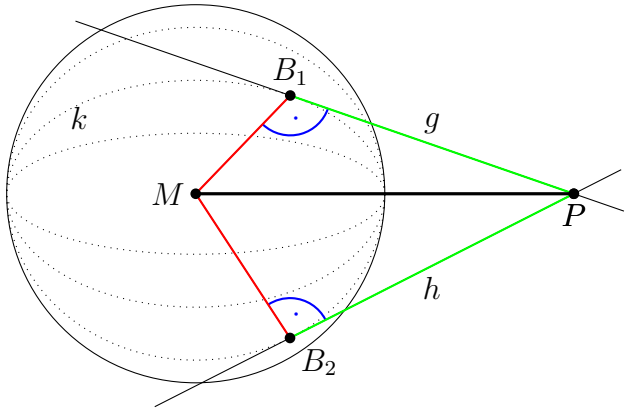
(B_1, B_2 sind die Berührpunkte der Tangenten).

<u>Beweis:</u> In B_1, B_2 liegen rechte Winkel vor.

Pythagoras $\Rightarrow$ $\overline{PB_1} = \sqrt{\overline{PM}^2 + r^2} = \overline{PB_2}$.

$\square$

OH-Folie/Tafel: Arbeitsblatt 1



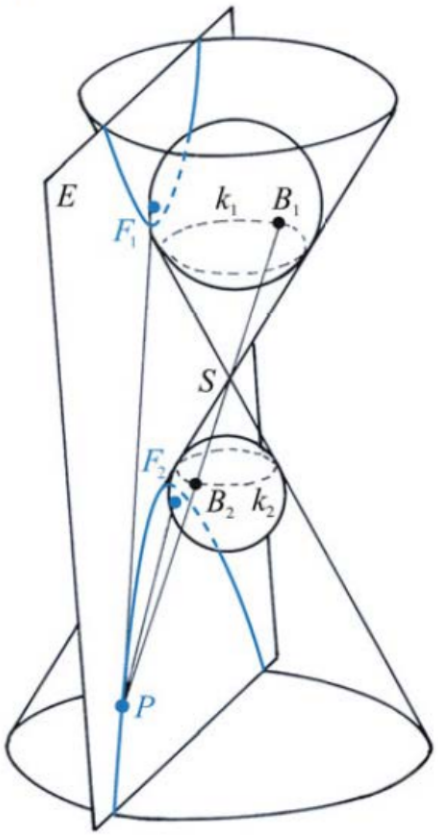
Satz: Wenn zwei Geraden durch P die Kugel k in den Punkten B_1 bzw. B_2 berühren, folgt

$$\overline{PB_1} = \overline{PB_2}.$$

Beweis: Pythagoras wie vorher.

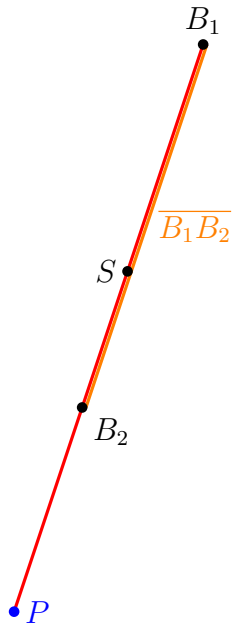
Anmerkung
Auf den Nachweis, dass in B_1 bzw. B_2 ein rechter Winkel vorliegt, wurde verzichtet.
Beweis: Die drei Punkte M, B_1, P liegen in einer Ebene E. Schnitt von E mit der Kugel ist ein Kreis um M, der von g in B_1 berührt wird. Also steht g orthogonal auf die Strecke MB_1.

OH-Folie/Tafel: Arbeitsblatt 1



Die Ebene E bildet mit dem Doppelkegel die blaue Schnittkurve.
Man legt in den Kegel von oben eine Kugel k_1 geeigneter Größe, so dass sie sowohl den Kegelmantel von innen als auch die Ebene E berührt. Genauso eine andere Kugel k_2 von unten. Diese Kugeln heißen Dandelinsche Kugeln. Die Berührpunkte der Ebene E und der Kugeln werden mit F_1 und F_2 bezeichnet. Die Berührkreise der Kugeln mit dem Kegelmantel sind gestrichelt dargestellt.
Für einen beliebigen Punkt P auf der Schnittkurve zeichne die Gerade g durch P und durch die Spitze S des Doppelkegels.
g liegt auf dem Kegelmantel und berührt k_1 in B_1 und k_2 in B_2.
Die Gerade h durch P und F_1 liegt in der Ebene E und berührt die Kugel k_1 im Punkt F_1.
$\Rightarrow$ g, h gehen durch P und berühren die Kugel k_1
Letzter Satz $\Rightarrow$ $\overline{PF_1} = \overline{PB_1}$.
Die Gerade f durch P und F_2 liegt in der Ebene E und berührt die Kugel k_2 im Punkt F_2.
Letzter Satz $\Rightarrow$ $\overline{PF_2} = \overline{PB_2}$.

OH-Folie/Tafel: Arbeitsblatt 1



P, B_2, S, B_1 liegen auf einer Geraden

$$\Rightarrow \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{PB_1} - \overline{PB_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{SB_1} + \overline{SB_2}.$$

Letzter Satz $\Rightarrow$ $\overline{SB_1}$ ist immer gleich groß, egal wo B_1 liegt.
Genauso ist $\overline{SB_2}$ unabhängig von B_2.
$\Rightarrow$ $\overline{SB_1} + \overline{SB_2}$ ist immer gleich groß, egal wo P liegt
$\Rightarrow$ $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} =$ konstant.
$\Rightarrow$ Schnittkurve ist eine Hyperbel.

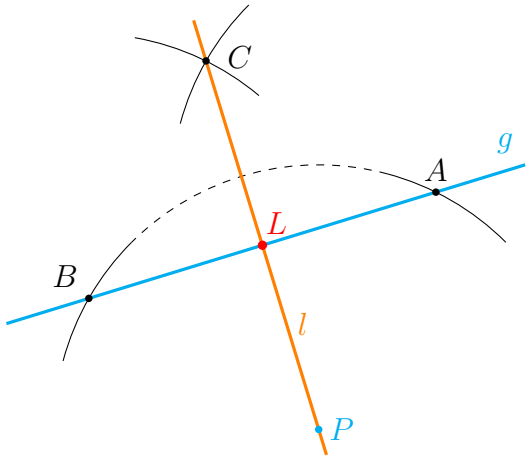
8 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 1: Abstände

8.1 Tafelanschriebe

1. Abstände

Definition: Gegeben seien eine Gerade g und ein Punkt P. Dann heißt die Gerade l, die durch P geht und senkrecht zu g ist, Lot von P auf g. Der Schnittpunkt von l und g heißt Lotfußpunkt.

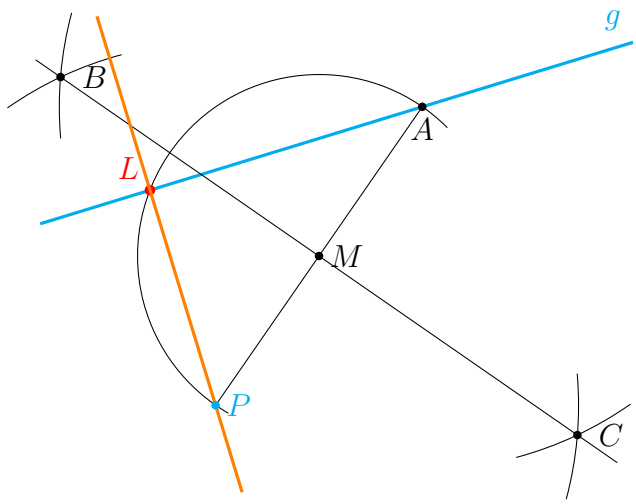
Konstruktion des Lotes l von P auf g und des Lotfußpunktes L:



Konstruktionsbeschreibung:

1) Kreis um P (Radius beliebig, genügend groß) schneidet g in A und in B.
2) Kreise um A und um B mit dem selben Radius schneiden sich in C.
3) Gerade durch C und P ist das Lot l
4) Schnittpunkt des Lotes mit g ist der Lotfußpunkt L.

Alternative Konstruktion des Lotfußpunktes L.



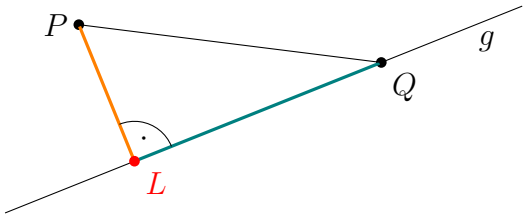
Konstruktionsbeschreibung:

1) Wähle A beliebig auf g.
2) Kreise um A und um P mit dem selben Radius schneiden sich in B und in C.
3) BC und AP schneiden sich in M (Mittelpunkt von AP).
4) Kreis um M durch P schneidet g in A und im Lotfußpunkt L.

Satz: Sind ein Punkt P und eine Gerade g gegeben, und ist L der Lotfußpunkt von P auf g, so gilt für alle Punkte $Q \in g$ mit $Q \neq L$: $\overline{PQ} > \overline{PL}$.

Beweis: Pythagoras:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{PL}^2 + \underbrace{\overline{LQ}^2}_{>0} \\ \Rightarrow \overline{PQ}^2 &> \overline{PL}^2 \\ \overset{\overline{PQ}>0}{\Rightarrow} \overline{PQ} &> \overline{PL} \qquad \square \end{aligned}$$



Definition: Der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g ist definiert durch

$$d(P,g) \;:=\; \min\left\{\overline{PQ} : Q \in g\right\}.$$

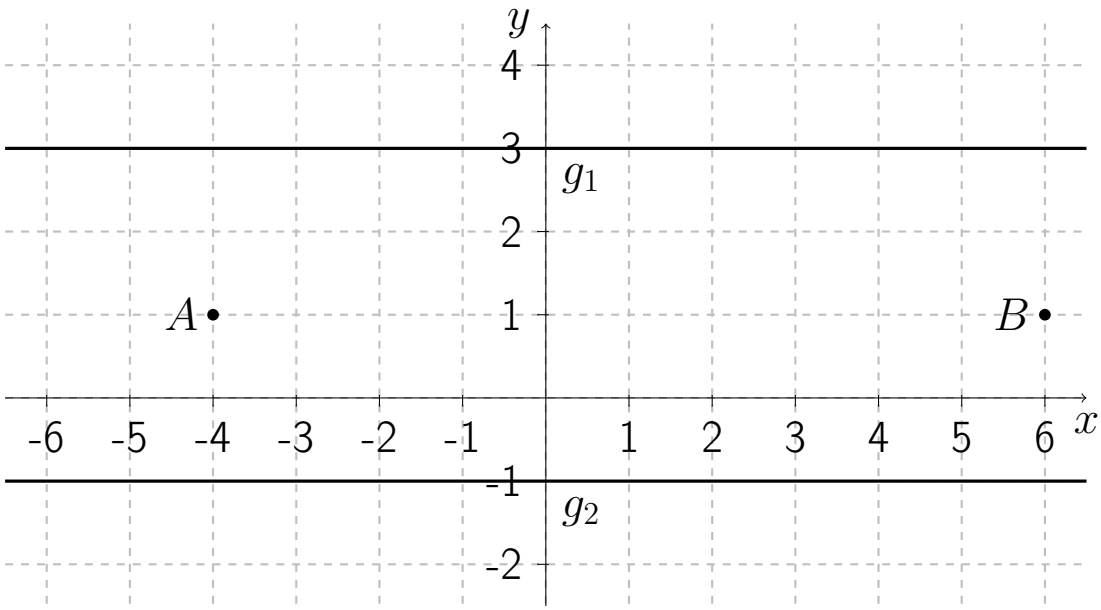
Satz: Ist L der Lotfußpunkt von P auf die Gerade g, so gilt

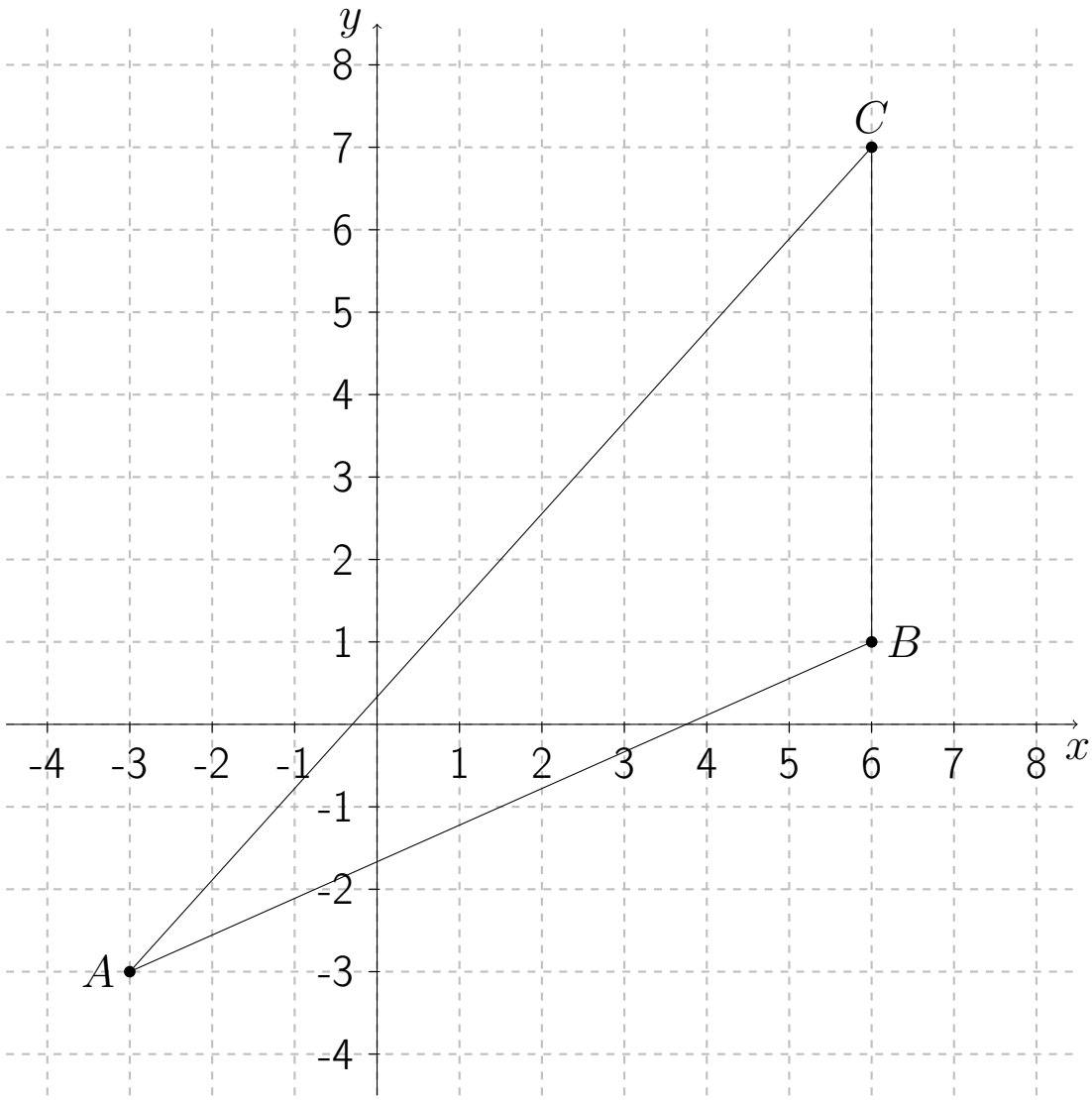
$$d(P,g) \;=\; \overline{PL}.$$

Beweis: Letzter Satz.

8.2 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten


y
4
3
g_1
2
A
1
B
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6
x
-1
g_2
-2


y
8
7
C
6
5
4
3
2
1
B
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8
x
-1
-2
-3
A
-4

Arbeitsblatt 1

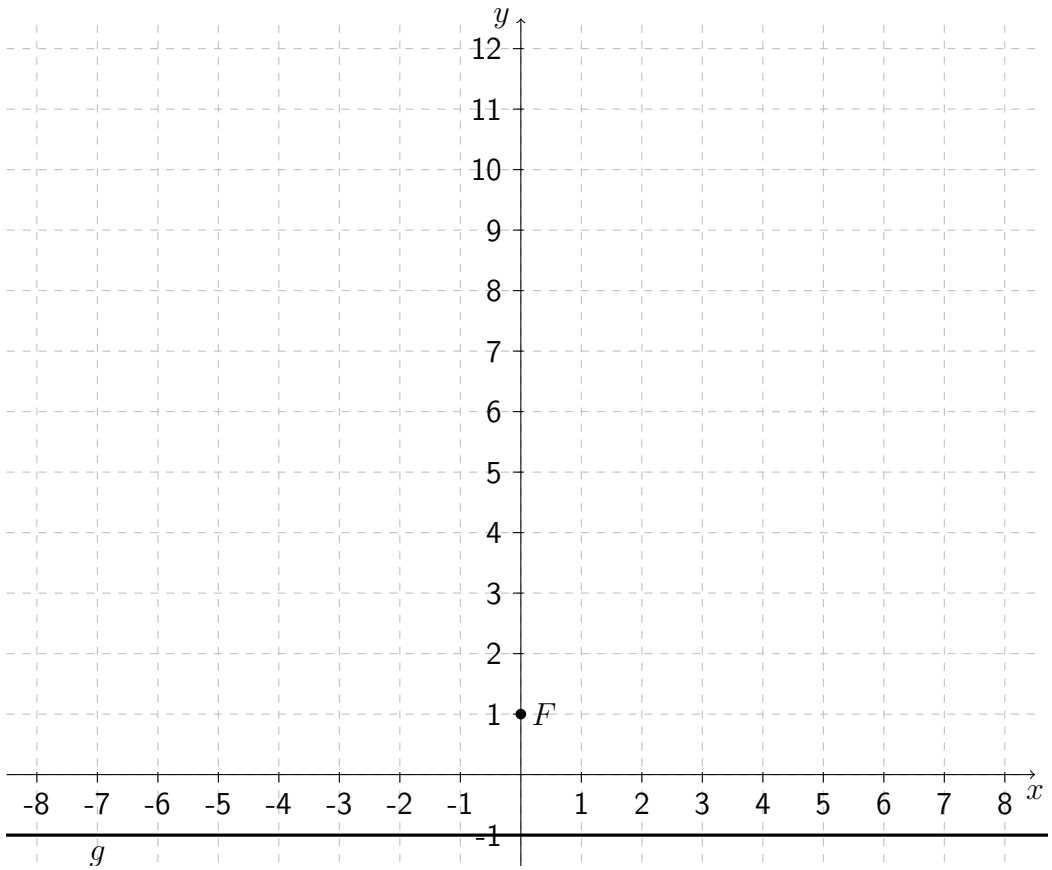
Aufgabe 1

Gegeben sind die Gerade $g = \{(x \mid y) : y = -1\}$ und der Punkt $F(0 \mid 1)$ (siehe unten).

Gesucht ist die Menge aller Punkte, die von der Geraden g und dem Punkt F denselben (beliebig großen) Abstand haben.

a) Zeichne die Gerade ein, die parallel zu g ist, oberhalb von g liegt und den Abstand 7LE von g hat. Konstruiere die zwei Punkte, die von g und von F den Abstand 7LE haben.

b) Konstruiere mindestens 10 Punkte, die auf den waagrechten Koordinatengitterlinien liegen und die jeweils von g und von F denselben Abstand haben. Verbinde die Punkte zu einer Kurve.



Aufgabe 2

Die Menge aller Punkte P, für deren Abstand $d(P, g)$ von g und den Abstand $\overline{PF}$ von F gilt:

a) $\overline{PF} = d(P, g)$, bildet eine

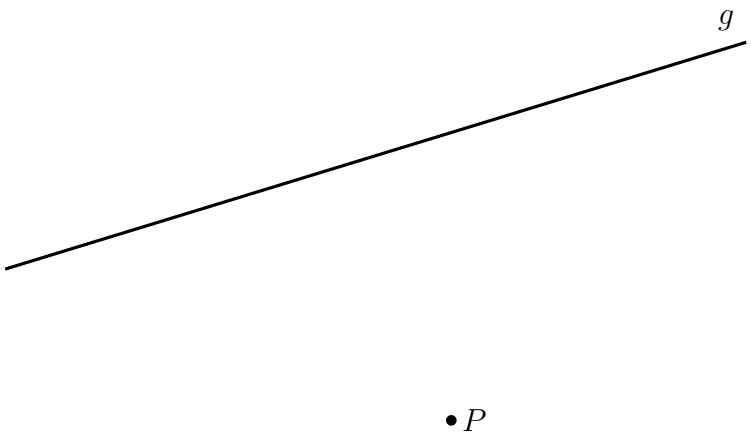
b) $\overline{PF} = 0,8 \cdot d(P, g)$, bildet eine

c) $\overline{PF} = 1,2 \cdot d(P, g)$, bildet eine

Arbeitsblatt 2

Aufgabe 3

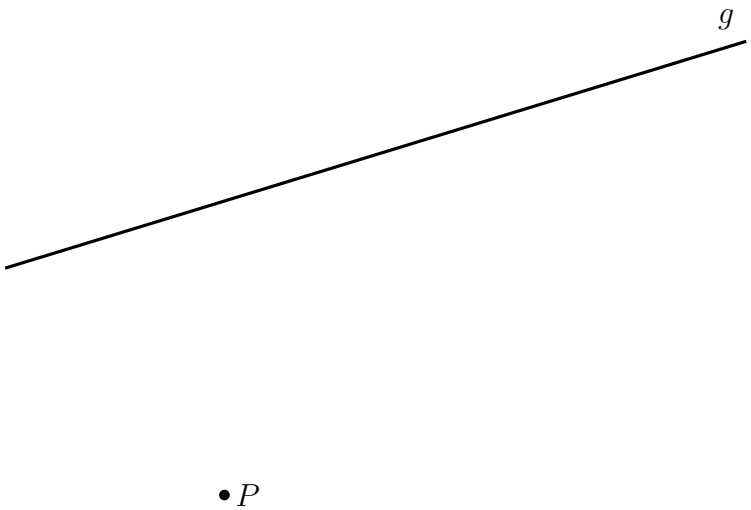
Konstruktion des Lotes l von P auf g und des Lotfußpunktes L



Konstruktionsbeschreibung:

Aufgabe 4

Alternative Konstruktion des Lotfußpunktes L:



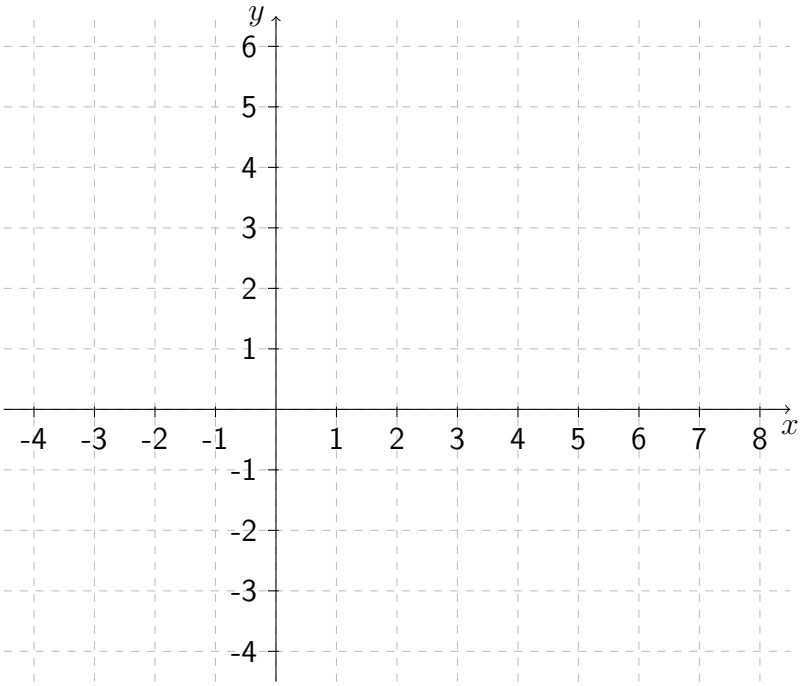
Konstruktionsbeschreibung:

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 5

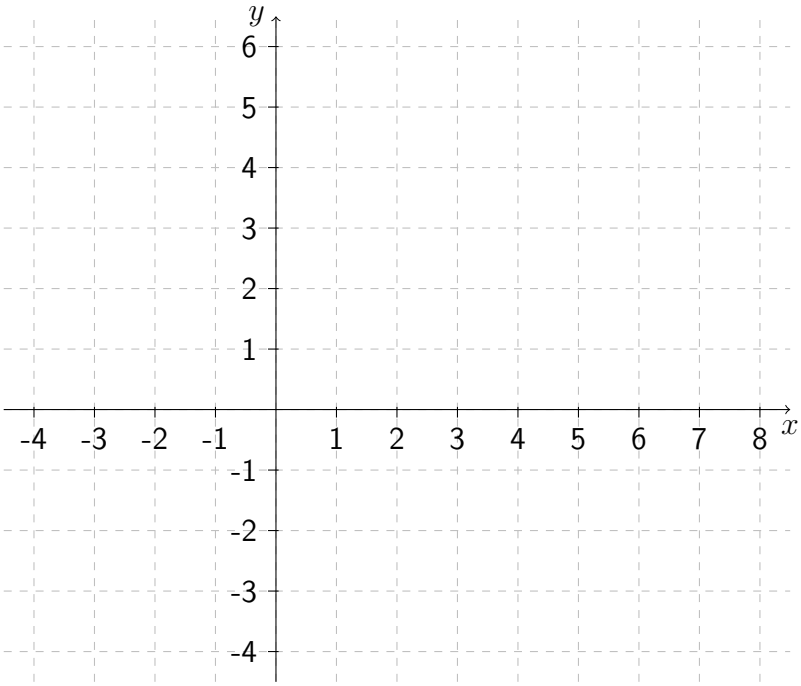
Zeichne in jeder Teilaufgabe den angegebenen Punkt P und die Gerade g ein. Bestimme den Abstand $d(P, g)$ explizit durch Berechnung aus den angegebenen Koordinaten oder gib ihn als Formelausdruck mit a, b an.

a) $P(1 \mid 3)$, $g = \{(x \mid y) : y = -2\}$,

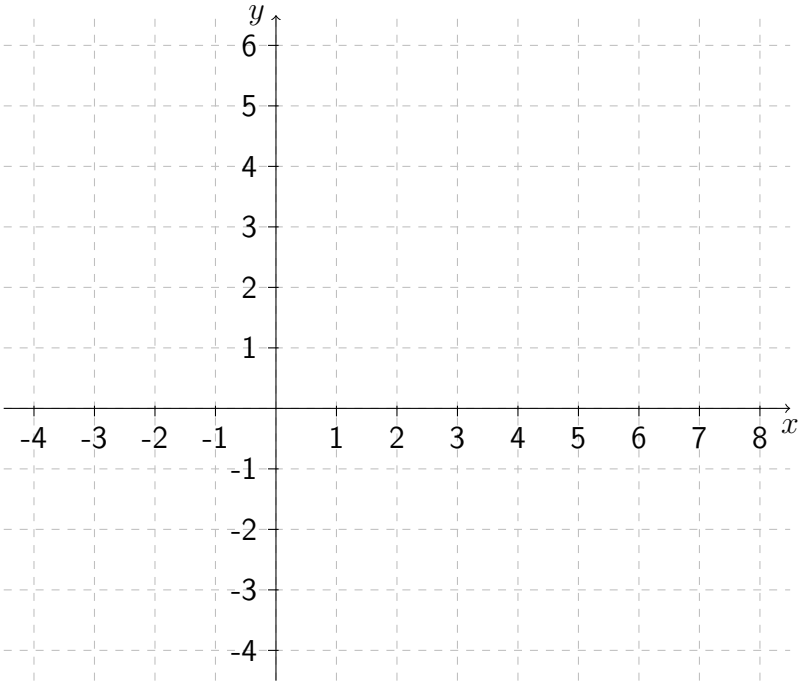


b) $P(a \mid b)$ mit beliebigem $a, b \in \mathbb{R}$, $g = \{(x \mid y) : y = -2\}$ (obiges Koordinatensystem verwenden),

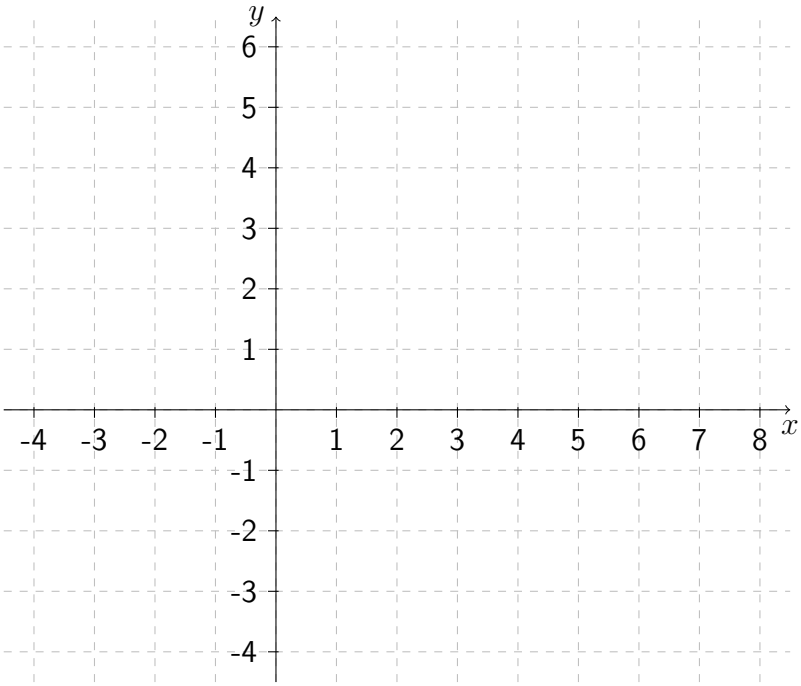
c) $P(a \mid b)$ mit beliebigem $a, b \in \mathbb{R}$, $g = \{(x \mid y) : x = 1\}$,



d) $P(1 \mid 3)$, $g = \{(x \mid y) : y = -x\}$,



e) Zusatzaufgabe: $P(a \mid b)$ mit beliebigem $a, b \in \mathbb{R}$, $g = \{(x \mid y) : y = -x\}$,



Arbeitsblatt 4

Aufgabe 6

Gegeben sind die im ersten Schaubild eingezeichneten Geraden g, h.

a) Konstruiere die Lage aller Punkte P, die zur Geraden g den Abstand 2cm haben (blau).

b) Konstruiere alle Punkte Q, die sowohl zu g als auch zu h den Abstand 2cm haben (rot).

c) Konstruiere die Lage aller Punkte R, für die $d(R, g) = d(R, h)$ gilt (grün).

d) Nun ist zusätzlich eine Gerade f gegeben (zweites Schaubild). Konstruiere alle Punkte S, für die $d(S, g) = d(S, h) = d(S, f)$ gilt.

Hinweis: Parallelen dürfen mit dem Geodreieck konstruiert werden.

Schaubild 1:

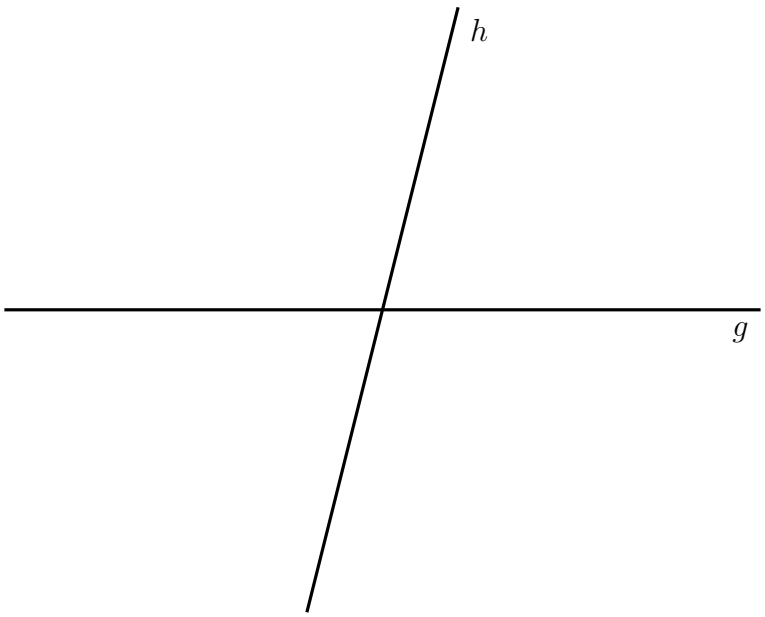
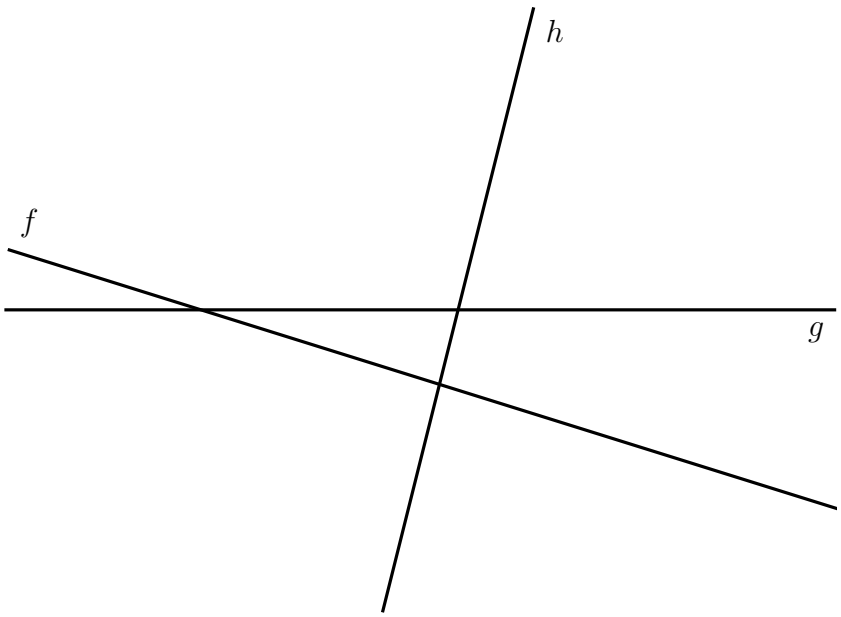


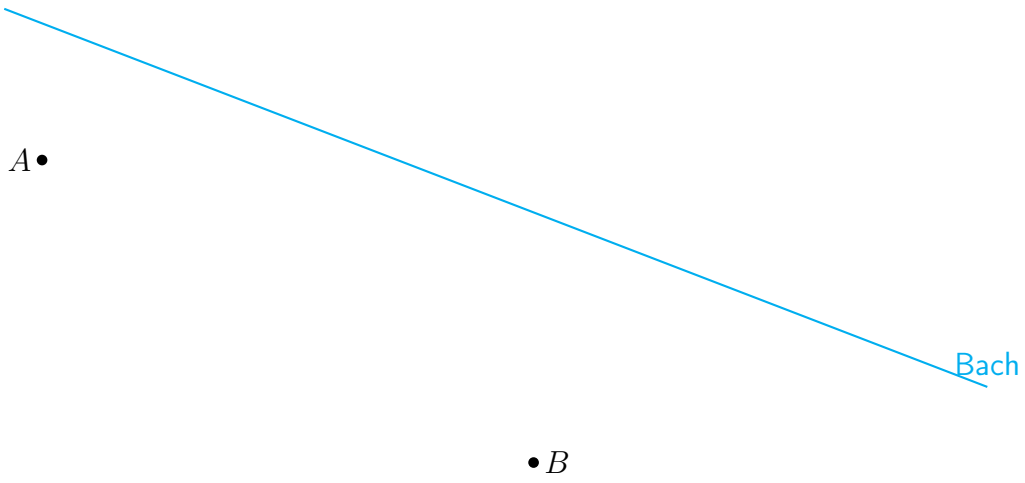
Schaubild 2:



bitte wenden

Aufgabe 7

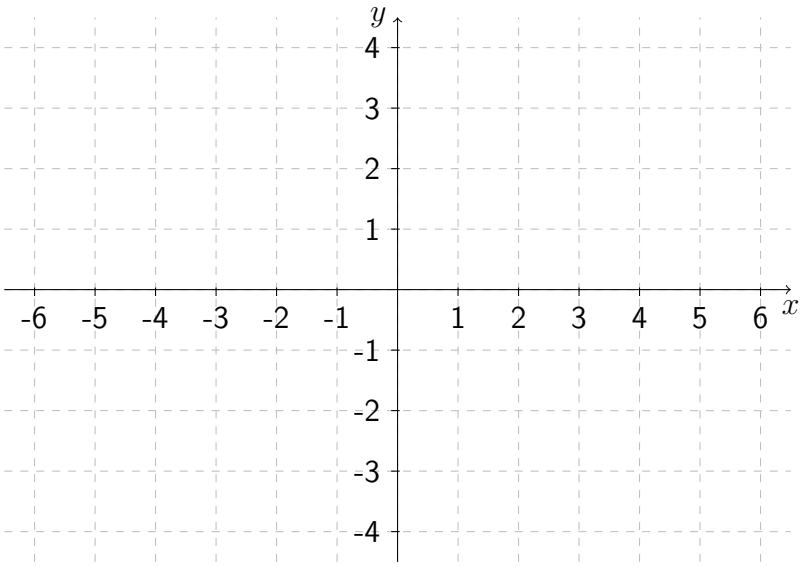
Ein Reiter will von A nach B reiten und unterwegs sein Pferd am Bach im Punkt C trinken lassen. Konstruiere mit Zirkel und Lineal den kürzesten Weg, den der Reiter nehmen kann.
Hinweis: Das Lot von B auf den Bach und der Punkt B' auf dem Lot, der durch Spiegelung des Punktes B am Bach entsteht, können hilfreich sein.



Zusatzblatt

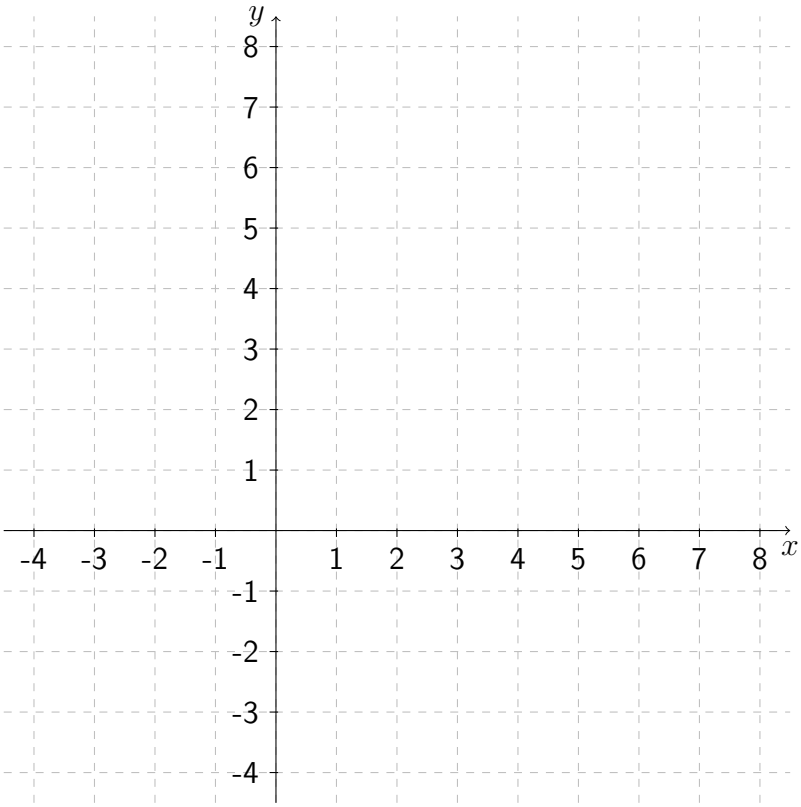
Aufgabe 8

a) Zeichne die Punkte $A(-4 \mid 1)$ und $B(6 \mid 1)$ in das Koordinatensystem ein. Zeichne die zwei Geraden g mit der folgenden Eigenschaft: $d(A, g) = 2$LE und $d(B, g) = 2$LE und A, B liegen auf der selben Seite von g. Zeichne die Lotfußpunkte der Lote von A bzw. B auf deine Geraden. Die Geraden und Lote dürfen direkt ohne Konstruktion eingezeichnet werden.



b) Zeichne die drei Punkte $A(-3 \mid -3)$, $B(6 \mid 1)$ und $C(6 \mid 7)$ in das Koordinatensystem ein. Zeichne die drei Geraden, die von allen drei Punkten denselben Abstand haben. Verwende zur Darstellung verschiedener Geraden verschiedene Farben.

Hinweis: Wie können die drei Punkte im Verhältnis zur gesuchten Geraden liegen?



Schriftliche Aufgaben

Name:

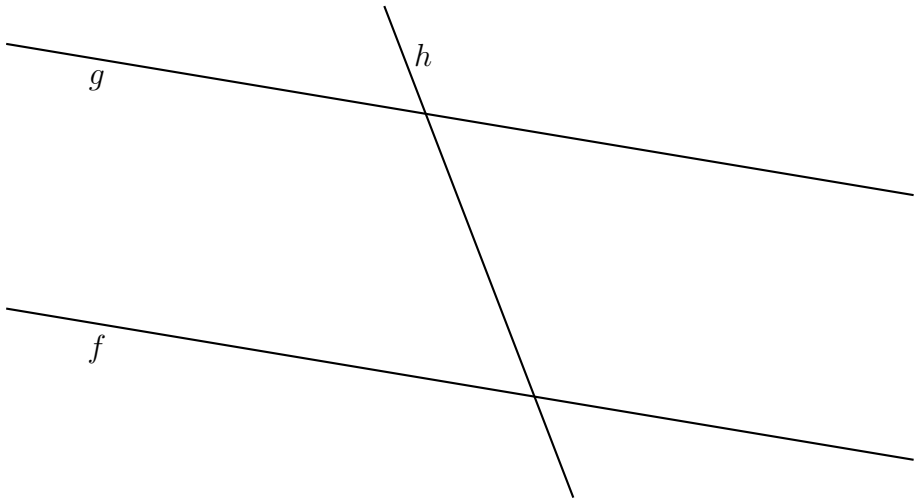
Aufgabe 9

Gegeben sind die parallelen Geraden f und g und die sie schneidende Gerade h,

a) Konstruiere die Menge aller Punkte P, für die $d(P, f) = d(P, g)$ gilt (grün markieren),

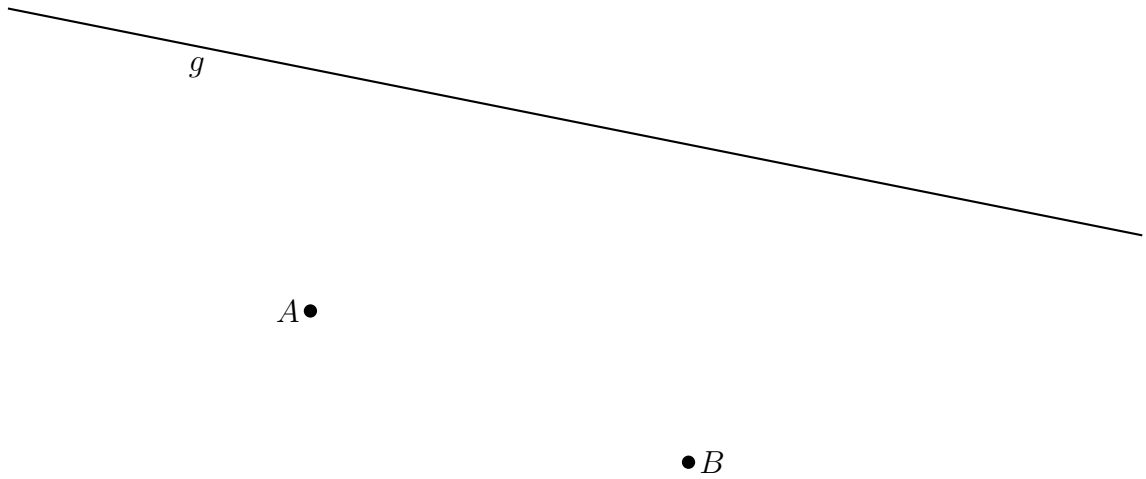
b) Konstruiere die Menge aller Punkte P, für die $d(P, f) = d(P, g) = d(P, h)$ gilt (blau).

Hinweis: In dieser Aufgabe dürfen Streckenlängen mit dem Geodreieck gemessen und parallele Geraden mit dem Geodreieck konstruiert werden.



Aufgabe 10

Gegeben sind die Punkte A, B und die Gerade g. Konstruiere mit Zirkel und Lineal das Dreieck ABC mit $C \in g$, so dass der Umfang des Dreiecks möglichst klein ist.



Aufgabe 11

Gib bei den folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Aussage	w/f
Sind eine Gerade g und ein Punkt P gegeben, so besitzt P mehrere Lotfußpunkte auf g	
Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden g ist gleich zum Abstand von P zu seinem Lotfußpunkt auf g	
Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, so gilt $d(P, g) = 0$	
Zu einem gegebenen Punkt P gibt es genau zwei Geraden, so dass P von jeder der beiden den Abstand 2LE besitzt	
Alle Punkte, die zu zwei verschiedenen gegebenen Punkten den selben Abstand haben, liegen auf einer Geraden	
Sind zwei verschiedene Punkte A, B gegeben, so gibt es genau zwei Punkte, die von A und B den selben Abstand haben	

Aufgabe 12

Gegeben sind die Gerade $g = \{(x \mid y) : y = x - 1\}$ und die Punkte $P(5 \mid -4)$ und $Q(-1 \mid 5)$.

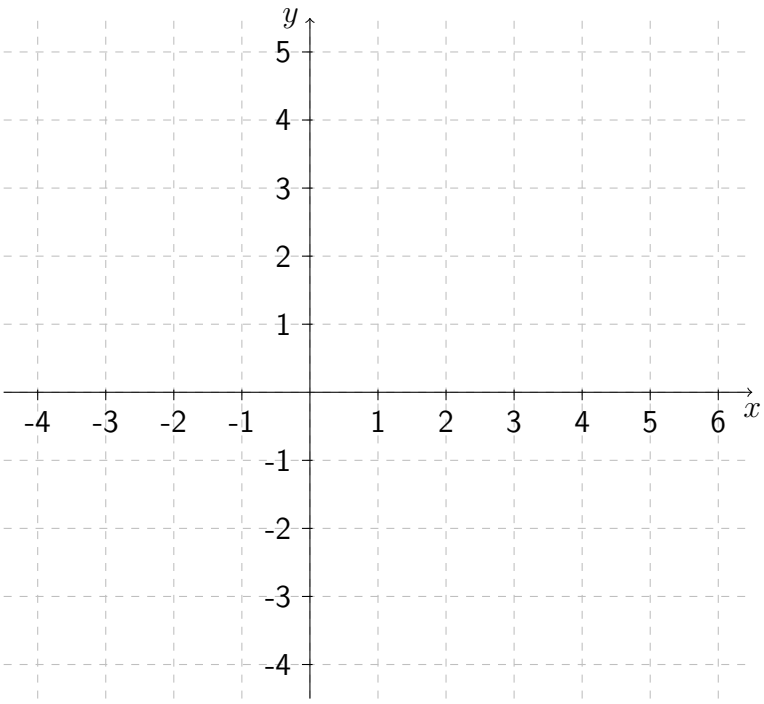
a) Zeichne die Gerade, die Punkte P, Q und die Lote der Punkte auf g ins Koordinatensystem ein (Konstruktion mit Geodreieck).

b) Welche Steigung besitzt g? Welche Steigung haben die Lote?

c) Gib die Koordinaten der Lotfußpunkte an.

d) Berechne die Abständer der Punkte P und Q von g.

e) **Zusatzaufgabe:** Nun ist ein Punkt $R(a \mid b)$ mit beliebig gewählten $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Berechne den Lotfußpunkt und den Abstand von R zu g in Abhängigkeit von a und b.



Steigung von g:	$m_g =$
Steigung der Lote:	$m_l =$
Lotfußpunkt zu P:	$L_P\Big(\qquad\Big)$
Lotfußpunkt zu Q:	$L_Q\Big(\qquad\Big)$
$d(P, g) =$	
$d(Q, g) =$	

$L_R\Big(\qquad\qquad\Big)$

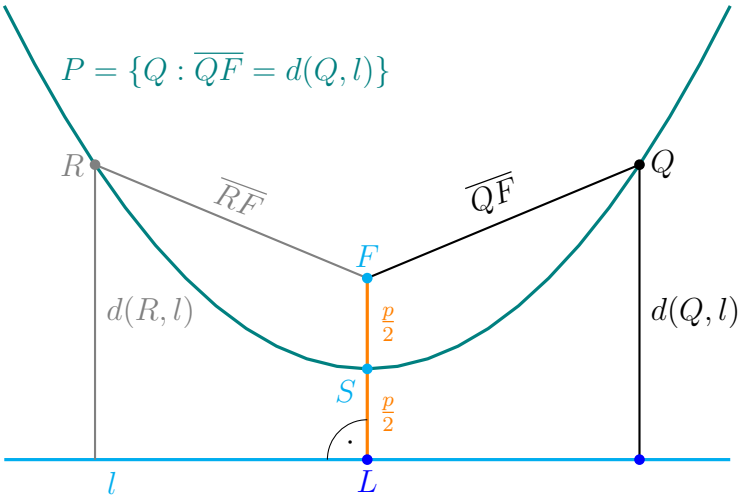
$d(R, g) =$	

9 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 2: Parabel

9.1 Tafelanschriebe

2. Parabeln

Definition: Eine Parabel P ist gegeben durch eine Gerade l und einen Punkt F, der nicht auf l liegt. Die Parabel ist die Menge aller Punkte, deren Abstand zu F gleich dem Abstand zu l ist. Die Gerade l heißt Leitlinie, der Punkt F heißt Brennpunkt der Parabel (engl. Focus).



Graphik: `Kapitel2_DefinitionParabel.ggb`

Der Punkt S auf der Parabel, der das Lot von F auf l halbiert, heißt Scheitelpunkt. Der Abstand von F zu l wird mit p bezeichnet.

An der Konstruktion erkennt man: Die Parabel ist symmetrisch zur Geraden durch F, die senkrecht auf l steht.

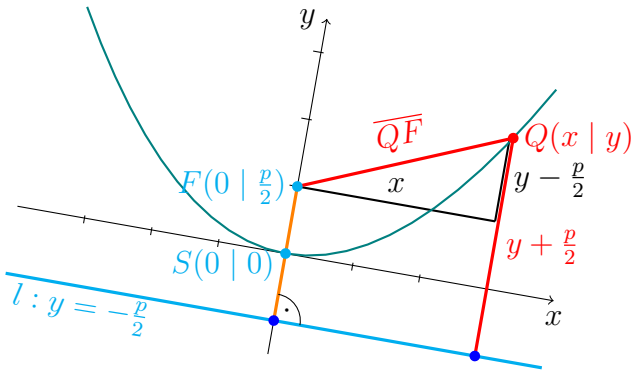
Analytische Beschreibung: Eine Parabel ist durch l und F gegeben. Wähle ein dazu passendes Koordinatensystem:

1) x-Achse: Parallele zu l durch S,

2) y-Achse: Orthogonale zu l durch F.

In diesem Koordinatensystem:
$S(0,0)$, $F(0,\frac{p}{2})$, $l = \{(x,y) : y = -\frac{p}{2}\}$
und für $Q(x,y)$:

$$\begin{aligned} \overline{QF} &= \sqrt{\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + x^2}, \\ d(Q,l) &= y + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$



Graphik: `Kapitel2_analytischeBeschreibung.ggb`

Also:

$$\begin{aligned} Q(x \mid y) \text{ liegt auf der Parabel } &\Leftrightarrow \sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2 + x^2} = y + \frac{p}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(y-\frac{p}{2}\right)^2 + x^2 = \left(y+\frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 - py + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + x^2 = y^2 + py + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2p\,y \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2p}\,x^2. \end{aligned}$$

<u>Satz:</u> Sei $p \neq 0$ gegeben. Dann ist

$$P \;:=\; \{(x,y) : y = \frac{1}{2p}\,x^2\} \qquad (*)$$

eine Parabel mit Leitgerade $l = \{(x,y) : y = -\frac{p}{2}\}$ und Brennpunkt $F(0, \frac{p}{2})$. Jede Parabel mit $d(F,l) = p$ besitzt in einem geeignet gewählten Koordinatensystem diese Darstellung.
Im Fall $p < 0$ beschreibt $(*)$ eine nach unten geöffnete Parabel.

Satz: Jede Parabel, deren Symmetrieachse parallel zur y-Achse ist, besitzt eine Darstellung der Form $y = ax^2 + by + c$ mit geeigneten Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Umgekehrt: Durch die Gleichung $y = ax^2 + by + c$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ wird eine Parabel beschrieben, die symmetrisch zur Geraden $x = -\frac{b}{2a}$ ist.

Beweis: Liegt eine nach oben geöffnete Parabel vor, so entsteht sie aus der Parabel mit der Gleichungf $y = \frac{1}{2p}x^2$ durch Verschiebung um A nach rechts und B nach oben. Die Gleichungsdarstellung wird dadurch zu

$$y \;=\; \frac{1}{2p}(x-A)^2 + B \;=\; \underbrace{\frac{1}{2p}}_{=:a}\, x^2 - \underbrace{\frac{1}{p}A}_{=:b}\, x + \underbrace{\frac{1}{2p}A^2 + B}_{=:c}$$

Liegt eine nach unten geöffnete Parabel vor, so emntsteht sie aus der Parabel $y = -\frac{1}{2p}x^2$ durch Verschiebung, Rest genauso.
Betrachte die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ gegeben. Quadratisch ergänzen:

$$y \;=\; a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\Big) - a\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 + c \;=\; a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Dies beschreibt eine Parabel mit $a = \frac{1}{2p} \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{2a}$, $F\big(-\frac{b}{2a}\big|\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c\big)$, $l : y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$.
$\Rightarrow$ Diese Parabel ist symmetrisch zur Geraden $x = -\frac{b}{2a}$.$\square$

Symmetrie: Ist eine Parabel durch $y = \frac{1}{2p}\,x^2$ gegeben, so ist sie symmetrisch zur y-Achse. In der Formel sieht man das daran, dass $\frac{1}{2p}\,(-x)^2 = \frac{1}{2p}\,x^2$, d.h. ersetzt man x durch $-x$, so bleibt der y-Wert gleich.

Die Parabel P sei durch $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ gegeben. Quadratisch ergänzen:

$$y \;=\; a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x + \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\Big) - a\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 + c \;=\; a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Dies beschreibt eine Parabel mit $a = \frac{1}{2p} \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{2a}$, $F\big(-\frac{b}{2a}\big|\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c\big)$, $l : y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$.
$\Rightarrow$ Diese Parabel ist symmetrisch zur Geraden $x = -\frac{b}{2a}$.

9.2 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 2x$ (vgl. Graphik).

a) Zeichne mit dem Geodreieck die zu g senkrechte Gerade h, die durch den Punkt $(0 \mid 0)$ verläuft.

b) Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0 \mid 0)$, $B(2 \mid 0)$, $C(2 \mid 4)$.

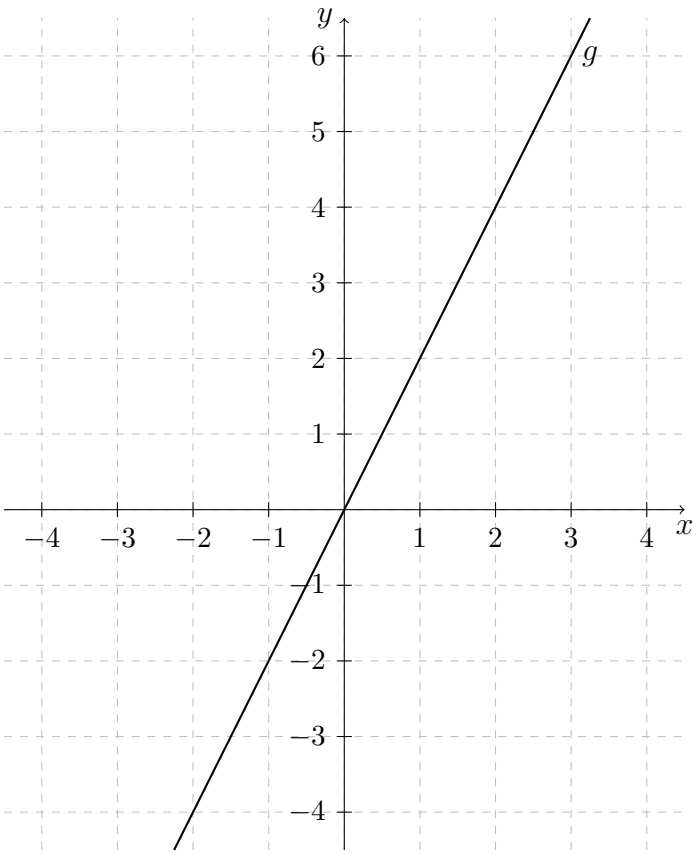
c) Drehe das Dreieck ABC um A mit Winkel $90°$ im Uhrzeigersinn. Dann liegt eine Seite des gedrehten Dreiecks auf h.

d) Berechne die Steigung und die Geradengleichung von h.

e) Berechne den Abstand des Punktes $P(-4 \mid 2)$ zu g.

f) Zeichne den Punkt $Q(-2 \mid 5)$ in das Koordinatensystem ein.

g) Berechne die Gleichung des Lotes von Q auf g, die Koordinaten des Lotfußpunktes L_Q und den Abstand $d(Q, g)$.

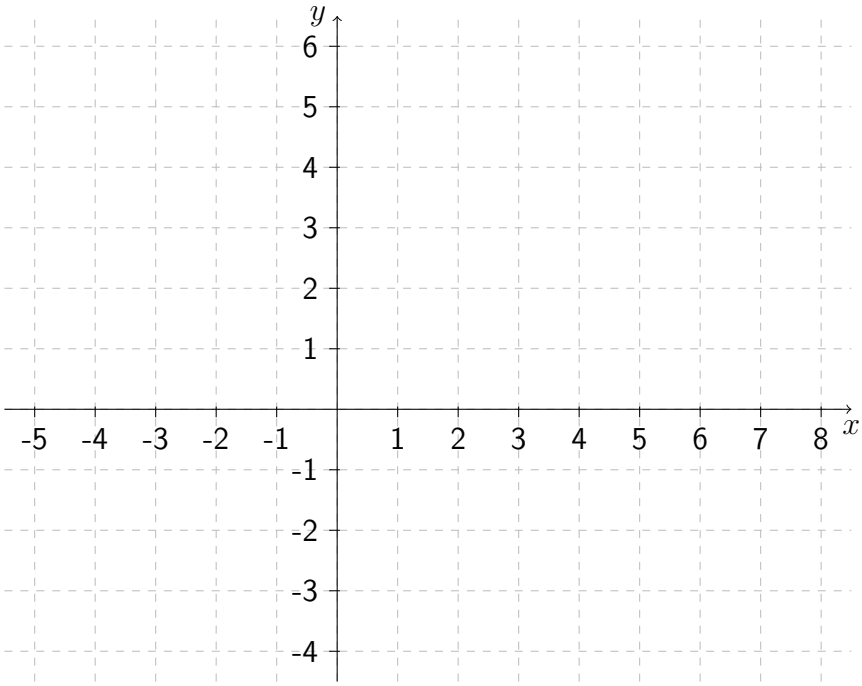


Arbeitsblatt 2

Aufgabe 2

Gegeben ist die Parabel P mit Brennpunkt $F(1 \mid 1)$ und der Leitgeraden $l = \{(x \mid y) : y = -3\}$.

Zeichne den Brennpunkt, die Leitgerade und den Scheitelpunkt ins Koordinatensystem ein. Konstruiere mindestens sechs weitere Punkte der Parabel und zeichne dann die Parabel. Du kannst als Parallelen zur Leitgeraden einfach die Gitterlinien benützen.



Arbeitsblatt 3

Aufgabe 3

Gegeben ist die Parabel $P = \{(x \mid y) : y = x^2\}$.

a) Gib die Koordinaten des Brennpunkts F und die Gleichung der Leitgeraden l an. Zeichne beides in das untenstehende Koordinatensystem ein. Skizziere grob die Parabel. Beachte: Die Punkte $Q(1 \mid 1)$ und $R(-1 \mid 1)$ liegen auf der Parabel.

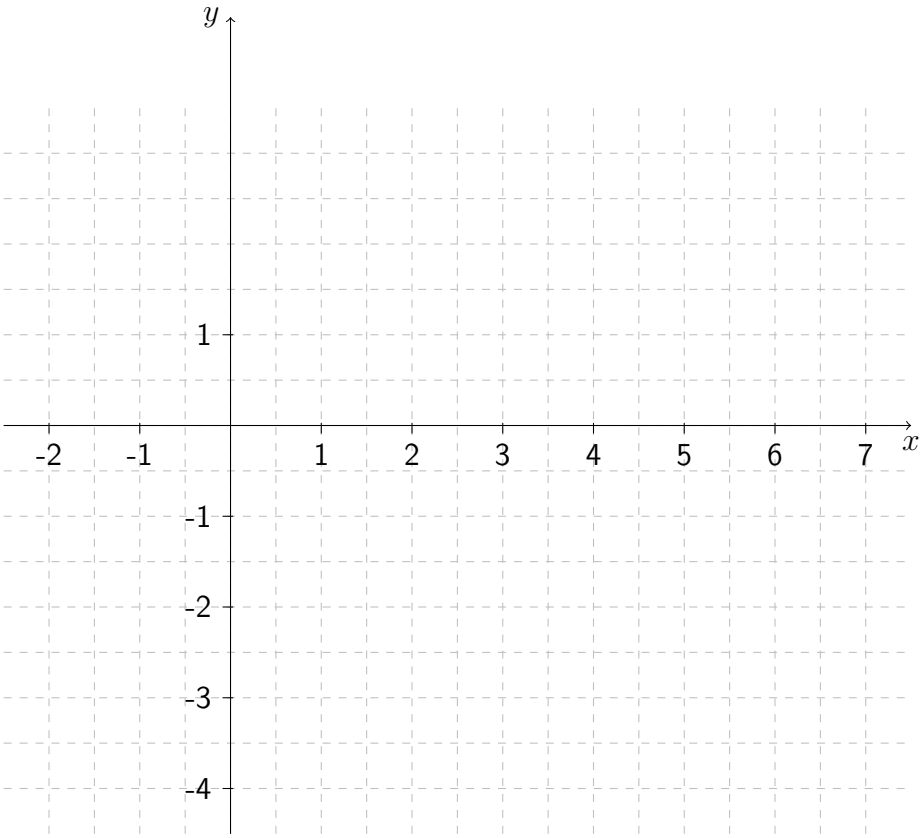
Diese Parabel soll nun im Koordinatensystem verschoben werden. Gib jeweils die Koordinaten des Brennpunkts und die Gleichung der Leitgeraden für die verschobene Parabel an und auch die Gleichung, die die verschobene Parabel beschreibt. Kontrolliere, ob die entsprechend verschobenen Punkte Q, R die gefundene Parabelgleichung erfüllen.

b) Die Parabel P wird um 5LE nach rechts (d.h. in Richtung der positiven x-Achse) verschoben.

c) Die Parabel P wird um 2LE nach unten (d.h. in Richtung der negativen y-Achse) verschoben.

d) Die Parabel P wird um 5LE nach rechts und um 2LE nach unten verschoben.

e) Die Parabel P wird um aLE nach rechts und um bLE nach oben verschoben ($a, b \in \mathbb{R}$ beliebig).



Bitte wenden

Aufgabe 4

a) Die Parabel P_1 ist durch die Gleichung $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 1$ gegeben. Bestimme die Koordinaten des Brennpunkts F_1 und die Gleichung der Leitgeraden l_1.

Hinweis: Betrachte zunächst die Parabel P_2, die durch die Gleichung $y = \frac{1}{3}x^2$ beschrieben wird. Bestimme die Koordinaten des Brennpunkts F_2 und die Gleichung der Leitgeraden l_2. Überlege dann, wie P_2 verschoben werden muss, damit sie mit P_1 zur Deckung kommt.

b) Die Parabel P_3 ist durch die Gleichung $y = x^2 + 6x + 10$ gegeben. Bestimme die Koordinaten ihres Brennpunkts F_3 und die Gleichung ihrer Leitgeraden l_3.

c) Gegeben sind drei Punkte $Q_1(0 \mid 1)$, $Q_2(1 \mid -5)$, $Q_3(-1 \mid 3)$. Bestimme die Gleichung der Parabel P_4, die durch diese drei Punkte verläuft. Gib die Koordinaten des Brennpunkts F_4 und die Gleichung der Leitgeraden l_4 an.

Hinweis: Die Parabel wird durch eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ beschrieben. Bestimme zunächst a, b, c.

d) **Zusatzaufgabe:** Für beliebige, aber festgehaltene $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ ist die Parabel P_5 durch die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ gegeben. Bestimme die Koordinaten des Brennpunkts F_5 und die Gleichung der Leitgeraden l_5.

Arbeitsblatt 4

Aufgabe 5

Die Parabel P ist durch den Brennpunkt $F(1 \mid 1)$ und die Leitgerade $l = \{(x \mid y) : x = -4\}$ gegeben.

a) Zeichne F und die Leitgerade ins Koordinatensystem ein.

b) Gib die Koordinaten des Scheitels S an und zeichne S ein.

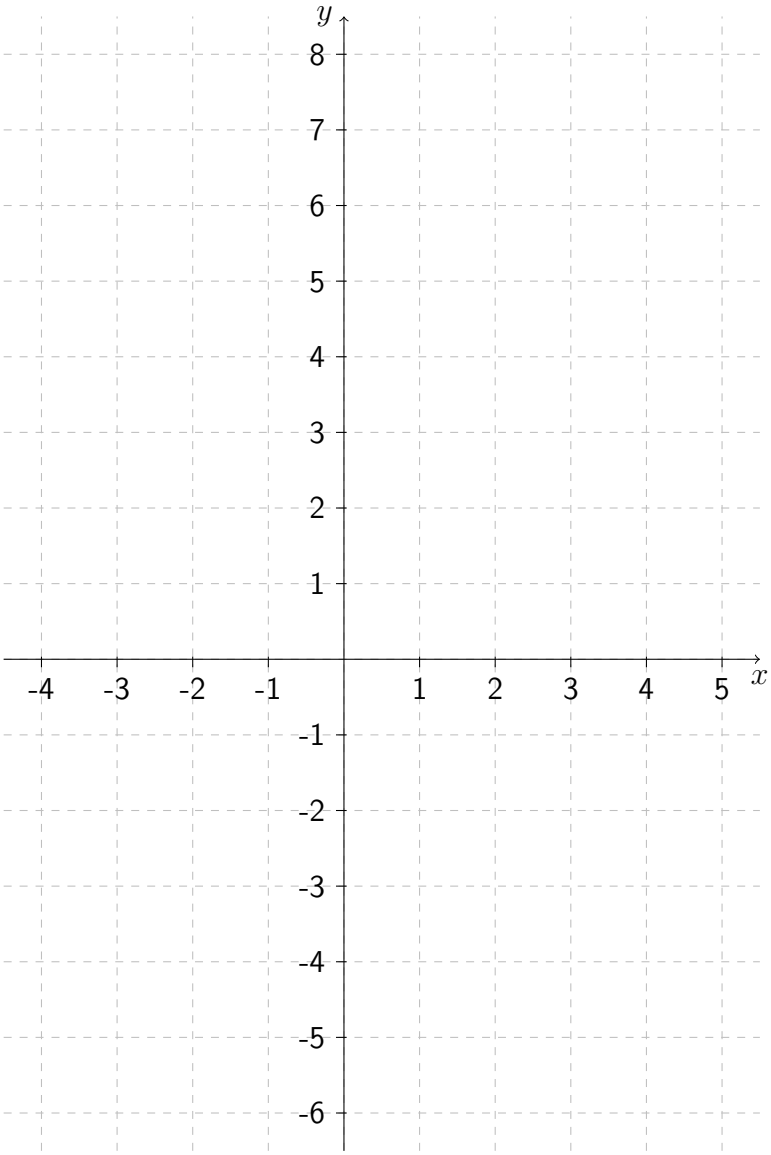
c) Zeichne die Punkte $R(1 \mid 6)$ und $R'(1 \mid -4)$ ein. Warum liegen sie auf der Parabel?

d) Zeichne die Symmetrieachse g der Parabel ein und gib die Gleichung von g an.

e) Skizziere die Parabel.

f) Zeichne Q der Parabel, der nicht der Scheitel ist, ins Koordinatensystem ein. Nimm an, die Koordinaten des Punktes Q seien $(x \mid y)$. Leite eine Gleichung für x, y her, die genau dann erfüllt ist, wenn Q auf der Parabel liegt. Löse diese Gleiuchung nach x auf.

g) Warum kann diese Parabel nicht durch eine Gleichung der Form $y = f(x)$ beschrieben werden?



Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 6

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Kreuze an.

	w	f
Eine Parabel kann man in ein Koordinatensystem einzeichnen, wenn man die Gleichung der Leitgeraden g und die Koordinaten des Brennpunktes F kennt.		
Zu jeder Parabel kann ein Koordinatensystem so gewählt werden, dass die Parabel mit dem Graphen $y = \frac{1}{2p}x^2$ übereinstimmt.		
Verschiebt man eine Parabel der Form $y = \frac{1}{2p}x^2$ um 2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung, so sind die Koordinaten des neuen Scheitelpunktes $(3 \mid 2)$.		
Ist eine Parabel durch die Gleichung $y = \frac{1}{8}(x-2)^2 + 5$ gegeben, so kann kann man den Scheitel der Parabel angeben, ohne zu rechnen.		
Jede Parabel ist punktsymmetrisch.		
Jede Parabel ist Graph einer Funktion.		
Ist eine Parabel durch die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ gegeben, so ist sie symmetrisch zu der Geraden mit der Gleichung $x = -\frac{b}{2a}$.		

Aufgabe 7

Eine Brücke soll durch einen Parabelbogen gestützt werden (siehe Photo). Die Spannweite am waagrechten Boden soll 40m betragen und die Scheitelhöhe 60m. Die Symmetrieachse des Bogens soll senkrecht auf den waagrechten Boden stehen.

a) Benütze ein Koordinatensystem, dessen x-Achse parallel zum Boden durch den Parabelscheitel verläuft, und dessen y-Achse senkrecht dazu durch den Scheitel verläuft. Wie lautet die Parabelgleichung in diesem Koordinatensystem? (1LE= 1m)

Antwort:

b) Welche Gleichung hat die Parabel in dem Koordinatensystem, dessen x-Achse durch die beiden Fußpunkte und dessen y-Achse senkrecht dazu durch den Scheitel verläuft?

Antwort:

bitte wenden

Aufgabe 8

Die Parabel P ist durch die Gleichung $y = \frac{1}{6}(x-2)^2 + 1$ gegeben. Bestimme die Koordinaten ihres Brennpunkts F und die Gleichung ihrer Leitgeraden l.

Hinweis: Betrachte zunächst die Parabel P', die durch die Gleichung $y = \frac{1}{6}x^2$ beschrieben wird. Bestimme die Koordinaten des Brennpunkts F' und die Gleichung der Leitgeraden l'. Überlege dann, wie P' verschoben werden muss, um P zu erhalten.

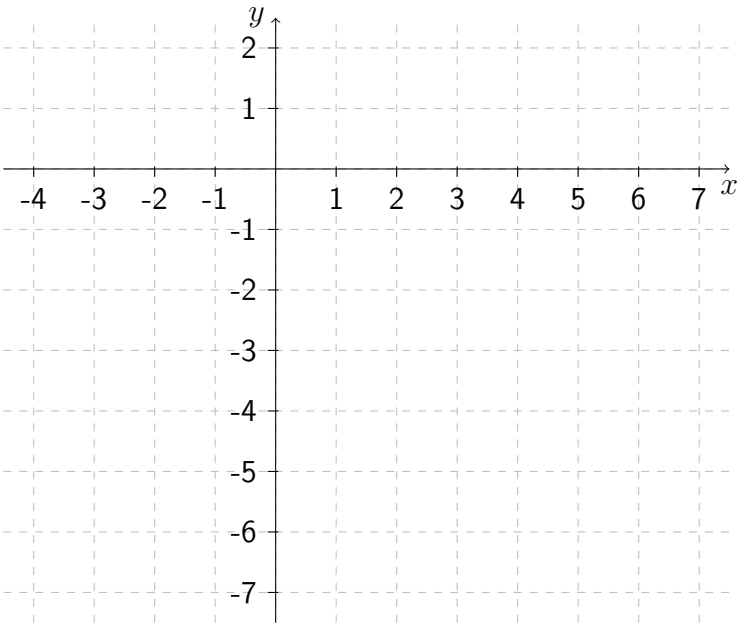
Koordinaten von F':	$\left(\quad\quad\right)$	Gleichung der Leitgeraden l':	
Koordinaten von F:	$\left(\quad\quad\right)$	Gleichung der Leitgeraden l:	

Aufgabe 9

Gegeben ist die Parabel P mit dem Brennpunkt $F(2 \mid -2)$ und der Leitgeraden $l = \{(x \mid y) : y = x\}$.

a) Zeichne den Brennpunkt F, die Leitgerade l und den Scheitelpunkt S ins Koordinatensystem ein. Konstruiere mindestens sechs weitere Punkte der Parabel und zeichne dann die Parabel.

Hinweis: Du kannst Parallelen zur Leitgeraden mit Hilfe des Geodreiecks zeichnen.



b) Zeichne die Symmetrieachse von P in das Koordinatensystem ein. Gib die Gleichung der Symmetrieachse an: $\boxed{\quad\quad\quad}$

c) **Zusatzaufgabe:** Zeichne einen weiteren Punkt Q der Parabel ein, der nicht der Scheitel der Parabel P ist. Nimm an, die Koordinaten des Punktes Q seien $(x \mid y)$. Leite eine Gleichung für x, y her, die genau dann erfüllt ist, wenn Q auf der Parabel liegt.

Hinweis: Der Abstand des Punktes $Q(x \mid y)$ von l ist gegeben durch $d(Q, l) = \frac{1}{\sqrt{2}}|x + y|$. Die Gleichung, die man für die Parabel erhält, kann weder nach x noch nach y eindeutig aufgelöst werden.

Rechnung zu Teil c):

Zusatzblatt
Zur eigenen Bearbeitung

Zusatzaufgabe 1

a) Bestimme die Koordinaten des Scheitels S der Parabel, die durch die Gleichung $y = x(1-x)$ beschrieben wird. Was ist der maximale Funktionswert, den die Funktion f mit $f(x) = x(1-x)$ für $x \in \mathbb{R}$ annimmt?

b) Folgere aus a), welches das Maximum der Funktion g mit $g(x) = x^2(1-x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$ und welches das Maximum der Funktion h mit $h(x) = x\sqrt{1-x^2}$ für $x \in [0,1]$ ist. Für welchen x-Wert werden die Maxima angenommen?

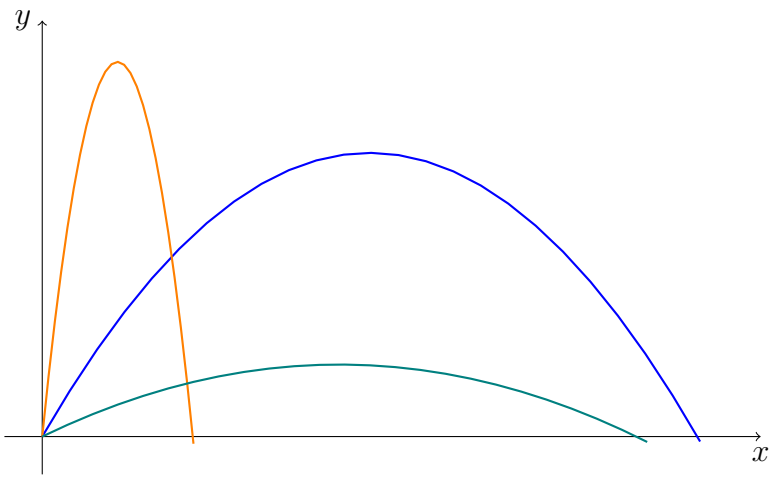
c) Ein Ball wird vom Punkt $(0 \mid 0)$ aus in Richtung des Vektors $c\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ geworfen. c gibt den Betrag der Geschwindigkeit und φ den Winkel zwischen Wurfrichtung und x-Achse an. Der Ball fliegt längs einer parabelförmigen Bahn mit der Gleichung

$$y = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}x - 10\frac{x^2}{c^2\cos^2\varphi}$$

Berechne die x-Koordinate des Punktes, an dem der Ball auf den Boden ($y = 0$) auftrifft. Für welchen Wert von $\cos\varphi$ fliegt der Ball am weitesten (bei konstantem c)?

Hinweis: Verwende $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$ und das Ergebnis aus Teil b).

Plots von Wurfparabeln mit der selben Anfangsgeschwindigkeit und verschiedenen Wurfrichtungen:



Hinweis zur Lösungskontrolle: $x_{\max} = \frac{c^2}{10} \cdot \frac{1}{2}$.

Anmerkung: Die hier benützten Formeln gelten nur im Vakuum. In der Realität wird der Ball durch den Luftwiderstand abgebremst. Dann ist die Flugkurve keine Parabel, und der optimale Wurfwinkel ist kleiner als $45°$. Die Bahnkurve mit Luftreibung kann unter gewissen vereinfachenden Annahmen analytisch berechnet werden. Siehe z.B. `https://matheplanet.de/default3.html?article=735`.

10 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 3: Parabel und Tangente

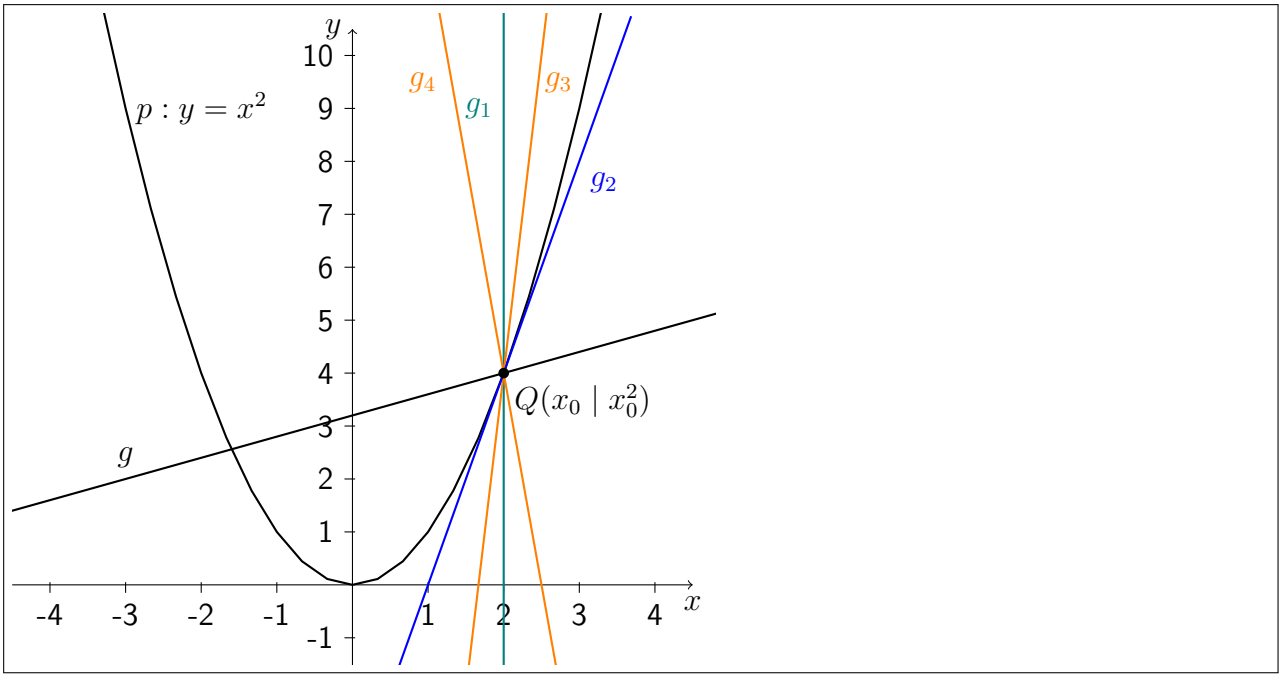
10.1 Tafelanschriebe

Für den Online-Video-Kurs steht kein OH-Projektor zur Verfügung. Deshalb wurde mehr an der Tafel angeschrieben.

3. Parabel und Tangente

Nach der Begrüßung und der Überschrift wird AB 1 bearbeitet und besprochen.

Hier wird AB 2 ausgeteilt. Auf AB 2 werden unten stehende Vorschläge für Geraden eingezeichnet



Geradengleichungen: $g : y = mx + b$ bedeutet $g = \{(x, y) : y = mx + b\}$. m heißt Steigung der Geraden.

Punktsteigungsform: $g : y = m(x - x_0) + y_0$ geht durch den Punkt (x_0, y_0) und hat die Steigung m.

Gerade $g : y = m(x - x_0) + x_0^2$ geht durch $Q(x_0 \mid x_0^2)$.

Schnitt mit p:

Gleichsetzen:
$$\begin{aligned} & y = x^2 \ \wedge \ y = m(x - x_0) + x_0^2 \\ \Rightarrow \quad & x^2 = m(x - x_0) + x_0^2 && \mid -x_0^2 - m(x - x_0) \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{x^2 - x_0^2}_{=(x-x_0)(x+x_0)} - m(x - x_0) = 0 && \mid \text{Ausklammern} \\ \Leftrightarrow \quad & (x - x_0)(x + x_0 - m) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = x_0 \ \vee \ x = m - x_0 \end{aligned}$$

Beide Schnittpunkte sollen gleich sein: $x_0 = m - x_0 \ \Leftrightarrow \ 2x_0 = m$.

Gesuchte Gerade: $g : y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$.

Satz: Sei die Parabel $p : y = x^2$ und der Punkt $Q(x_0, x_0^2)$ auf der Parabel gegeben. Dann gibt es genau eine Gerade g durch Q, die nicht parallel zur y-Achse ist und mit p nur den Punkt Q gemeinsam hat, nämlich $g : y = 2x_0x - x_0^2$.

Beweis: Letzte Rechnung

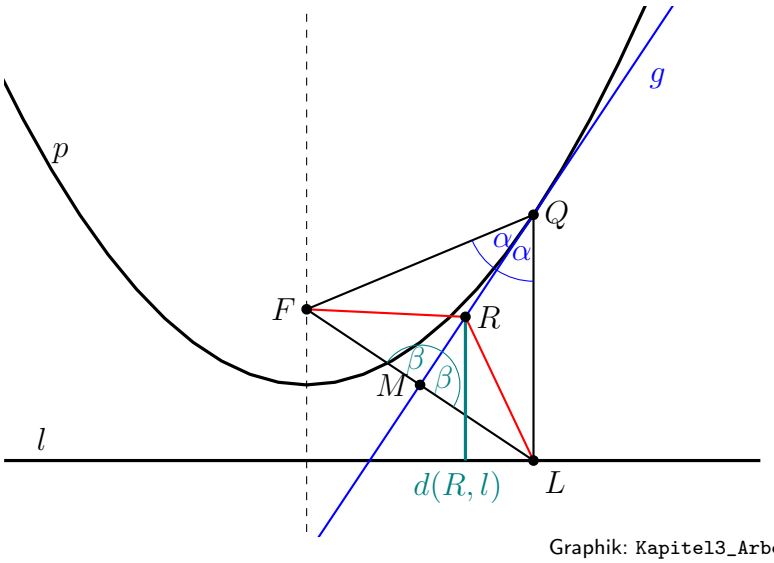
Definition: Diese Gerade heißt Tangente an p in Q. Die Steigung $2x_0$ der Tangente heißt Ableitung der Parabelfunktion $f(x) = x^2$ in x_0, geschrieben $f'(x_0) = 2x_0$.

Hier wird AB 3 bearbeitet und besprochen.

Hier wird AB 4 ausgeteilt, der Satz mit Beweis wird auf dem AB notiert.

Satz: Sei eine Parabel p mit Leitgerade l und Brennpunkt F gegeben. Für einen Punkt Q auf p sei g die Winkelhalbierende der Strecken QL und QF (L bezeichnet den Lotfußpunkt von Q auf l). Dann ist g die Tangente an p in Q.

Beweis:



Graphik: Kapitel3_Arbeitsblatt4_2.ggb

1) Die Winkelhalbierende g ist gleichzeitig die Mittelsenkrechte der Strecke FL, denn:

   Die Dreiecke MQF und LQM sind nach sws kongruent

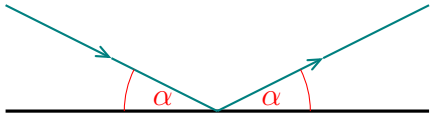
   $\Rightarrow \begin{cases} \text{bei } M \text{ gilt } 2\beta = 180°, \text{ also } \beta = 90° \\ \overline{MF} = \overline{ML} \end{cases}$

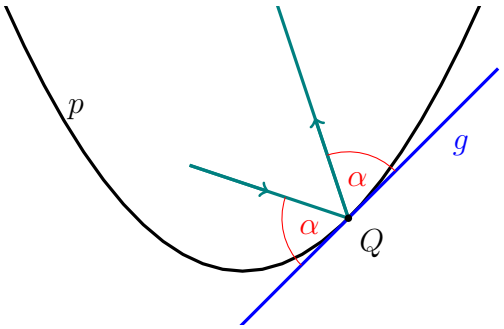
2) g und p haben nur den einen Punkt Q gemeinsam, denn:

   Sei $R \neq Q$ ein beliebiger Punkt auf g.
   g ist Mittelsenkrechte $\Rightarrow \overline{RF} = \overline{RL}$.
   $Q \neq R \Rightarrow$ L ist nicht Lotfußpunkt von R
   $\Rightarrow d(R, l) \neq \overline{RL}$
   $\Rightarrow d(R, l) \neq \overline{FR}$
   $\Rightarrow$ R liegt nicht auf p $\square$

Hier wird AB 5 bearbeitet und besprochen.

Physik: Ein Lichstrahl wird an einem Spiegel so reflektiert, dass Einfallswinkel = Ausfallswinkel gilt. Bei gekrümmten Spiegeln verwendet man die Tangente zur Bestimmung der Reflexionsrichtung.



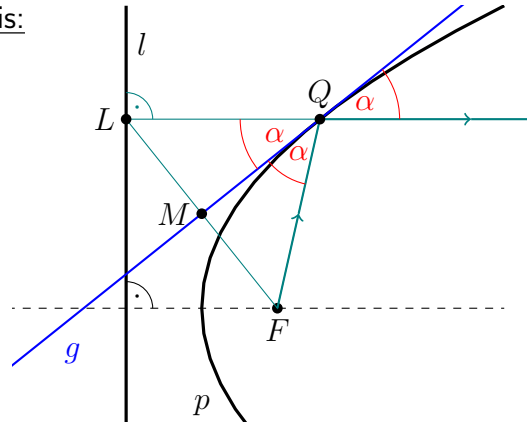


Graphik: Kapitel3_Parabelspiegel.ggb

Hier wird AB 6 ausgeteilt, der Satz *Parabelspiegel* wird auf dem AB notiert.

Parabelspiegel: Sei ein Spiegel in einer Richtung parabelförmig gekrümmt. Ein Lichstrahl, der vom Brennpunkt F ausgeht und die Parabel trifft, verläuft nach der Reflexion senkrecht zur Leitgeraden.

Beweis:

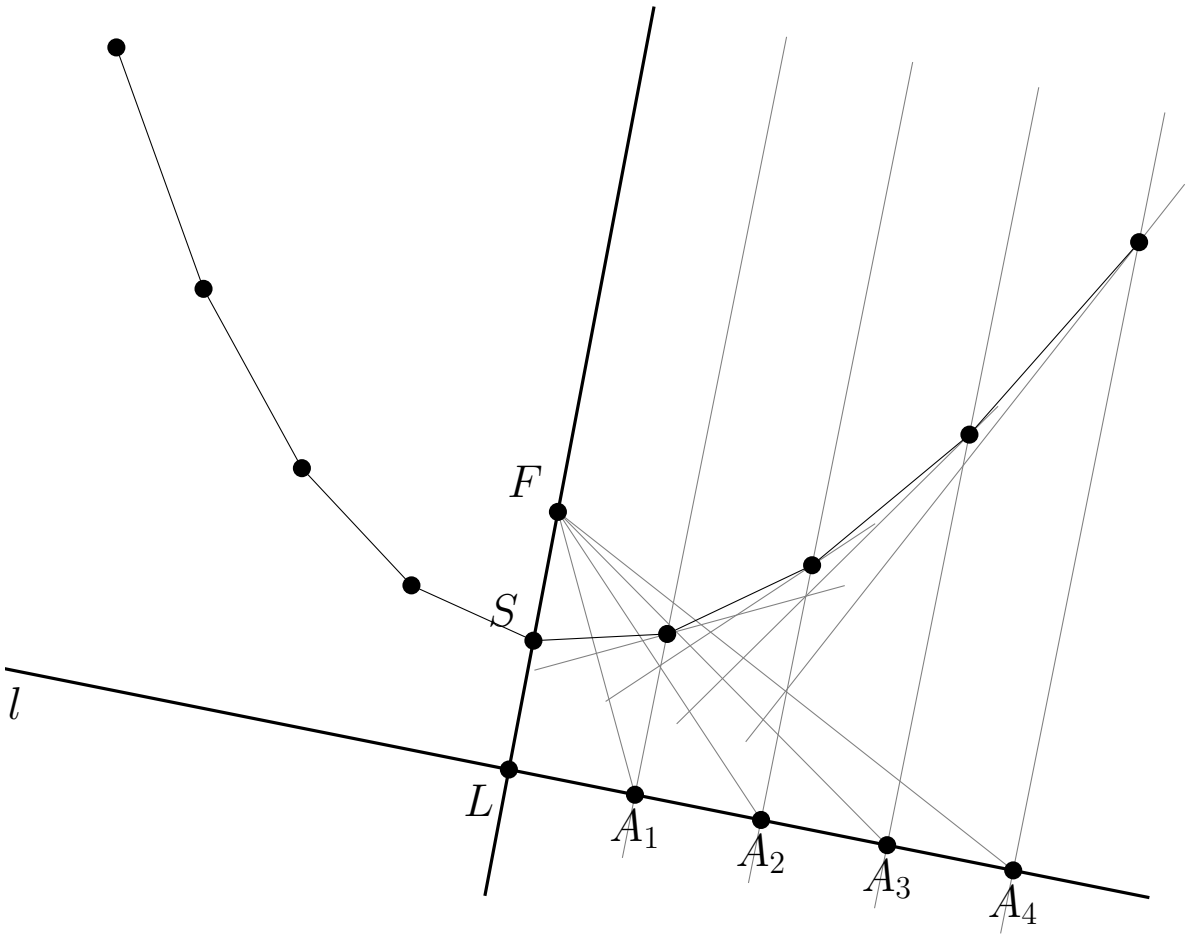


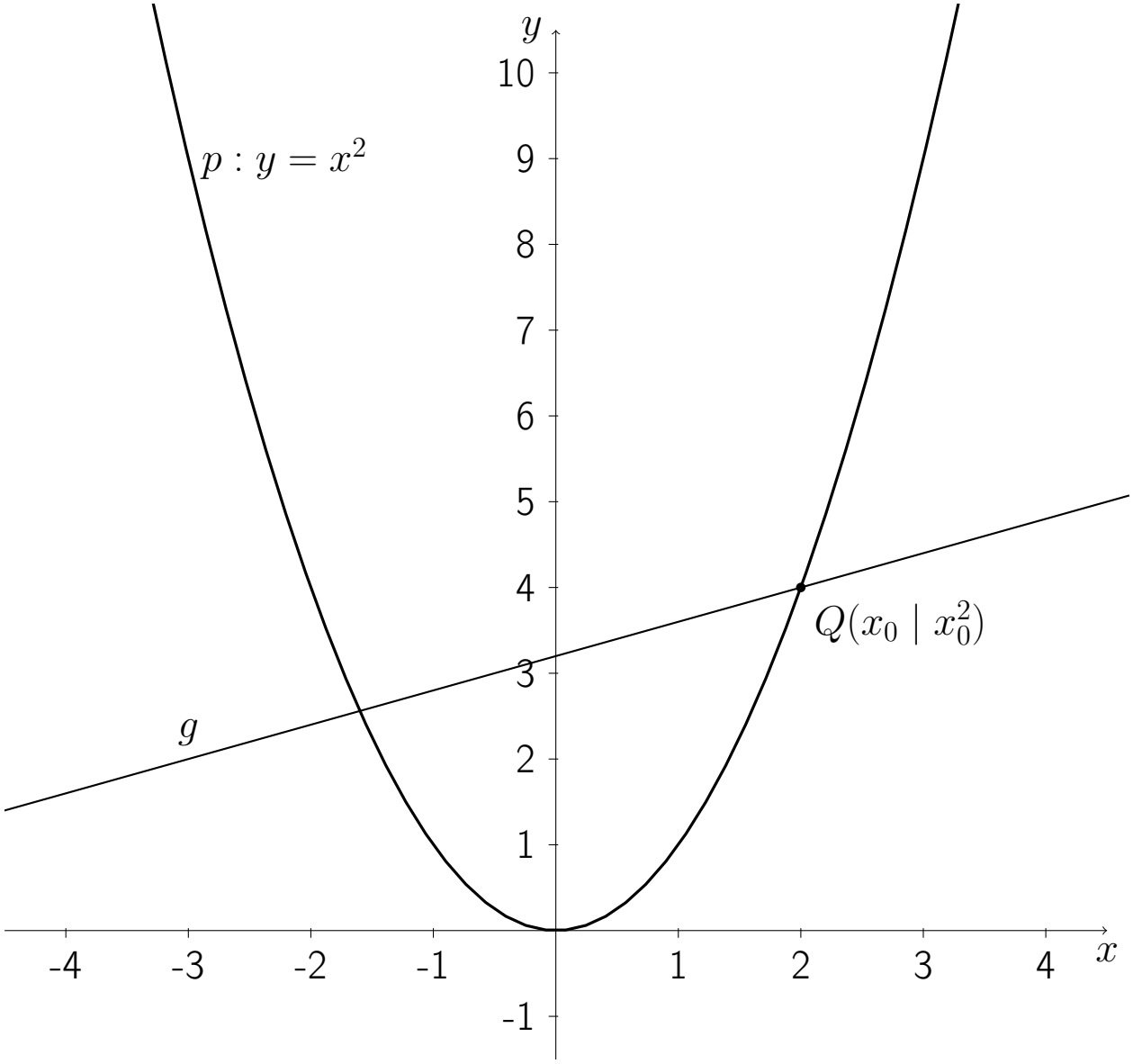
Seien Q der Punkt, in dem der Lichtstrahl auf p trifft, L der Lotfußpunkt von Q, g die Tangente an p in Q und α der Winkel zwischen FQ und g.
g ist Winkelhalbierende $\Rightarrow$ LQ schließt mit g den Winkel α ein.
Die Verlängerung der Strecke LQ ist senkrecht auf l und schließt mit g den Winkel α ein (Scheitelwinkel).
$\Rightarrow$ Der reflektierte Lichtstrahl verläuft längs dieser Verlängerung, also senkrecht zu l.

Graphik: `Kapitel3_Arbeitsblatt4_4.ggb`

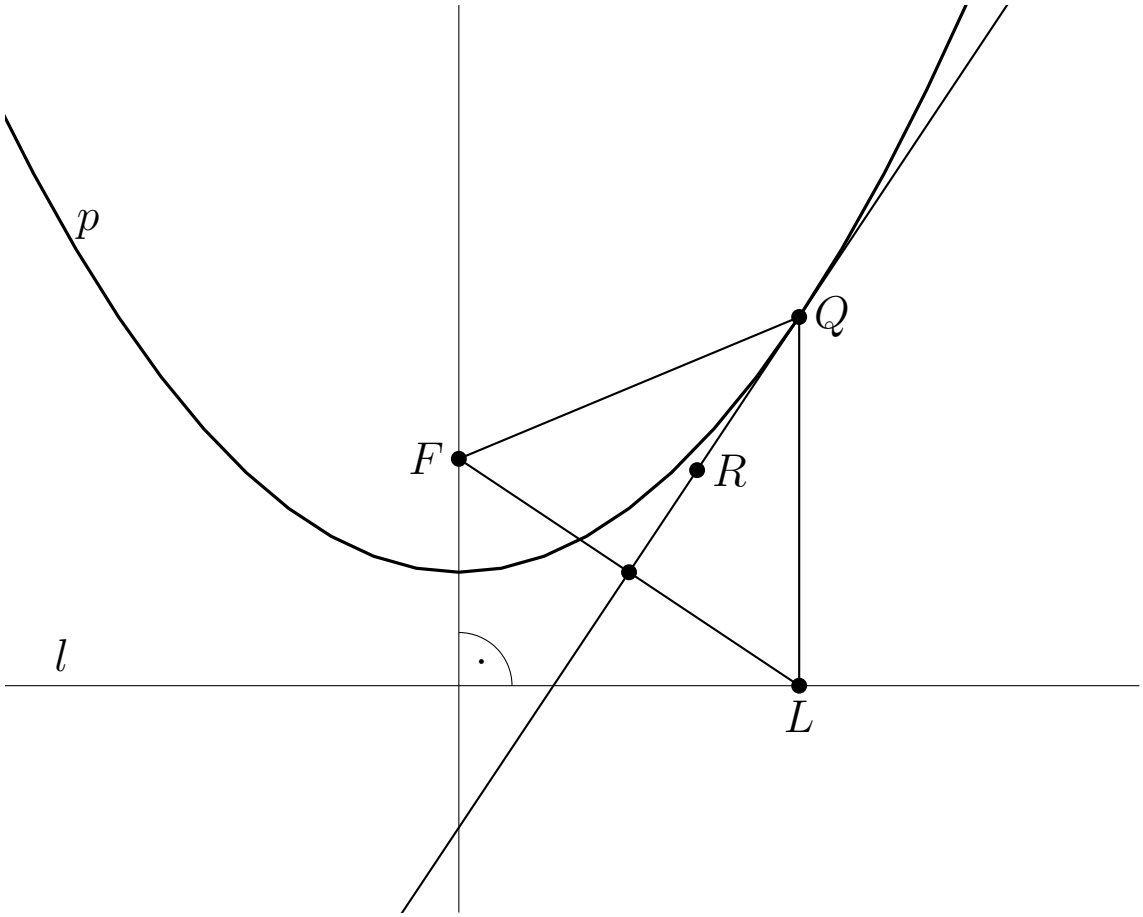
10.2 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

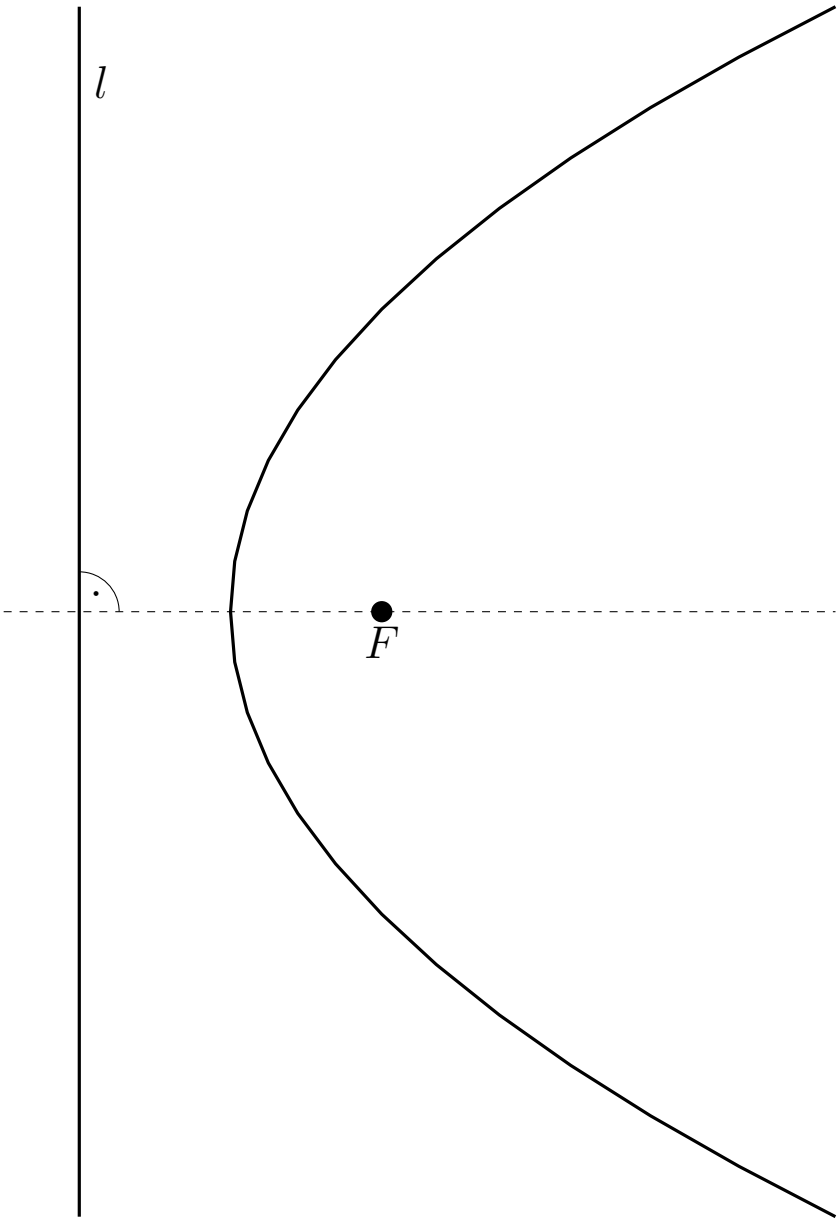

F
S
l
L
A_1
A_2
A_3
A_4

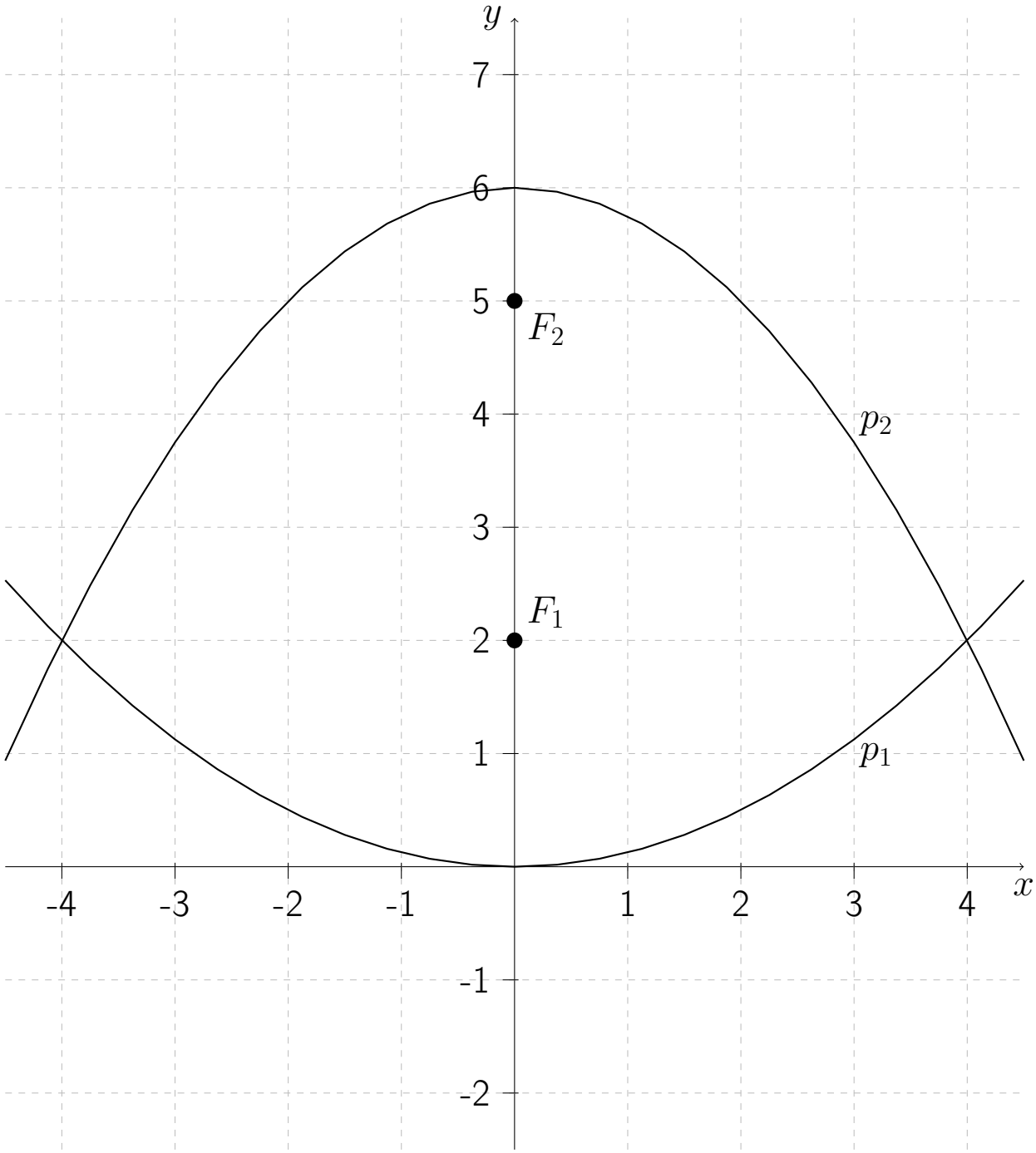

y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
$p : y = x^2$
g
$Q(x_0 \mid x_0^2)$
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x

Satz:



Parabelspiegel:




y
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
F_2
F_1
p_2
p_1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x

Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1

Eine Parabel ist definiert durch eine Leitgerade l und einen Punkt F, der nicht auf l liegt. Die Parabel p ist die Menge aller Punkte Q, für die gilt: $d(Q, l) = \overline{QF}$. Das bedeutet, dass der Punkt Q von der Leitgeraden und vom Brennpukt F denselben Abstand hat. Der Punkt S, der das Lot von F auf l halbiert, liegt auf p und heißt Scheitelpunkt.

Nun sollen weitere Punkte der Parabel konstruiert werden. Dazu wird folgendes Verfahren benützt:

1. Wähle einen beliebigen Punkt A auf der Leitgeraden.
2. Zeichne die Gerade g senkrecht zu l durch A.
3. Konstruiere die Mittelsenkrechte m von A und F.
4. Der Schnittpunkt Q von m und g liegt auf der Parabel.

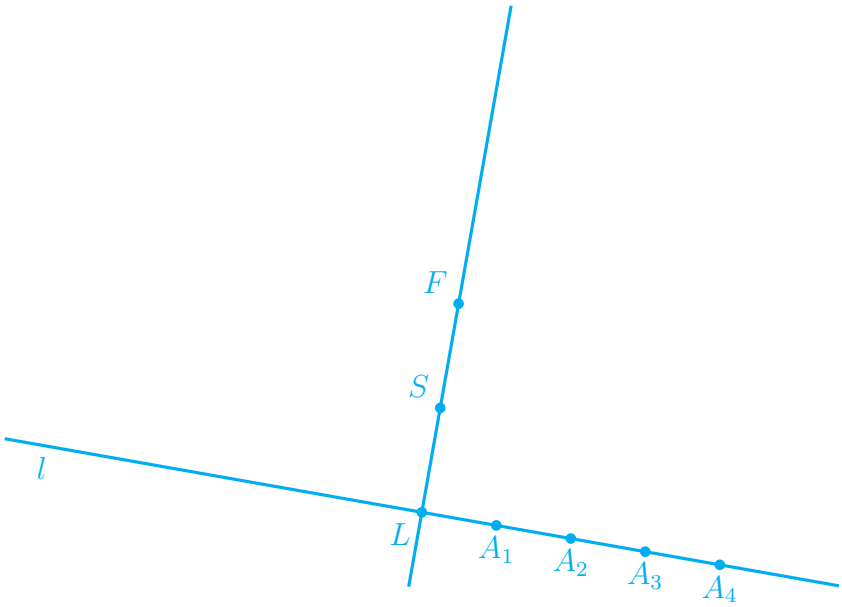
a) Führe die angegebene Konstruktion für die angegebenen Punkte $A_1, \ldots, A_4$ durch.

Hinweis: Du kannst die Mittelsenkrechten mit dem Geodreieck zeichnen, Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist nicht verlangt.

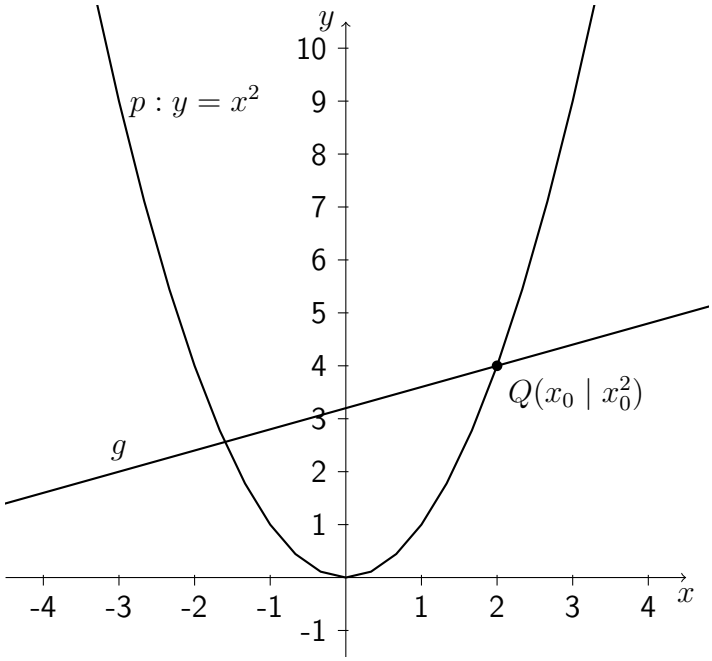
b) Es ist bekannt, dass p achsensymmetrisch zum Lot von F auf l ist. Spiegle Deine Punkte am Lot und skizziere p.

Hinweis: Es genügt, die Spiegelpunkte mit dem Geodreieck zu konstruieren.

c) **Zusatzaufgabe:** Begründe, warum die Konstruktion Punkte auf der Parabel p ergibt.



Arbeitsblatt 2



Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = x^2$ und ein Punkt $Q(x_0 \mid x_0^2)$ auf der Parabel.

Gibt es Geraden durch Q, die keinen weiteren Schnittpunkt mit p haben?

Arbeitsblatt 3

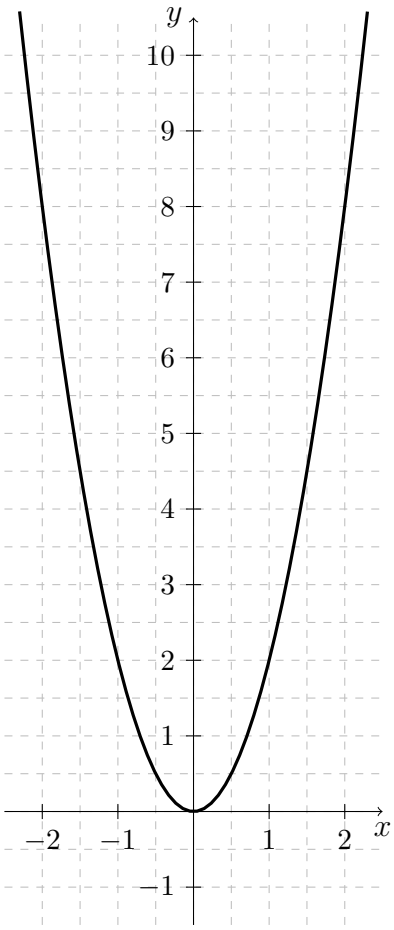
Aufgabe 2

a) Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = 2x^2$ und der Punkt $Q(x_0 \mid 2x_0^2)$ auf p.

- **a₁)** Wie muss die Steigung der Geraden $g : y = m(x - x_0) + 2x_0^2$ gewählt werden, damit g und p nur den Punkt Q gemeinsam haben?
- **a₂)** Gib die Gleichung der Tangente g an p im Punkt $Q(x_0 \mid 2x_0^2)$ an.
- **a₃)** Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an p in $Q_1(2 \mid 8)$ und in $Q_2(-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2})$?
- **a₄)** Zeichne die Punkte Q_1, Q_2 und die ermittelten Tangenten an p in die Graphik ein.

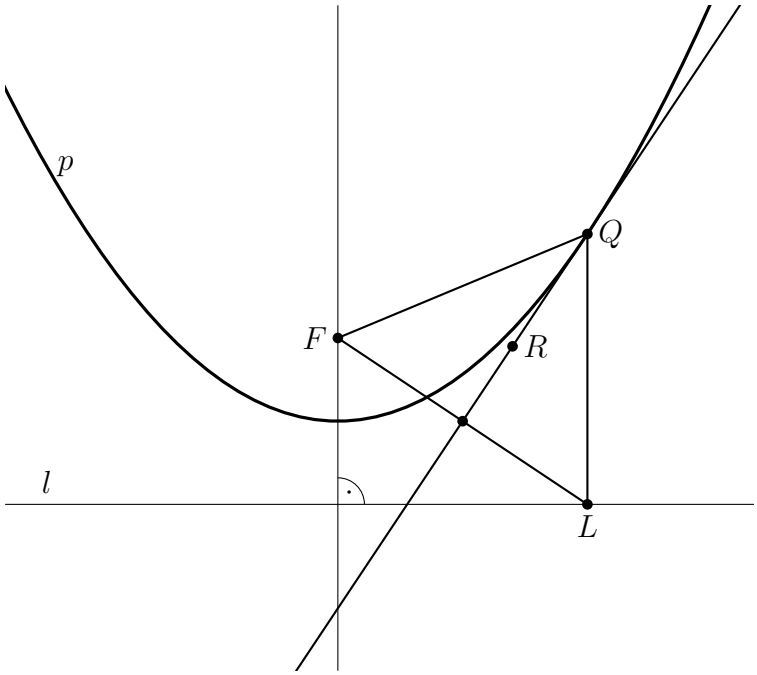
b) **Zusatzaufgabe:** Sei $a > 0$ fest, p die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ und $Q(x_0 \mid ax_0^2)$ ein Punkt auf der Parabel. Zeige, dass es genau eine Gerade g durch Q gibt, die nicht parallel zur y-Achse ist und mit p nur den Punkt Q gemeinsam hat. Gib die Geradengleichung an.

Lösung zu a):



Arbeitsblatt 4

Satz:



Arbeitsblatt 5

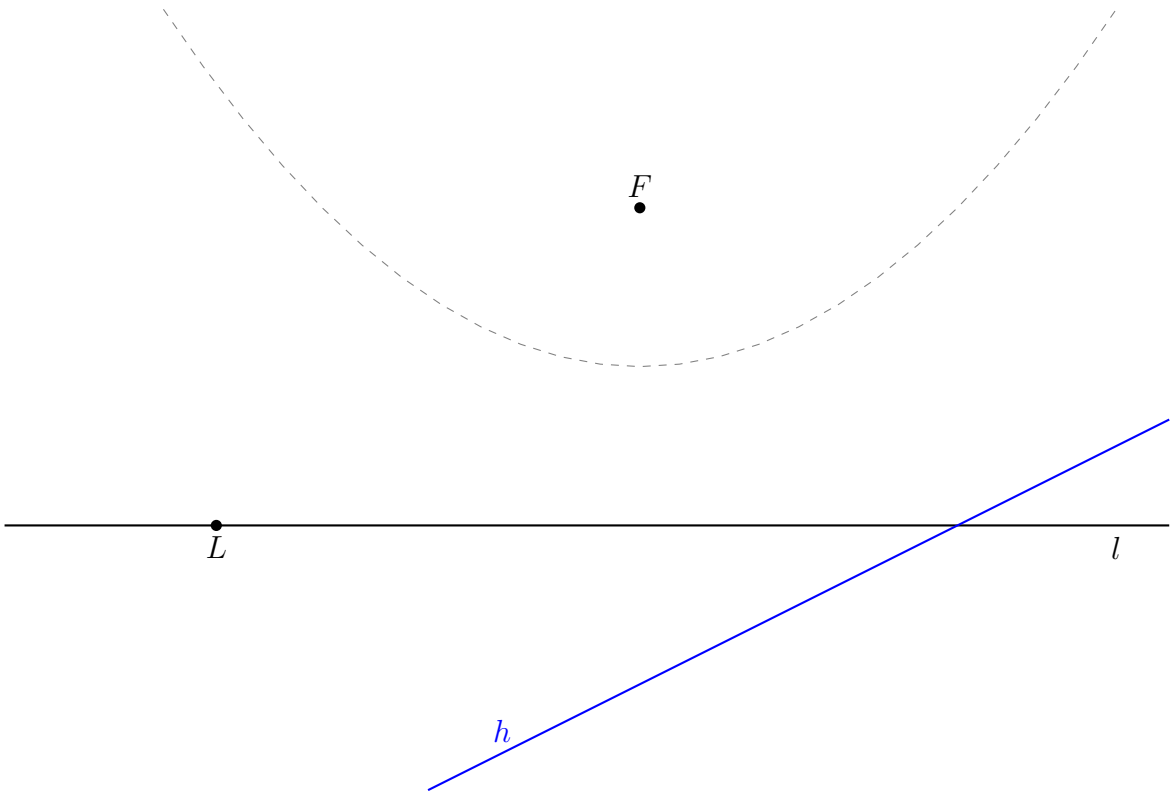
Aufgabe 3

Gegeben sind die Parabel p durch den Brennpunkt F und die Leitgerade l und eine Gerade h (siehe unten stehende Graphik).

a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal den Punkt Q auf p, der den eingezeichneten Punkt L als Lotfußpunkt besitzt.
Hinweis: Die Orthogonale zu einer Geraden durch einen Punkt haben wir in Einheit 1 konstruiert. Die Konstruktion klappt auch, wenn der Punkt auf der Geraden liegt.

b) Die Tangente an p in Q hast Du bereits konstruiert. Warum? Zeichne die Tangente ein.

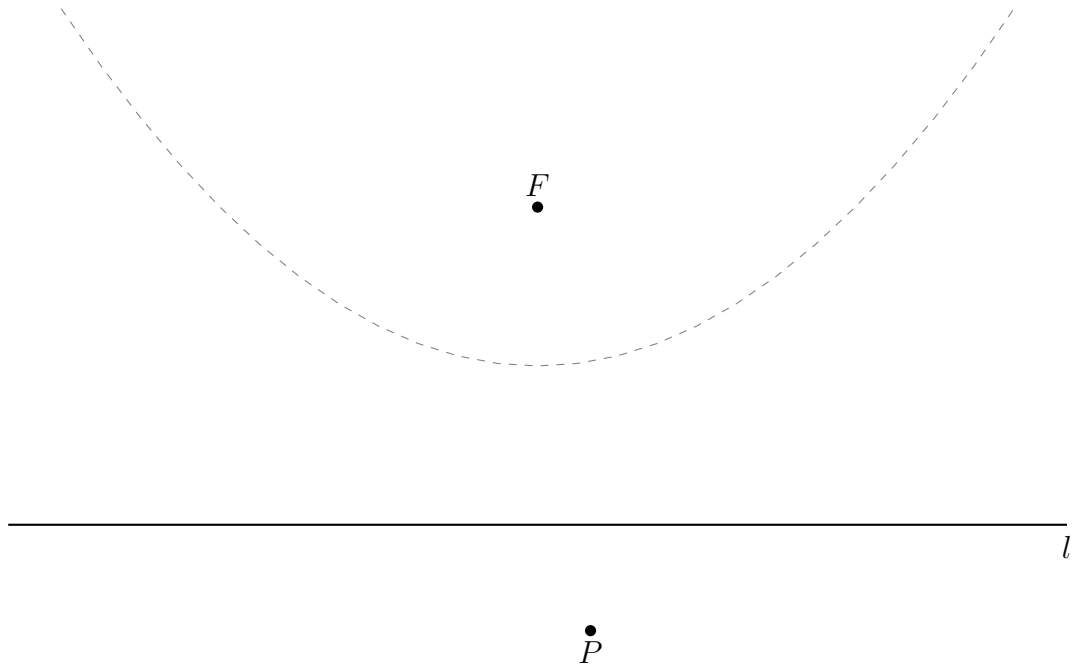
c) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangente an p, die parallel zu der eingezeichneten Geraden h ist, und ihren Berührpunkt R an p.
Hinweis: Konstruiere zunächst den Lotfußpunkt von R auf l.



Bitte wenden

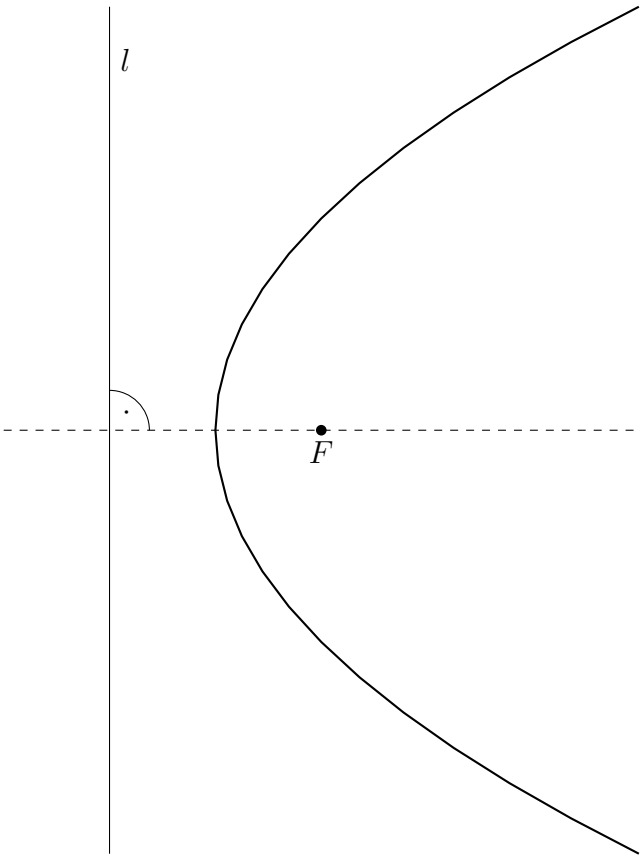
Zusatzaufgabe 1

Gegeben ist eine Parabel p durch den Brennpunkt F und die Leitgerade l, siehe unten. Konstruiere die zwei Parabelpunkte, deren Tangenten an p durch den eingezeichneten Punkt P verlaufen sowie die Tangenten.
Hinweis: Ist Q ein Punkt auf p und L_Q der Lotfußpunkt von Q auf l, so liegt der Mittelpunkt M_Q der Strecke FL_Q auf der Geraden durch den Scheitel S der Parabel, die parallel zu l ist. M_Q liegt außerdem auf der Tangente an die Parabel in Q. Konstruiere zunächst S und die Parellele zu l durch S. Verwende den Satz des Thales, um M_Q zu konstruieren.



Arbeitsblatt 6

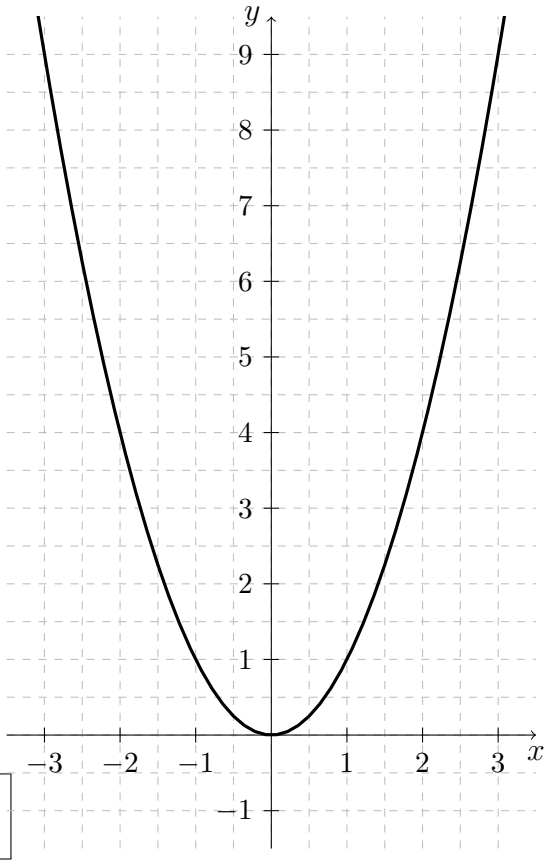
Parabelspiegel:



Schriftliches Arbeitsblatt

Aufgabe 4

Gegeben ist die Parabel p mit der Gleichung $y = x^2$.



a) Gib die Koordinaten des Brennpunktes und die Gleichung der Leitgeraden an. Zeichne beides in der Graphik ein.

$F(\quad | \quad)$, l :

b) Gib die Gleichung der Tangente im Punkt $Q(-1,5 \mid 2,25)$ an und zeichne Punkt und Tangente in der Graphik ein.

Tangente g_Q :

c) Bestimme rechnerisch den Punkt R auf der Parabel, dessen Tangente die Steigung $m = 5$ besitzt. Gib die Gleichung der Tangente an und zeichne Punkt und Tangente in der Graphik ein.

$R(\quad | \quad)$, g_R :

Aufgabe 5

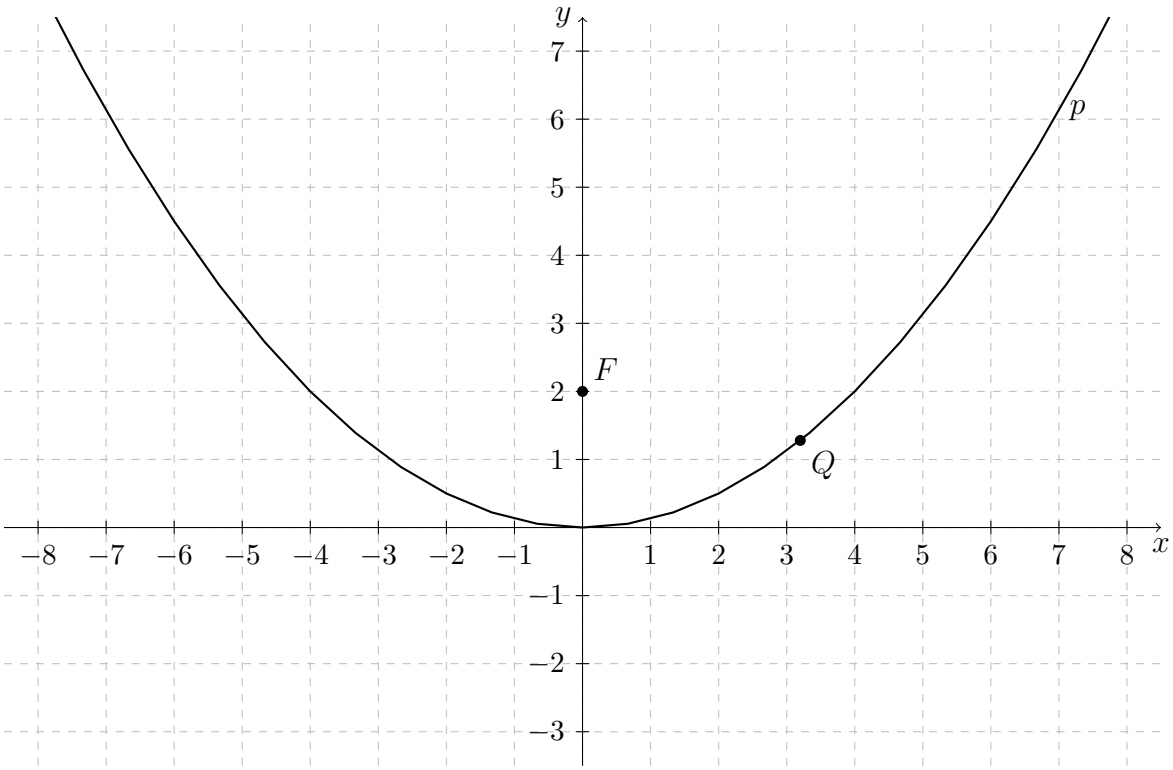
Wahr oder falsch?

	w/f
Durch jeden Punkt der Parabel gibt es genau eine Gerade, die nur einen gemeinsamen Punkt mit der Parabel besitzt.	
Die Tangente im Scheitelpunkt einer Parabel ist parallel zur Leitgeraden.	
In jedem Punkt einer Parabel gibt es genau eine Tangente.	
Es gibt auf jeder Parabel Punkte, in denen es keine Tangente an die Parabel gibt.	
Sei eine Parabel gegeben, deren Leitgerade parallel zur x-Achse ist. Dann gibt es zu jeder Steigung m eine Tangente, die diese vorgegebene Steigung besitzt.	
Sei eine Parabel gegeben, deren Leitgerade parallel zur y-Achse ist. Dann gibt es zu jeder Steigung m eine Tangente, die diese vorgegebene Steigung besitzt.	

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 6

Gegeben ist folgende Parabel p:



a) Ermittle die Leitgerade l und zeichne sie ein.

b) Konstruiere die Tangente an p im Punkt Q mit Zirkel und Lineal.

Ein vom Brennpunkt F ausgehender Lichtstrahl trifft im Punkt Q auf die Parabel und wird dort reflektiert.

c) Zeichne den Verlauf des Lichtstrahls rot in die Zeichnung ein.

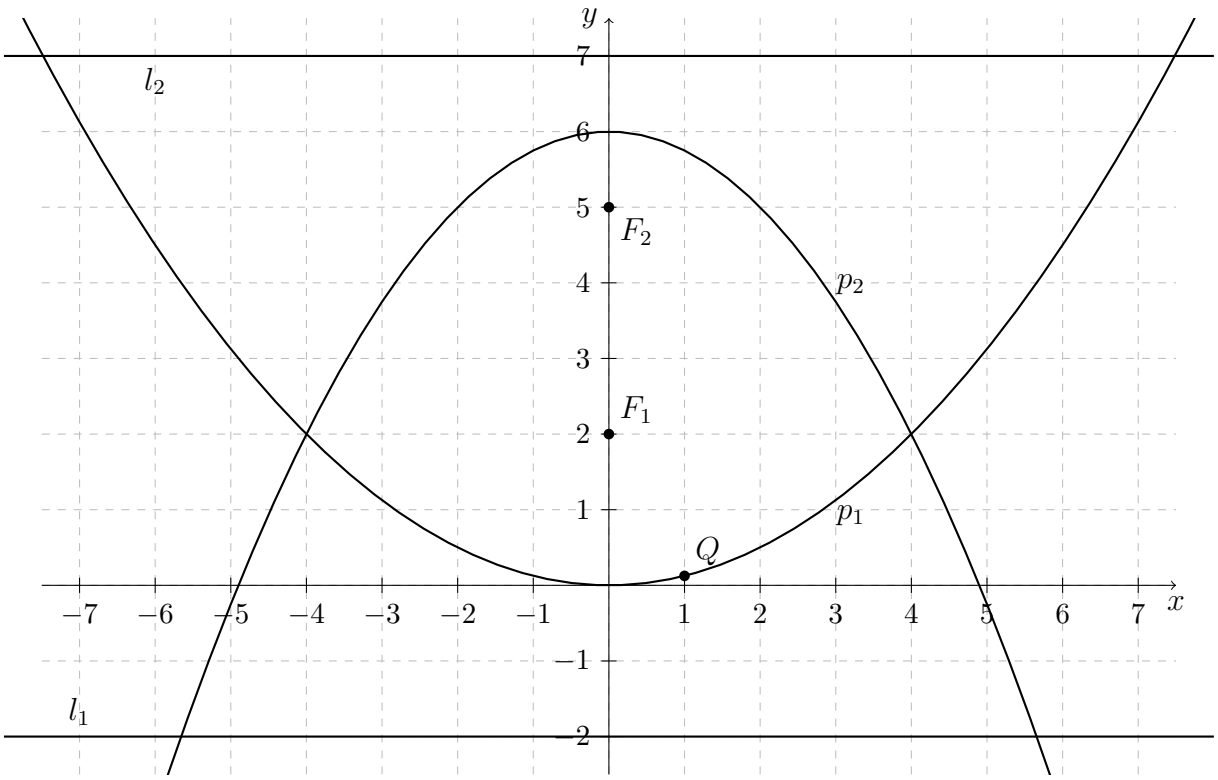
Nun sollen Lichstrahlen betrachtet werden, die von F ausgehen und durch den Punkt $P(-4 \mid 4)$ gehen.

d) Bestimme alle möglichen Reflexionspunkte zeichnerisch. Zeichne den Verlauf der Lichtstrahlen grün ein.

Weiter auf Seite 3

Aufgabe 7

Gegeben sind die beiden Parabeln $p_1 : y = \frac{1}{8}x^2$ und $p_2 : y = 6 - \frac{1}{4}x^2$ mit den Brennpunkten $F_1(0 \mid 2)$ und $F_2(0 \mid 5)$ bzw. den Leitgeraden $l_1 : y = -2$ und $l_2 : y = 7$. Außerdem ist der Punkt $Q(1 \mid \frac{1}{8})$ gegeben.



a) Ein von F_1 ausgehender Lichtstrahl trifft im Punkt Q auf p_1 und wird dort reflektiert, trifft dann auf p_2 und wird wieder reflektiert. Zeichne mit roter Farbe den Verlauf des Lichtstrahls ein, bis er F_2 erreicht.

b) Wähle einen weiteren Reflexionspunkt R auf der Parabel p_1 und zeichne mit grüner Farbe den Verlauf des Lichtstrahls ein, bis der Strahl F_2 erreicht.

c) Miss für beide eingezeichneten Lichtstrahlen die Länge des Weges, den der Lichtstrahl von F_1 bis F_2 zurückgelegt hat und vergleiche die beiden Werte.

Gemessene Länge des Lichtstrahls durch Q:	
Gemessene Länge des Lichtstrahls durch R:	
Beobachtung:	

d) **Zusatzaufgabe:** Beweise die folgende Aussage:
„Die zurückgelegte Strecke der Lichtstrahlen, die von F_1 ausgehen, zwei Mal reflektiert werden und in F_2 ankommen, ist gleich dem Abstand der beiden Leitgeraden.“

11 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 4: Ellipsen

11.1 Tafelanschriebe

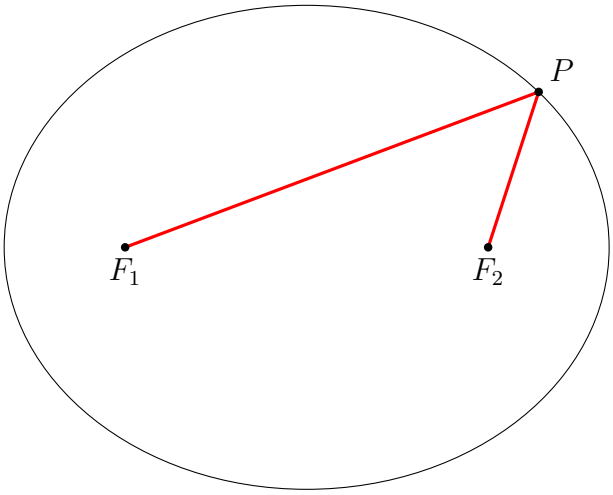
Einstieg: Sinuskurve zusammengerollt

4. Ellipsen

Definition: Eine Ellipse ist gegeben durch zwei Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$. Die Ellipse ist die Menge aller Punkte P, für die gilt:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} \;=\; 2a.$$

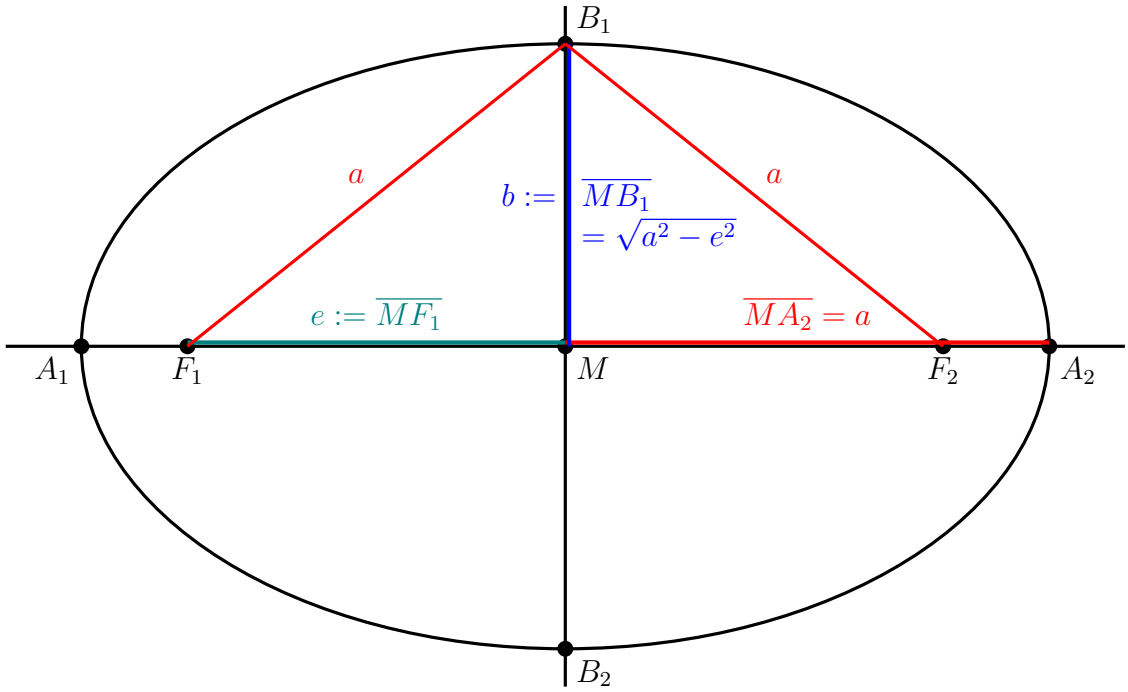
Gärtnerkonstruktion: Einen Faden der Länge $2a$ mit den Enden in F_1 und F_2 befestigen. Mit einem Stift den Faden so entlang fahren, dass der Faden gespannt bleibt.



Arbeitsblatt 1: Gärtnerkonstruktion

Grundlage für die folgende Skizze befindet sich auf Arbeitsblatt 2: Bezteichnungen

Bezeichnungen:



F_1, F_2: Brennpunkte	
Gerade durch F_1 und F_2:	Hauptachse
Mittelsenkrechte zu F_1 und F_2:	Nebenachse
M: Mittelpunkt	Große Halbachse: $\overline{MA_1} = \overline{MA_2}$
A_1, A_2: Hauptscheitel	Kleine Halbachse: $\overline{MB_1} = \overline{MB_2}$
B_1, B_2: Nebenscheitel	Lineare Exzentrizität: $\overline{MF_1} = \overline{MF_2}$

Satz: Es sei eine Ellipse gegeben durch die Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$.

Dann gelten: 1) Für die große Halbachse: $\overline{MA_2} = a$
2) Für die lineare Exzentrizität: $e := \overline{MF_1} = \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$
3) $\overline{F_1B_1} = \overline{F_2B_1} = a$
4) Für die kleine Halbachse: $b := \overline{MB_1} = \sqrt{a^2 - e^2}$

Beweis: 1) A_2 liegt auf der Ellipse
$\Rightarrow \quad 2a = \overline{A_2F_1} + \overline{A_2F_2} = \overline{MA_2} + e + \overline{MA_2} - e = 2\overline{MA_2}$
$\Rightarrow \quad \overline{MA_2} = a$

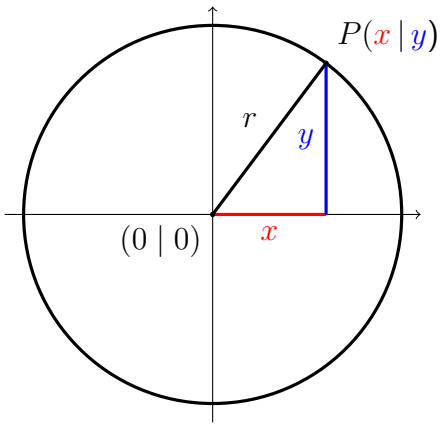
2) Klar

3) Symmetrie $\Rightarrow \overline{F_1B_1} = \overline{F_2B_1}$
B_1 liegt auf der Ellipse $\Rightarrow \; 2a = \overline{F_1B_1} + \overline{F_2B_1} = 2\overline{F_1B_1}$

4) Pythagoras: $a^2 = e^2 + b^2$

Arbeitsblatt 3: Ellipse im Koordinatensystem

Kreisgleichung:



$P(x \mid y)$ liegt auf Kreis

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 \text{ (Pythagoras)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

Ellipsengleichung: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

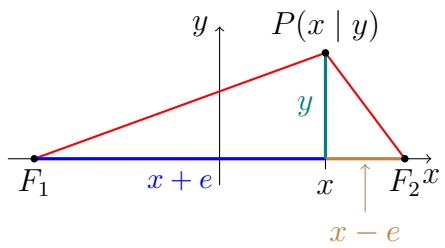
Hilfssatz: Seien $a > b > 0$, $e := \sqrt{a^2 - b^2}$ und die Punkte $F_1(-e \mid 0)$, $F_2(e \mid 0)$ gegeben. Für jeden Punkt $P(x \mid y)$ mit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ gelten:

$$\overline{PF_1} \;=\; a + \frac{e}{a}\,x, \quad \overline{PF_2} \;=\; a - \frac{e}{a}\,x$$

Beweis: 1) Koordinatengleichung nach y^2 auflösen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x^2}_{(*)}$$

2)



$$\begin{aligned}
\overline{PF_1}^2 &= (x+e)^2 + y^2 \\
&= x^2 + 2ex + \underbrace{e^2 + b^2}_{=a^2} - \tfrac{b^2}{a^2}\,x^2 \\
&= x^2\left(1 - \tfrac{b^2}{a^2}\right) + 2ex + a^2 \\
&\overset{(*)}{=} \tfrac{x^2}{a^2}\big(\underbrace{a^2 - b^2}_{=e^2}\big) + 2ex + a^2 \\
&= \left(\tfrac{x}{a}\,e + a\right)^2 \\
\Rightarrow\; \overline{PF_1} &= \left|\tfrac{x}{a}\,e + a\right| \;=\; a + \tfrac{x}{a}\,e.
\end{aligned}$$

Genauso: $\overline{PF_2}^2 = (x-e)^2 + y^2 \;\Rightarrow\; \overline{PF_2} = a - \frac{x}{a}\,e.$ $\square$

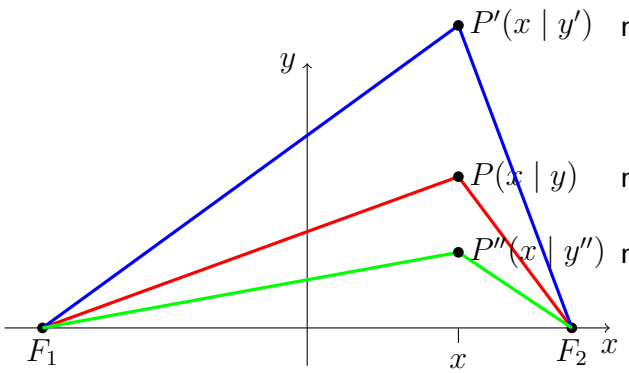
Satz: Seien $a > b > 0$ und $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ beschreibt eine Ellipse mit den Brennpunkten $F_1(-e \mid 0)$, $F_2(e \mid 0)$ und $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

Beweis: 1) Sei $P(x \mid y)$ mit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Dann folgt aus dem Hilfssatz:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} \;=\; a + \frac{e}{a}\,x + a - \frac{e}{a}\,x \;=\; 2a.$$

Also liegt P auf der Ellipse.

2) Punkte, deren Koordinaten die Gleichung nicht erfüllen, liegen nicht auf der Ellipse: Siehe Skizze.



mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} > 1$: Gesamtlänge blau $> 2a$

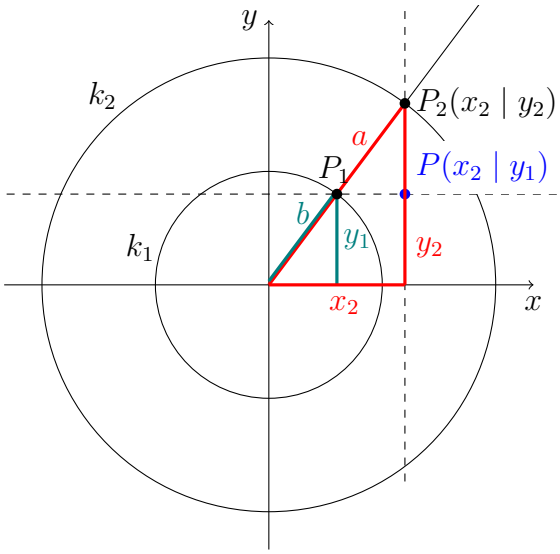
mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: Gesamtlänge rot $= 2a$

mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} < 1$: Gesamtlänge grün $< 2a$

Arbeitsblatt 4: Ellipsengleichungen

Konstruktion von Ellipsenpunkten: Seien $a > b > 0$, k_1 ein Kreis um $(0 \mid 0)$ mit Radius b, k_2 ein Kreis um $(0 \mid 0)$ mit Radius a und $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ die Schnittpunkte einer Ursprungshalbgeraden mit k_1 bzw. k_2.

Dann liegt der Punkt $P(x_2 \mid y_1)$ auf der Ellipse mit der Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



Pythagoras: $x_2^2 + y_2^2 = a^2$

Strahlensatz: $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{b}{a} \;\Rightarrow\; y_1 = \dfrac{b}{a}\,y_2.$

$$\Rightarrow\; \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a}\,y_2\right)^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{a^2} = 1$$

$\Rightarrow$ $P(x_2 \mid y_1)$ liegt auf der Ellipse.

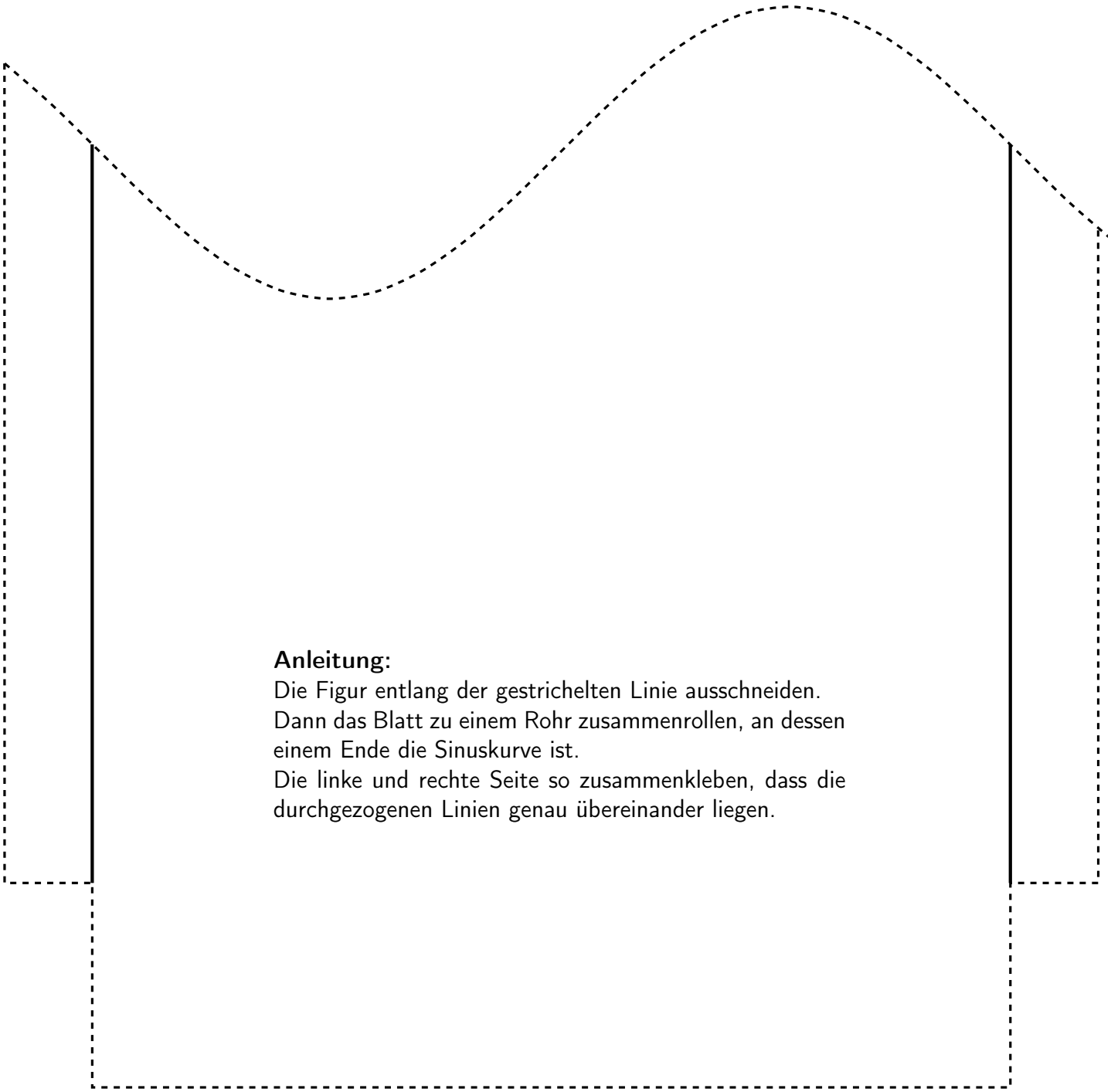
Arbeitsblatt 5: Konstruktion von Ellipsenpunkten

11.2 Bastelanleitung, OH-Folien und Arbeitsblätter

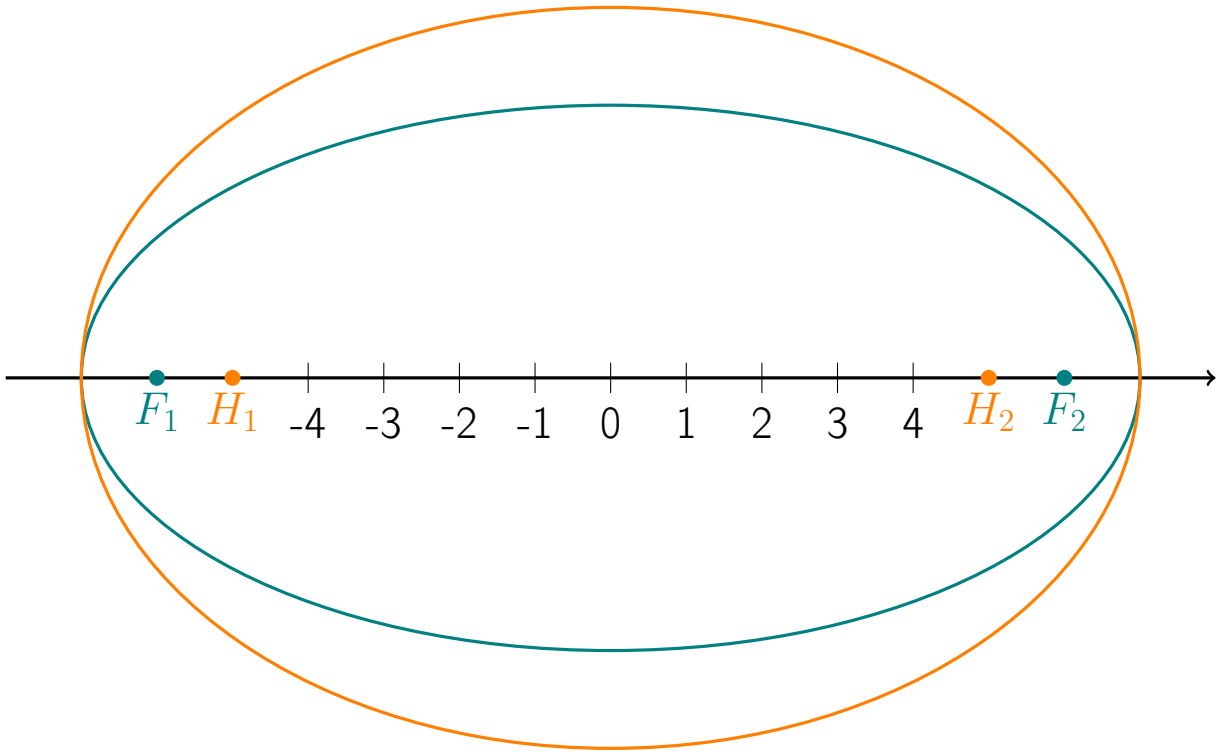
Siehe folgende Seiten

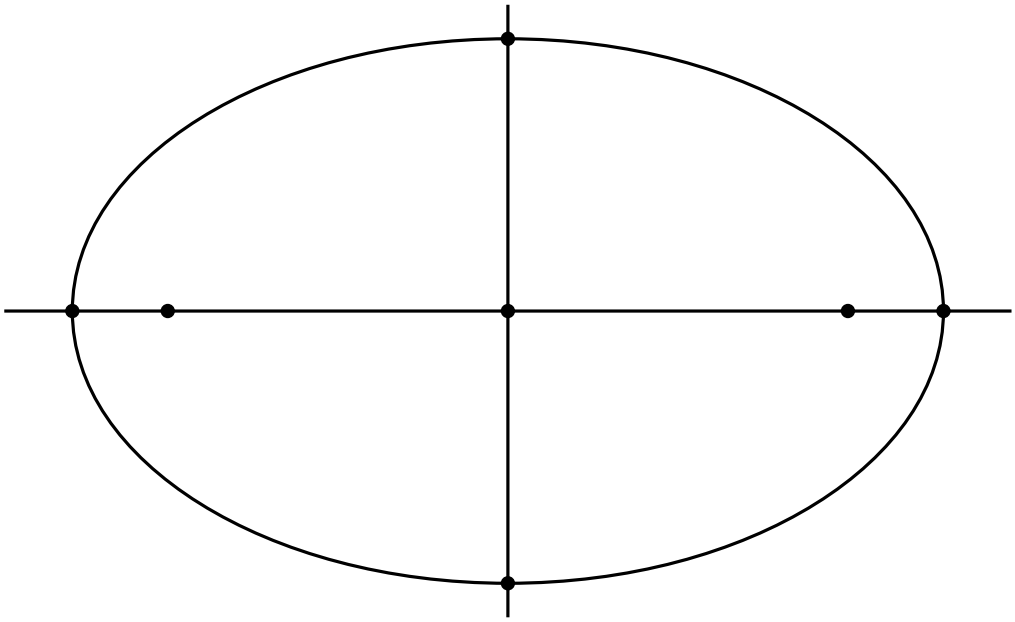
Eine kleine Bastelei

Was passiert, wenn man eine Sinuskurve zusammenrollt?



Anleitung:
Die Figur entlang der gestrichelten Linie ausschneiden.
Dann das Blatt zu einem Rohr zusammenrollen, an dessen einem Ende die Sinuskurve ist.
Die linke und rechte Seite so zusammenkleben, dass die durchgezogenen Linien genau übereinander liegen.


F_1
H_1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
H_2
F_2



F_1, F_2:

Gerade durch F_1 und F_2:

Mittelsenkrechte zu F_1 und F_2:

M: Große Halbachse:

A_1, A_2: Kleine Halbachse:

B_1, B_2: Lineare Exzentrizität:

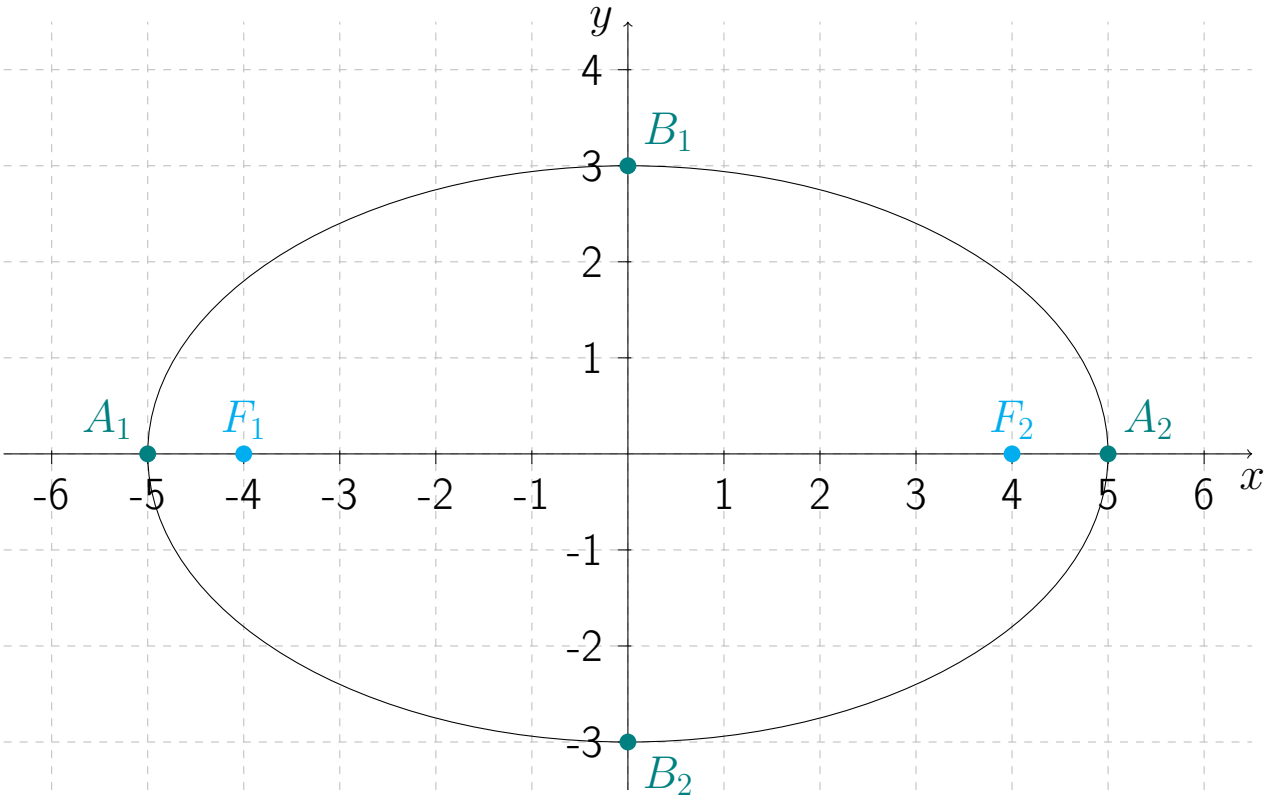
<u>Satz:</u> Es sei eine Ellipse gegeben durch die Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$.

Dann gelten: 1)

2)

3)

4)


y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
B_1
B_2
A_1
A_2
F_1
F_2

Arbeitsblatt 1

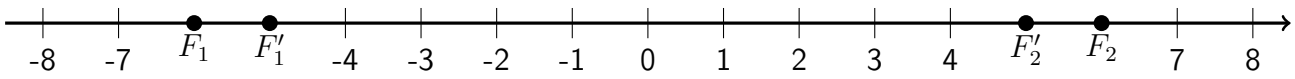
Aufgabe 1

a) Führe die Gärtnerkonstruktion mit einem Faden der Länge 14LE und den Brennpunkten F_1, F_2 durch.

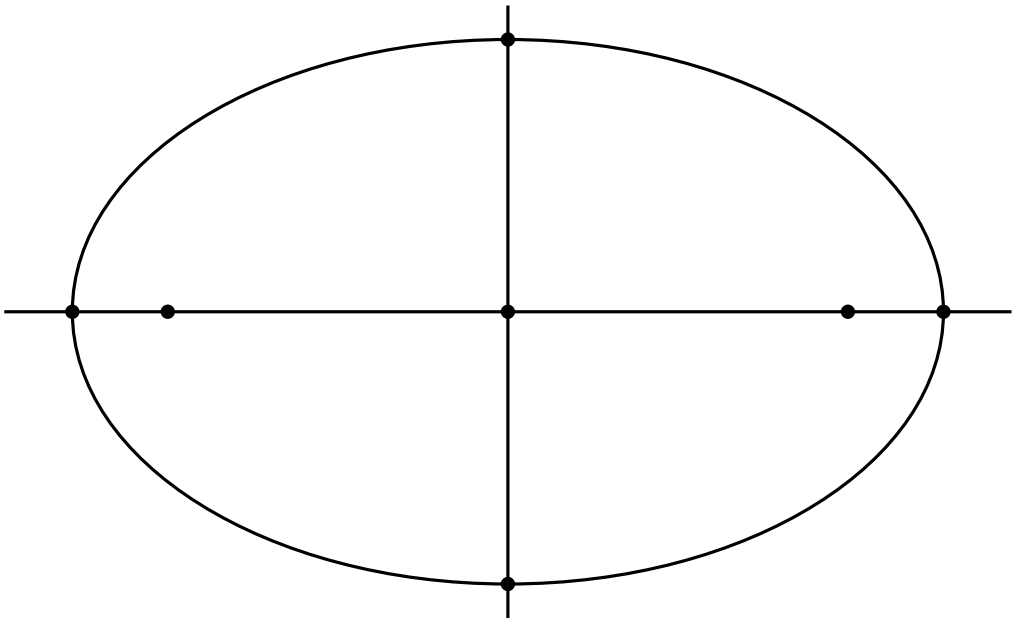
b) Zeichne mit demselben Faden eine weitere Ellipse mit den Brennpunkten F_1' und F_2'. Was ändert sich? Was bleibt gleich?

c) Welche Symmetrien kannst Du erkennen?

Hinweis: Lass die Nadeln von jemand anderes halten, dann kannst Du genauer zeichnen.



Arbeitsblatt 2: Bezeichnungen bei einer Ellipse



F_1, F_2:

Gerade durch F_1 und F_2:

Mittelsenkrechte zu F_1 und F_2:

M: Große Halbachse:

A_1, A_2: Kleine Halbachse:

B_1, B_2: Lineare Exzentrizität:

<u>Satz:</u> Es sei eine Ellipse gegeben durch die Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$.

Dann gelten: 1)

2)

3)

4)

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Punkte $F_1(-6 \mid 0)$, $F_2(6 \mid 0)$ und $a = 9$. Dadurch wird eine Ellipse definiert.
Hinweis: Diese Aufgabe kann ohne Taschenrechner gelöst werden. Du kannst für die Zeichnung $\sqrt{55} \approx 7,4$ oder $\sqrt{45} \approx 6,7$ verwenden.

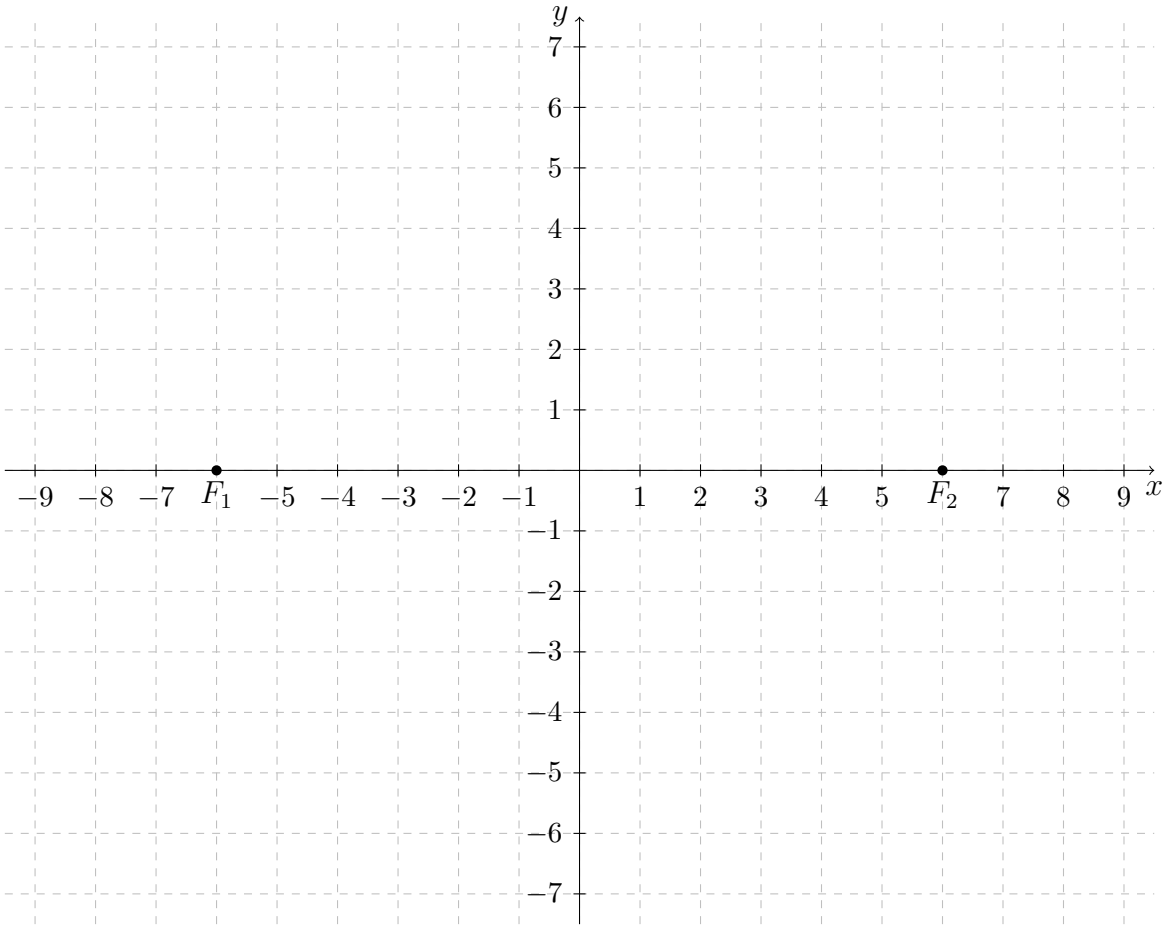
a) Gib e an und berechne b.

b) Gib die Koordinaten der Haupt- und Nebenscheitel an und zeichne sie unten im Koordinatensystem ein.

c) Zeichne den Punkt $P(6 \mid 5)$ ein und die Verbindungsstrecken zu den Brennpunkten. Beweise, dass P auf der Ellipse liegt.
Hinweis: Verwende den Satz des Pythagoras, um die Länge $\overline{F_1P}$ zu berechnen.

d) Spiegle P an den Symmetrieachsen der Ellipse, um drei weitere Punkte P_1, P_2, P_3 zu erhalten, die auf der Ellipse liegen. Gib die Koordinaten der Punkte an.

e) Skizziere die Ellipse.



Arbeitsblatt 4

Aufgabe 3

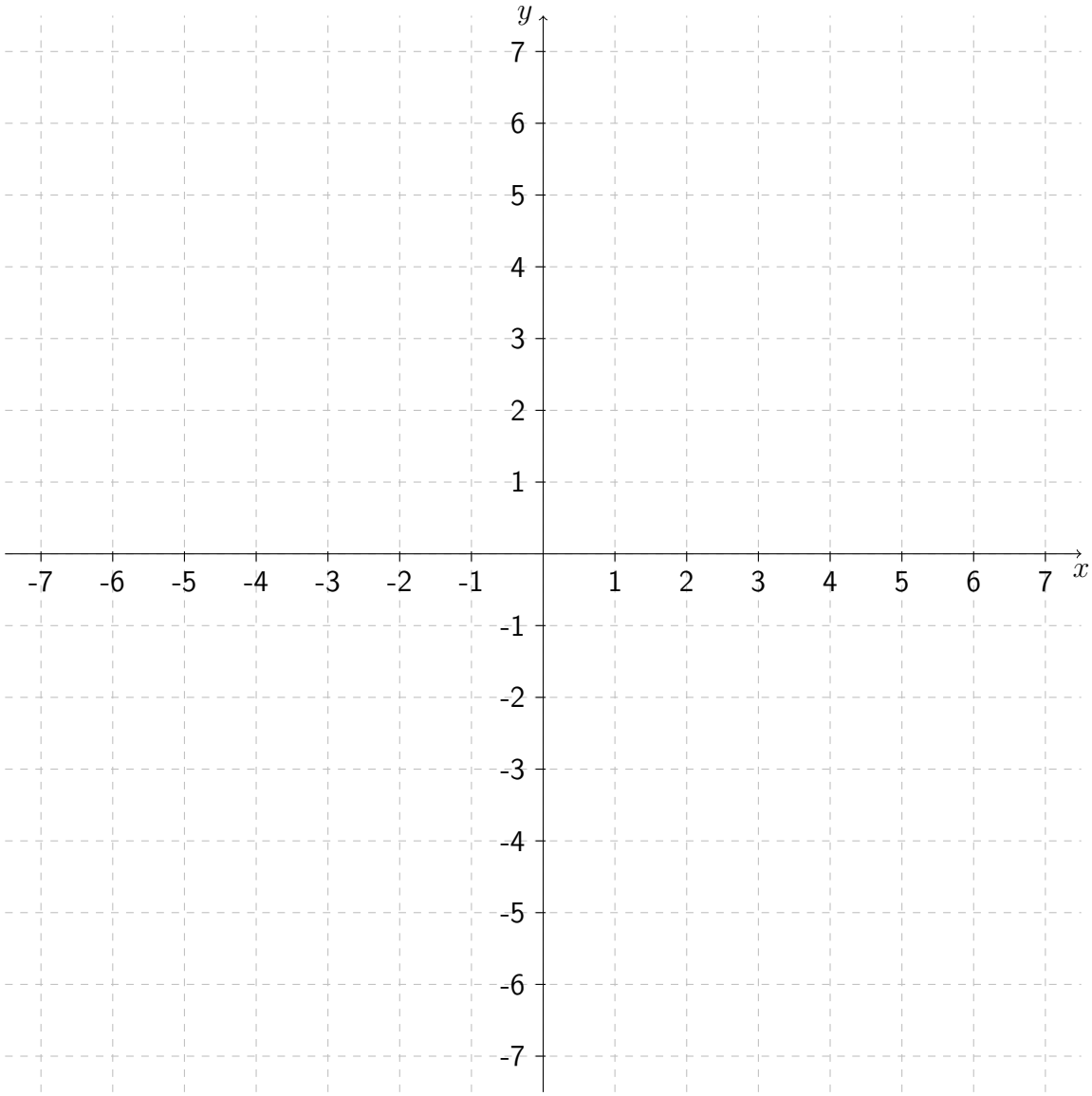
Gegeben ist eine Ellipse durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

a) Gib a, b an und berechne e (*Hinweis:* Du kannst einen der beiden Werte $\sqrt{32} \approx 5,7$ oder $\sqrt{40} \approx 6,3$ verwenden).

b) Zeichne die Brennpunkte und die Haupt- und Nebenscheitel der Ellipse ein. Skizziere die Ellipse.

c) Zeichne in Deiner Skizze ein, wo die Größen a, b oder e als Längen auftreten.



weiter auf Seite 2

Aufgabe 4

Bestimme in jeder Teilaufgabe die Gleichung der Ellipse, die den Mittelpunkt M im Ursprung hat und die angegebene Eigenschaft besitzt.

a) Die Scheitel liegen in $A(2 \mid 0)$ und $B(0 \mid 1)$.

b) Ein Brennpunkt hat die Koordinaten $F(2 \mid 0)$, und $a = \sqrt{12}$.

c) Die Punkte $P(2 \mid 2)$ und $Q(4 \mid 1)$ liegen auf der Ellipse.
Hinweis: Setze die Koordinaten der Punkte in die Ellipsengleichung ein, um a^2 und b^2 zu bestimmen.

Zusatzaufgabe 1

Was passiert, wenn $b > a > 0$ gilt?

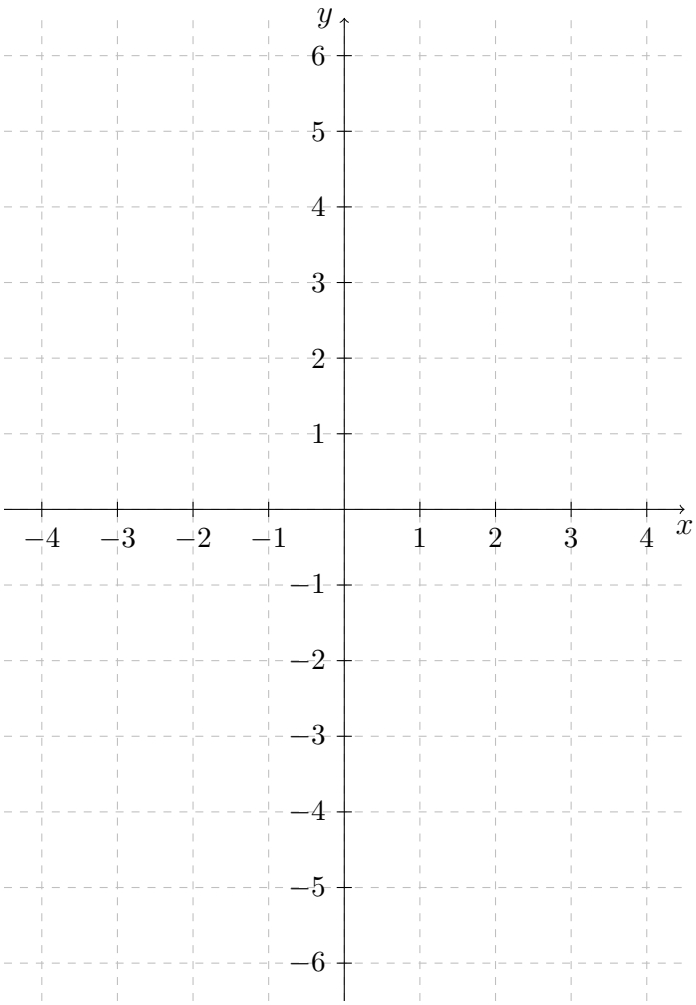
Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

a) Berechne die Koordinaten aller Punkte $P(x, y)$, die auf der Ellipse und auf einer der Koordinatenachsen liegen. Zeichne die Punkte ins Koordinatensystem ein.

b) Skizziere die Ellipse.

c) Zeichne die große und die kleine Halbachse in die Skizze ein.

d) Berechne die lineare Exzentrizität e und zeichne die Brennpunkte ein.



Arbeitsblatt 5

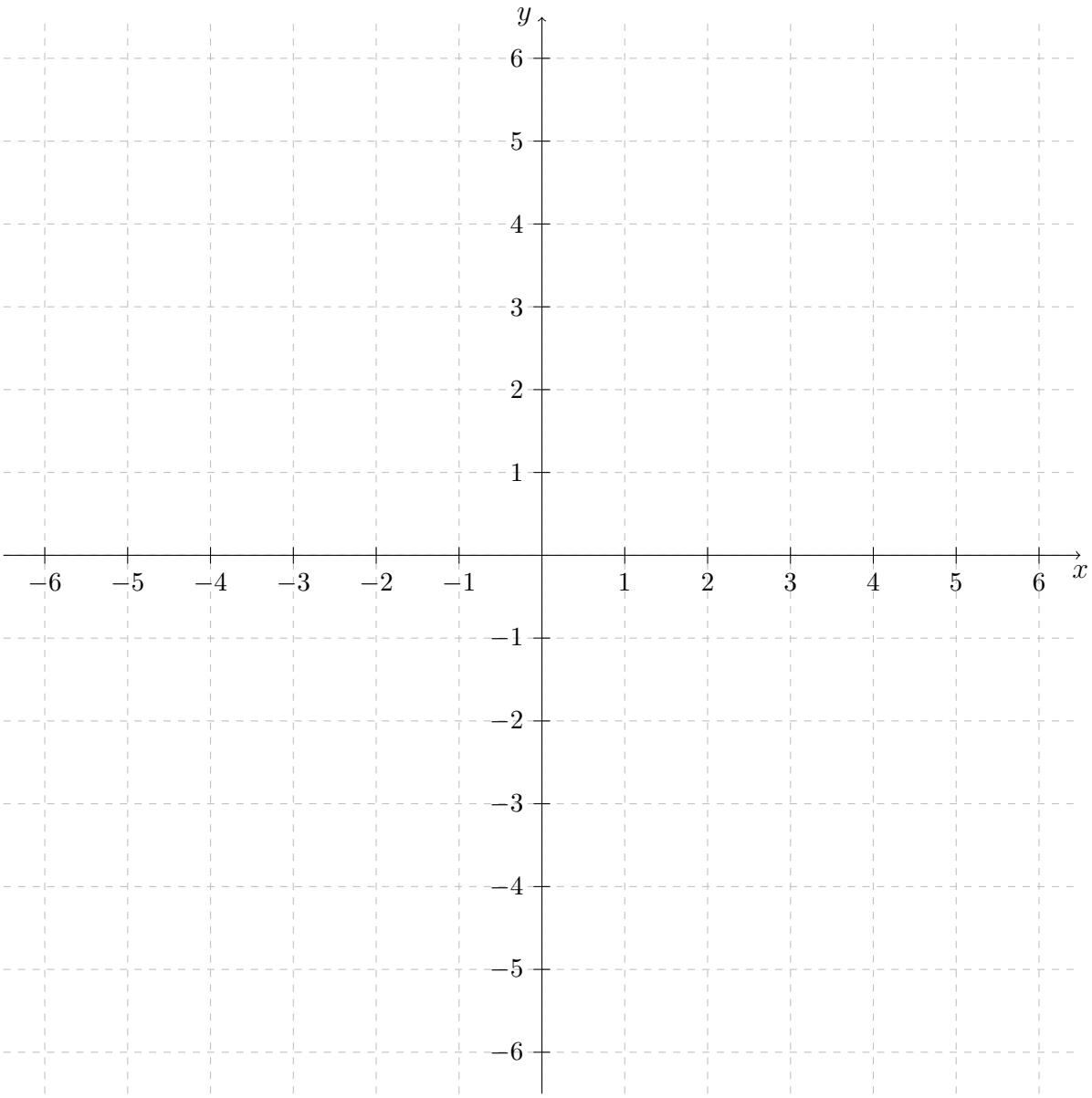
Aufgabe 5

Gegeben ist eine Ellipse mit großer Halbachse $a = 6$LE und kleiner Halbachse $b = 4$LE.

a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen Punkt P, der auf der Ellipse liegt und die x-Koordinate 3 besitzt. Parallelen dürfen mit dem Geodreieck gezeichnet werden.

b) Spiegle P mit dem Geodreieck an den Symmetrieachsen der Ellipse, um drei weitere Punkte zu erhalten, die auf der Ellipse liegen.

c) Zeichne Haupt- und Nebenscheitel ein und skizziere die Ellipse.



Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 6

Gegeben sind zwei Punkte $F_1(-4 \mid 0)$, $F_2(4 \mid 0)$ und $a = 5$. Dadurch wird eine Ellipse definiert.

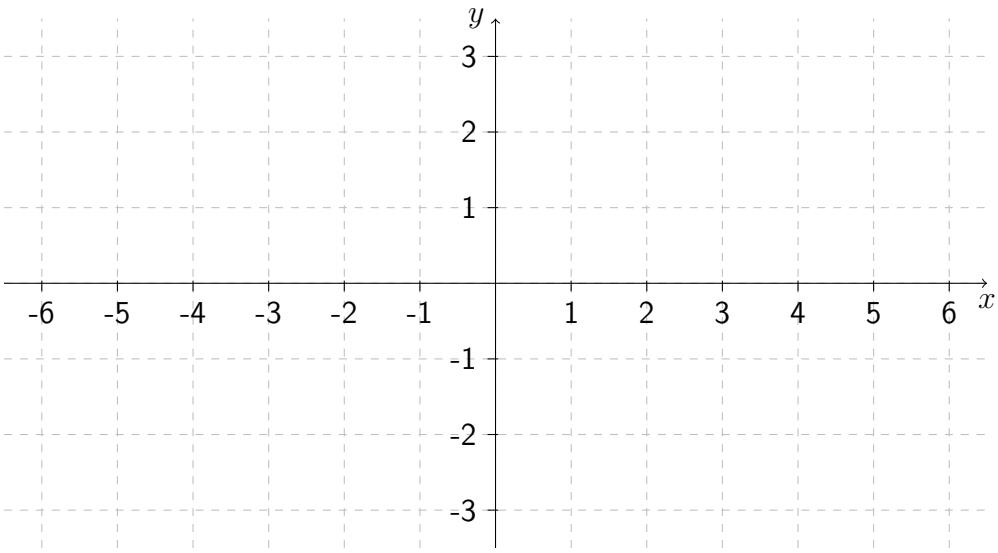
a) Bestimme die Koordinaten der Hauptscheitel: $A_1(\quad \mid \quad)$, $A_2(\quad \mid \quad)$

b) Bestimme die Koordinaten der Nebenscheitel: $B_1(\quad \mid \quad)$, $B_2(\quad \mid \quad)$

c) Skizziere die Ellipse im unten stehenden Koordinatensystem.

d) **Zusatzaufgabe:** Berechne die Koordinaten der Punkte $P(-4 \mid y)$, die auf der Ellipse liegen.
Lösung: $P_1(-4 \mid \quad)$, $P_2(-4 \mid \quad)$

Tipp: Verwende die Bedingung dafür, dass P auf der Ellipse liegt und versuche, alle Summanden durch y auszudrücken. Wende den Satz des Pythagoras an!



Aufgabe 7

Wahr oder falsch?

	w/f
Eine zur y-Achse parallele Gerade trifft immer zwei Punkte der Ellipse.	
Es gibt ein paar wenige Ellipsen, bei denen ein Brennpunkt auf der Ellipse selbst liegt.	
Setzt man in der Ellipsengleichung $a = b$, so erhält man einen Kreis.	
Die Nebenscheitel einer Ellipse liegen auf der Mittelsenkrechten der Brennpunkte.	
Die Hauptscheitel einer Ellipse sind die beiden Punkte der Ellipse, die den größten Abstand voneinander haben.	
Die Nebenscheitel einer Ellipse sind die beiden Punkte der Ellipse, die den kleinsten Abstand voneinander haben.	
Die Brennpunkte einer Ellipse liegen immer auf der Hauptachse.	
Der Abstand der Nebenscheitel einer Ellipse von ihrem Mittelpunkt ist immer kleiner als der Abstand ihrer Brennpunkte vom Mittelpunkt.	

Aufgabe 8

Diese Aufgabe ist durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal und ohne Taschenrechner zu lösen. Mögliche Werte, die du benötigst, sind $\sqrt{40} \approx 6,3$ oder $\sqrt{58} \approx 7,6$.

Gegeben ist eine Ellipse durch die Gleichung $\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

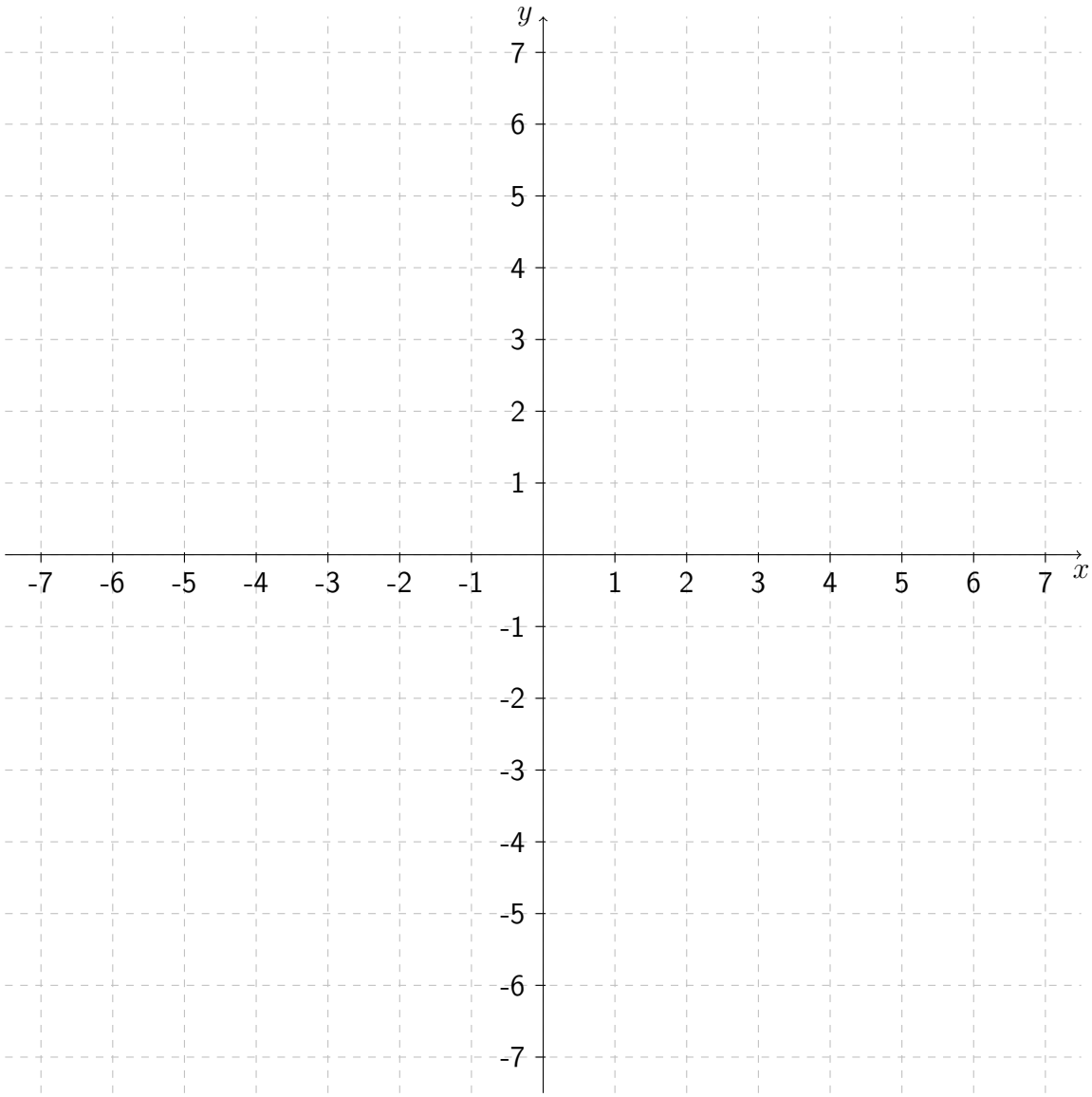
a) Gib die Längen der großen und der kleinen Halbachse an und berechne die lineare Exzentrizität:

$a =$, $b =$, $e =$

b) Konstruiere alle Punkte der Ellipse mit der Eigenschaft $x = 4$. Bestimme alle weiteren Punkte, die sich aus Symmetriegründen durch geeignete Spiegelung ergeben.

c) Zeichne die Haupt- und Nebenscheitel und die Brennpunkte der Ellipse in das Koordinatensystem ein. Skizziere die Ellipse.

d) **Zusatzaufgabe:** Konstruiere alle Punkte der Ellipse mit der Eigenschaft $y = 1$. Zeichne alle weiteren Punkte der Ellipse ein, die durch Spiegelung dieser Punkte erhalten werden können.



12 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 5: Ellipse und Tangente

12.1 Tafelanschriebe

Arbeitsblatt 1: Konstruktion von Ellipsenpunkten

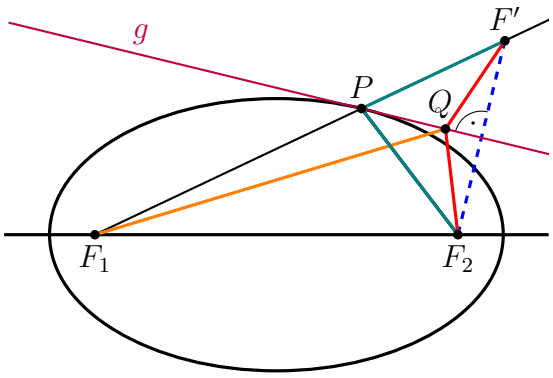
5. Ellipsen und Tangenten

Definition: Ist P ein Punkt auf einer Ellipse, so ist die Tangente an die Ellipse in P diejenige Gerade g, die mit der Ellipse genau den Punkt P gemeinsam hat. Man sagt: g berührt die Ellipse in P.

Arbeitsblatt 2: Tangente geometrisch

Satz: Es sei P ein Punkt auf einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1, F_2 und g die Winkelhalbierende der Strecke F_2P und der Verlängerung der Strecke F_1P über P hinaus. Dann ist g die Tangente an die Ellipse in P.

Beweis:



Zu zeigen: Jeder Punkt Q auf g mit $Q \neq P$ liegt nicht auf der Ellipse.
Spiegelung von F_2 an g ergibt F'. Dann gilt

$$\overline{PF'} = \overline{PF_2}, \text{ also } \overline{F_1F'} = 2a$$

Sei Q ein beliebiger Punkt auf g mit $Q \neq P$. Dann gilt $\overline{QF'} = \overline{QF_2}$ (denn g ist auch Mittelsenkrechte zu F_2 und F')

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} &= \overline{F_1Q} + \overline{QF'} \\ &> \overline{F_1F'} = 2a. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Q liegt nicht auf der Ellipse. □

Arbeitsblatt 3: Tangentenkonstruktion

Arbeitsblatt 4: Nachweis der Tangenteneigenschaft

Satz: Durch $a > b > 0$ und $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sei eine Ellipse k gegeben. Für jede Gerade $g : y = mx + c$ gilt: Erfüllen m, c die Berührbedingung $a^2m^2 + b^2 = c^2$, so ist g Tangente an k, d.h. g und k haben genau einen Punkt gemeinsam.

Beweis: Setze $y^2 = (mx + c)^2$ in die umgeformte Ellipsengleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ein:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mxc + c^2) &= a^2b^2 \\ \Leftrightarrow \quad x^2(\underbrace{b^2 + a^2m^2}_{=c^2 \leftarrow \text{Berührbedingung} \rightarrow}) + 2ma^2xc + \underbrace{a^2c^2 - a^2b^2}_{=a^2(c^2-b^2)=a^2a^2m^2=a^4m^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (xc)^2 + 2xca^2m + (a^2m)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (xc + a^2m)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x = -\frac{a^2m}{c}. \end{aligned}$$

Genau ein x-Wert $\Rightarrow$ g und k haben genau einen Punkt gemeinsam. □

Arbeitsblatt 5: Berührbedingung

Satz: Ist $P(x_0 \mid y_0)$ ein Punkt auf der Ellipse $k : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dann ist die Tangente an k in P durch die Gleichung $g : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ gegeben.

Beweis: Fall $y_0 \neq 0$:

1) P liegt auf der Geraden: Es gilt $\frac{x_0 x_0}{a^2} + \frac{y_0 y_0}{b^2} = 1$, da P auf k liegt.

2) Geradengleichung nach y auflösen:

$$\frac{y_0 y}{b^2} = 1 - \frac{x_0 x}{a^2} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0 x}{a^2}\right) = \underbrace{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}_{=:m} x + \underbrace{\frac{b^2}{y_0}}_{=:c}$$

m, c erfüllen die Bedingung aus dem Hilfssatz:

$$\begin{aligned} a^2 m^2 + b^2 &= a^2 \frac{b^4 x_0^2}{a^4 y_0^2} + b^2 = \frac{b^4 x_0^2 + b^2 a^2 y_0^2}{a^2 y_0^2} \\ &= \frac{b^2}{a^2 y_0^2} \underbrace{(b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2)}_{=a^2 b^2 \text{ da } P \text{ auf Ellipse}} = \frac{b^2 a^2 b^2}{a^2 y_0^2} = \frac{b^4}{y_0^2} = c^2. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} m, c \text{ erfüllen die Berührbedingung} \\ P \text{ liegt auf } g \text{ und auf } k \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ ist Tangente an } k \text{ in } P$$

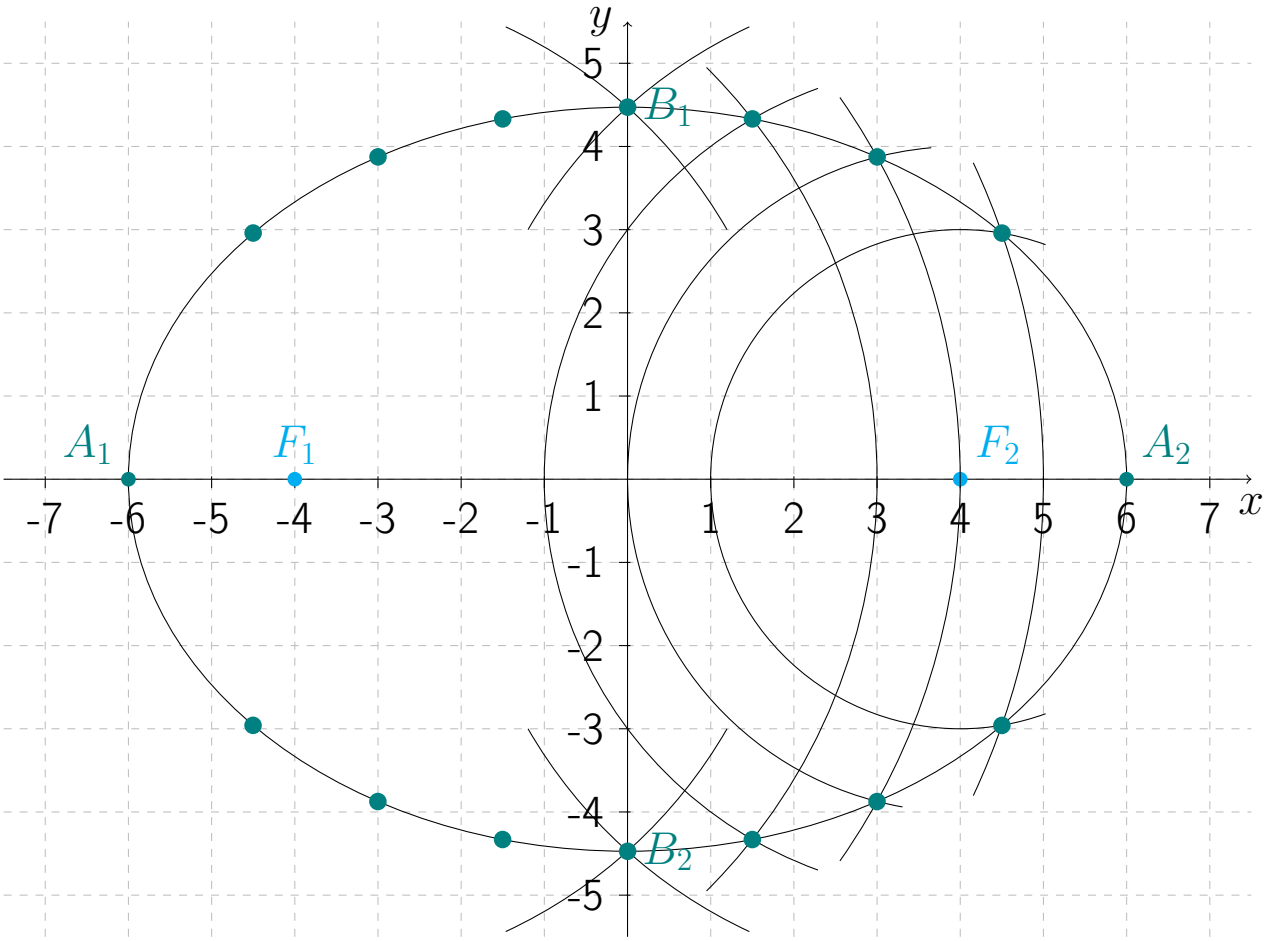
Fall $y_0 = 0$: Dann gilt $x_0 = \pm a$. Die Tangente ist parallel zur y-Achse und hat die Gleichung $x = a$ oder $x = -a$. Diese Gleichung ergibt sich auch, wenn man $y_0 = 0$ und $x_0 = \pm a$ in die Gleichung von g einsetzt:

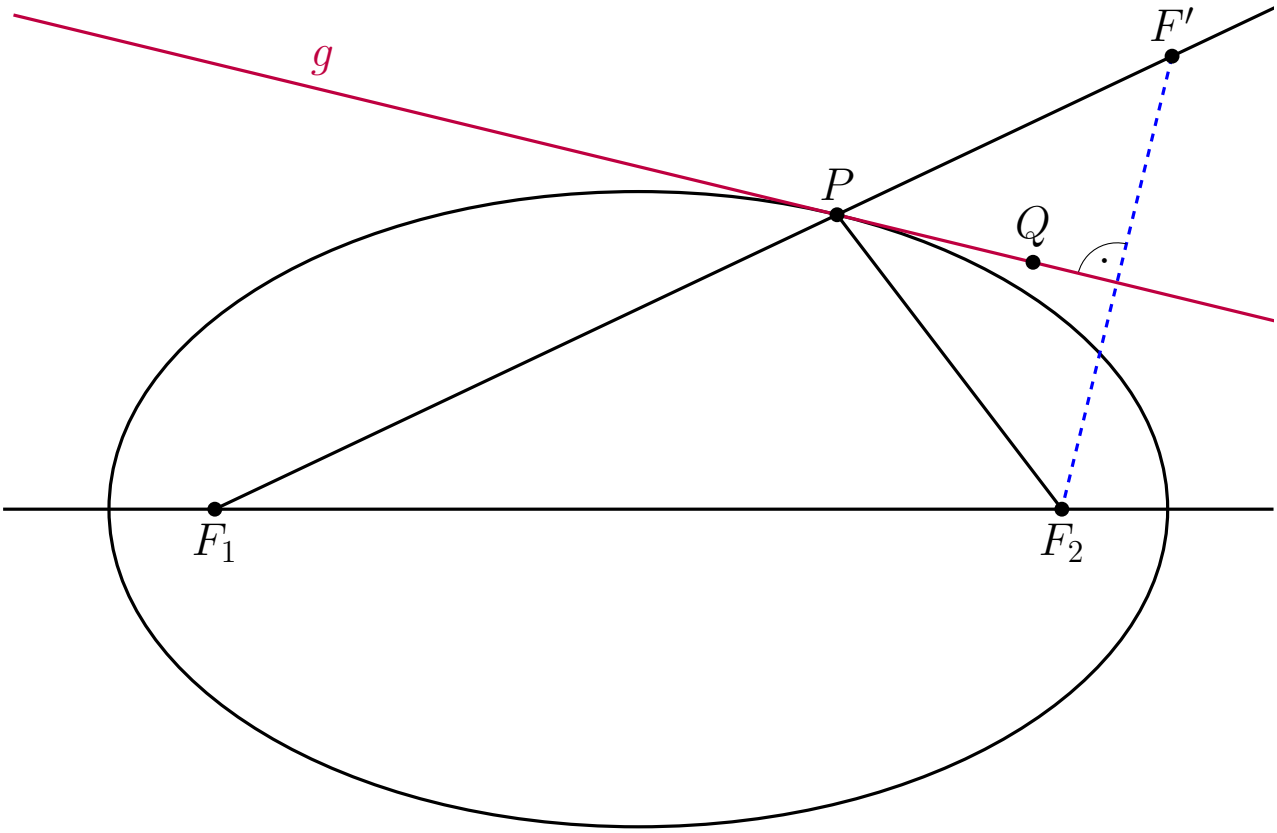
$$\frac{\pm a x}{a^2} + 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm a. \qquad \square$$

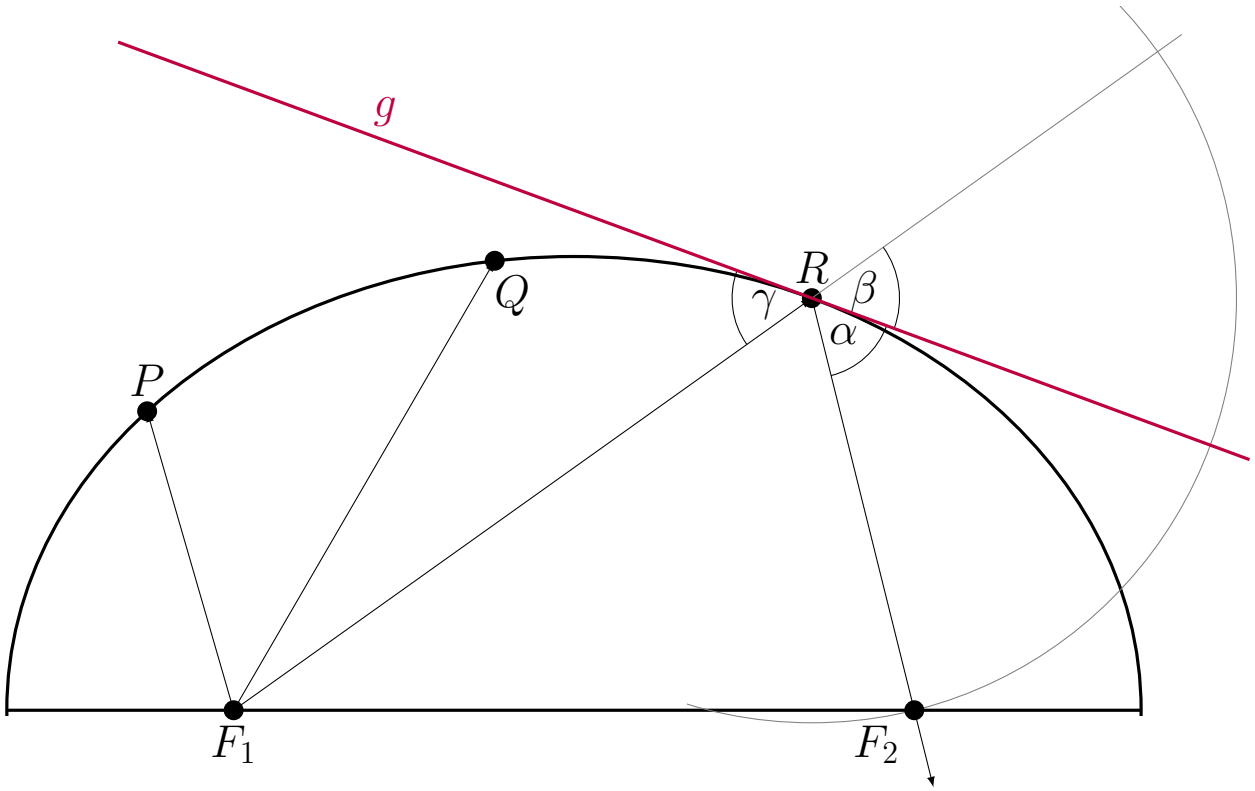
Arbeitsblatt 6: Tangentengleichung

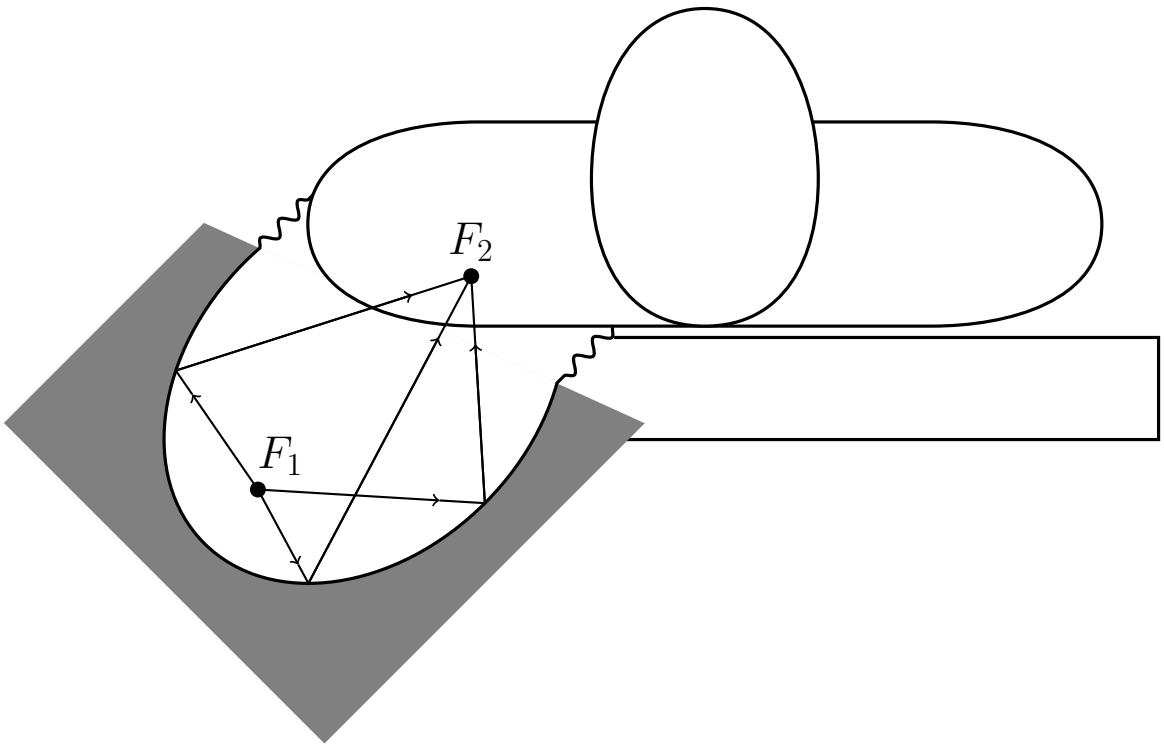
12.2 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten


y
x
B_1
B_2
A_1
F_1
F_2
A_2
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5


g
F'
P
Q
F_1
F_2


g
Q
R
β
γ
α
P
F1
F2


F2
F1

AB 1: Konstruktion von Ellipsenpunkten

Aufgabe 1

Gegeben sind zwei Punkte $F_1(-4 \mid 0)$, $F_2(4 \mid 0)$ und $a = 6$. Dadurch wird eine Ellipse definiert. Die Ellipse besteht aus allen Punkten P, für die $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = 12$ gilt: Die Summe der Abstände von P zu F_1 und zu F_2 ist gleich 12LE (LE = Längeneinheit).

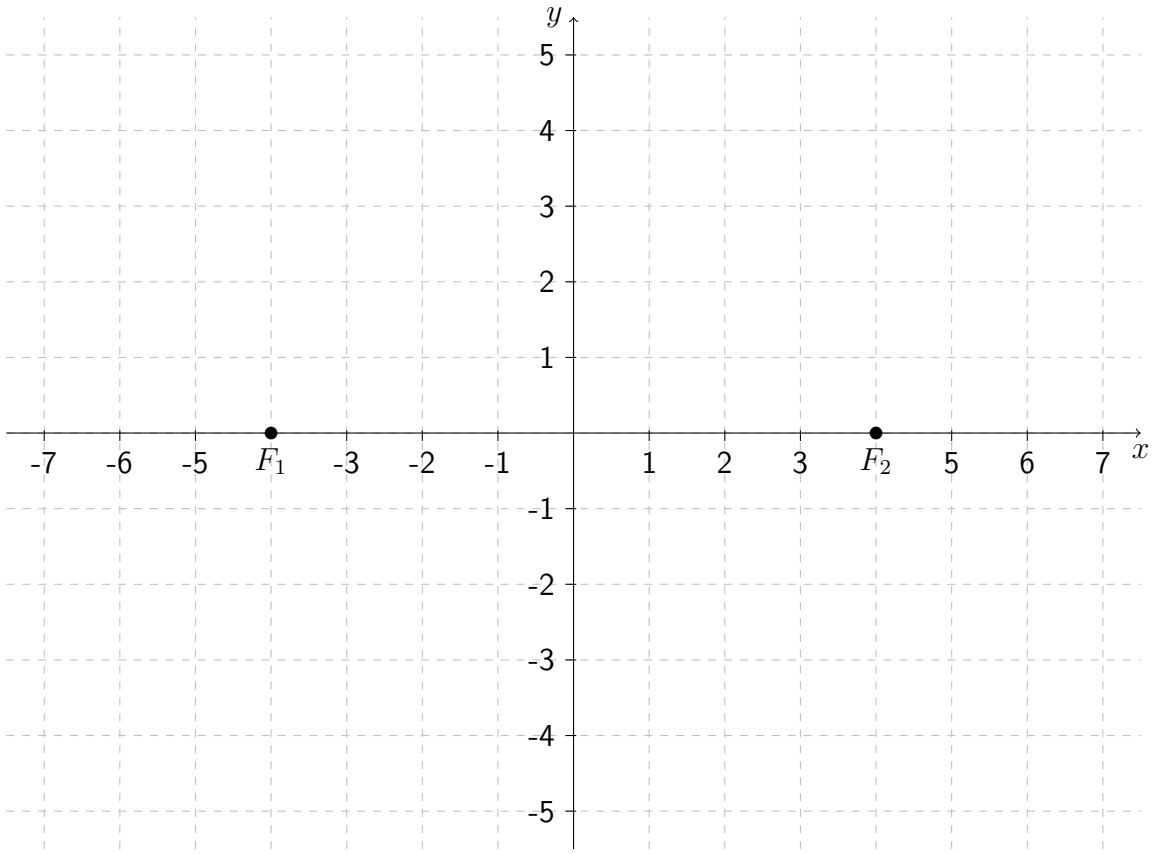
a) Konstruiere mit dem Zirkel die Punkte B_1, B_2 der Ellipse, die von F_1 und F_2 gleich weit entfernt sind.

b) Konstruiere mit dem Zirkel alle Punkte der Ellipse, die von F_1 den Abstand 9LE haben.

Wie bekommt man aus diesen Punkten die Punkte der Ellipse, die von F_2 den Abstand 9LE haben? Zeichne auch diese Punkte ein (Konstruktion mit Geodreieck genügt).

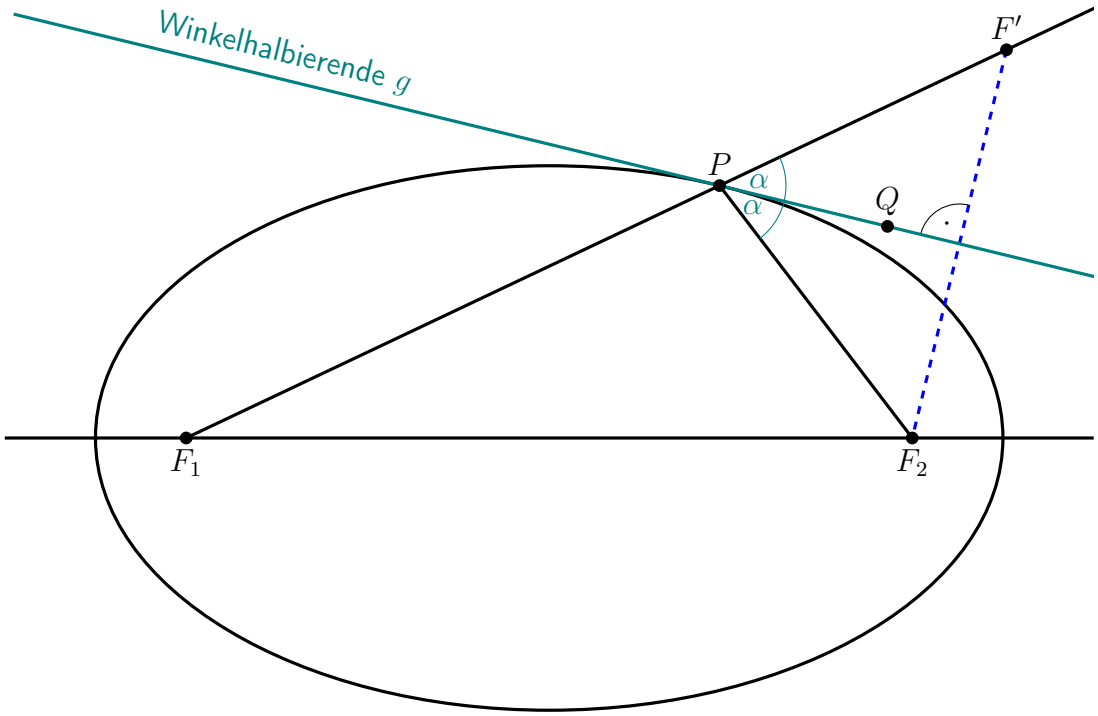
c) Konstruiere mit dem Zirkel alle Punkte der Ellipse, die von F_1 den Abstand 8LE oder 7LE haben. Zeichne zusätzlich alle Punkte der Ellipse ein, die von F_2 den Abstand 8LE oder 7LE haben.

d) Zeichne die Punkte A_1, A_2 der Ellipse ein, die von F_1 oder von F_2 den Abstand 2LE haben. Warum liegen diese auf der x-Achse? Skizziere die Ellipse.



AB 2: Tangente geometrisch

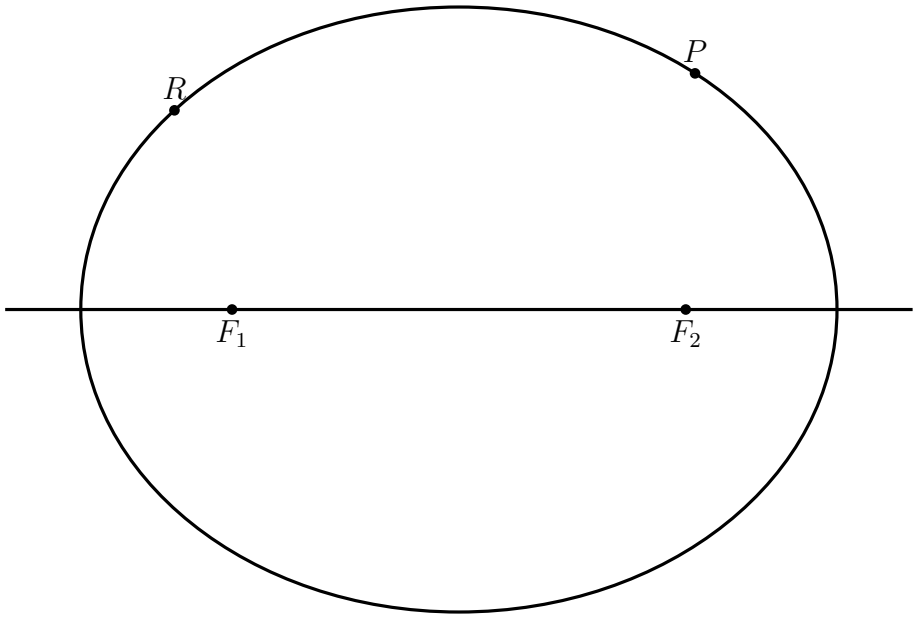
Beweis:



AB 3: Tangentenkonstruktion

Aufgabe 2

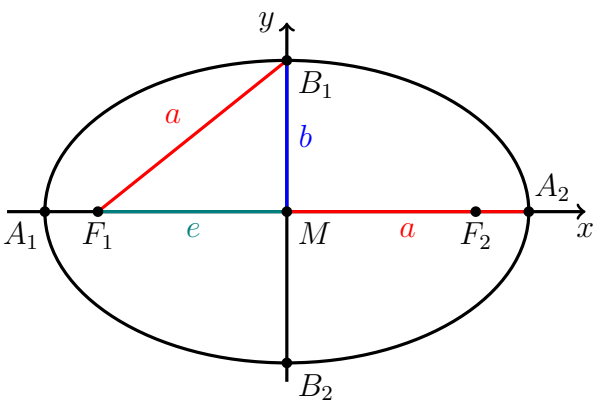
Gegeben ist die Ellipse in der Graphik und zwei Punkte P, R auf der Ellipse. Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangenten an die Ellipse in P und in R.



AB 4: Nachweis der Tangenteneigenschaft

Seien $a > b > 0$. In einem Koordinatensystem wird durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eine Ellipse beschrieben. D.h. auf der Ellipse liegen genau alle Punkte $(x \mid y)$, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen.

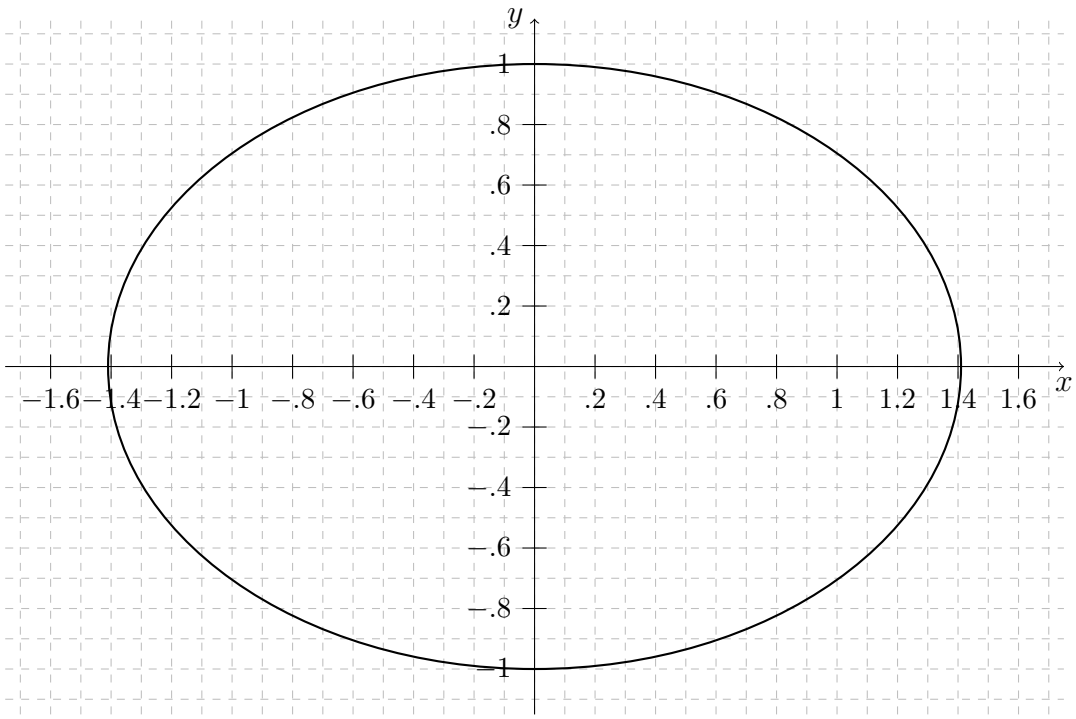
Dann ist a die Länge der großen Halbachse, b die Länge der kleinen Halbachse. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$ mit $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Für alle Punkte P der Ellipse gilt $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.



Aufgabe 3

Gegeben sind die Ellipse $k : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ und die Gerade $g : y = 2x + 3$.

a) Zeichne Haupt- und Nebenscheitel in das gegebene Koordinatensystem ein und skizziere die Ellipse ($\sqrt{2} \approx 1,41$).



b) Weise rechnerisch nach, dass die Gerade g und die Ellipse k genau einen gemeinsamen Punkt besitzen und berechne seine Koordinaten. Zeichne den Berührpunkt und die Tangente ein.

c) Zeichne die Tangenten in den Haupt- und Nebenscheiteln ein und bestimme jeweils die Gleichungsdarstellung der Tangente.

AB 5: Berührbedingung

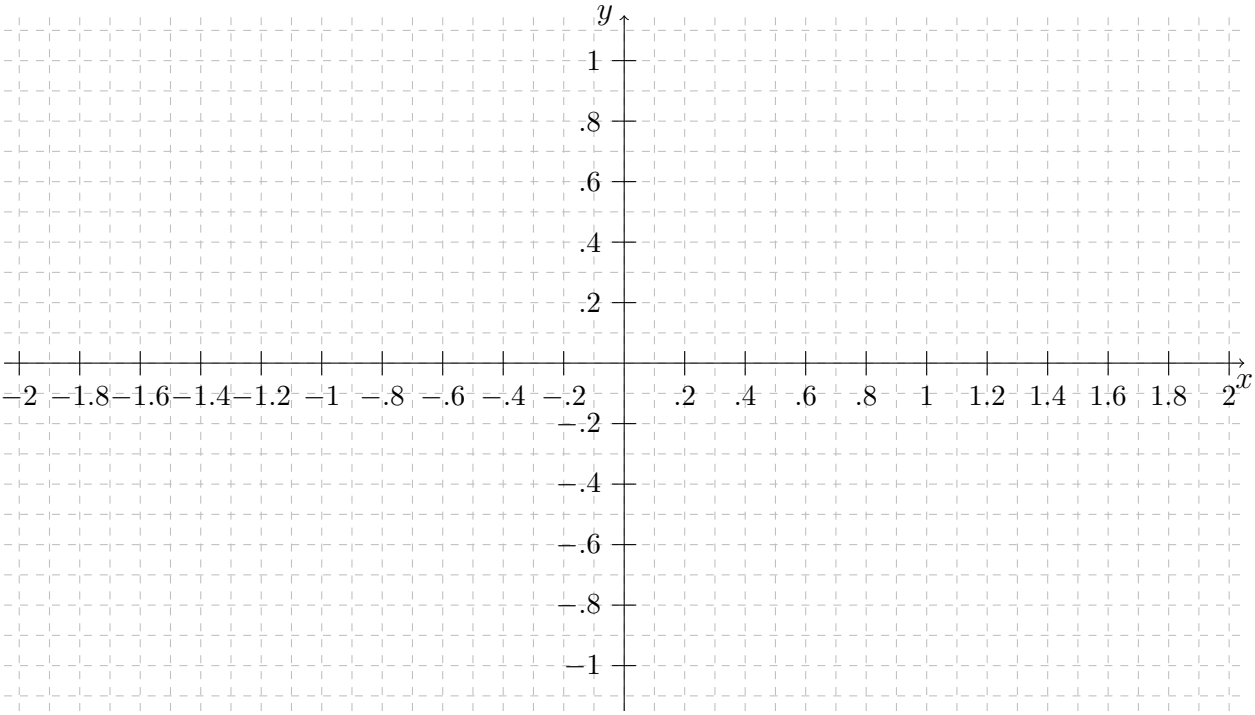
Aufgabe 4

Gegeben ist die Ellipse $k : \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

a) Schreibe die Berührbedingung für eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ und der gegebenen Ellipse auf. Gib drei verschiedene m-Werte mit dazugehörigen c-Werten an, die die Berührbedingung erfüllen. Zeichne die dazugehörigen Tangenten $y = mx \pm c$ in das Koordinatensystem ein.

b) Berechne die Berührpunkte der Tangenten. Du kannst dafür die Formel $x = -\frac{a^2 m}{c}$ aus dem Beweis des Hilfssatzes verwenden.

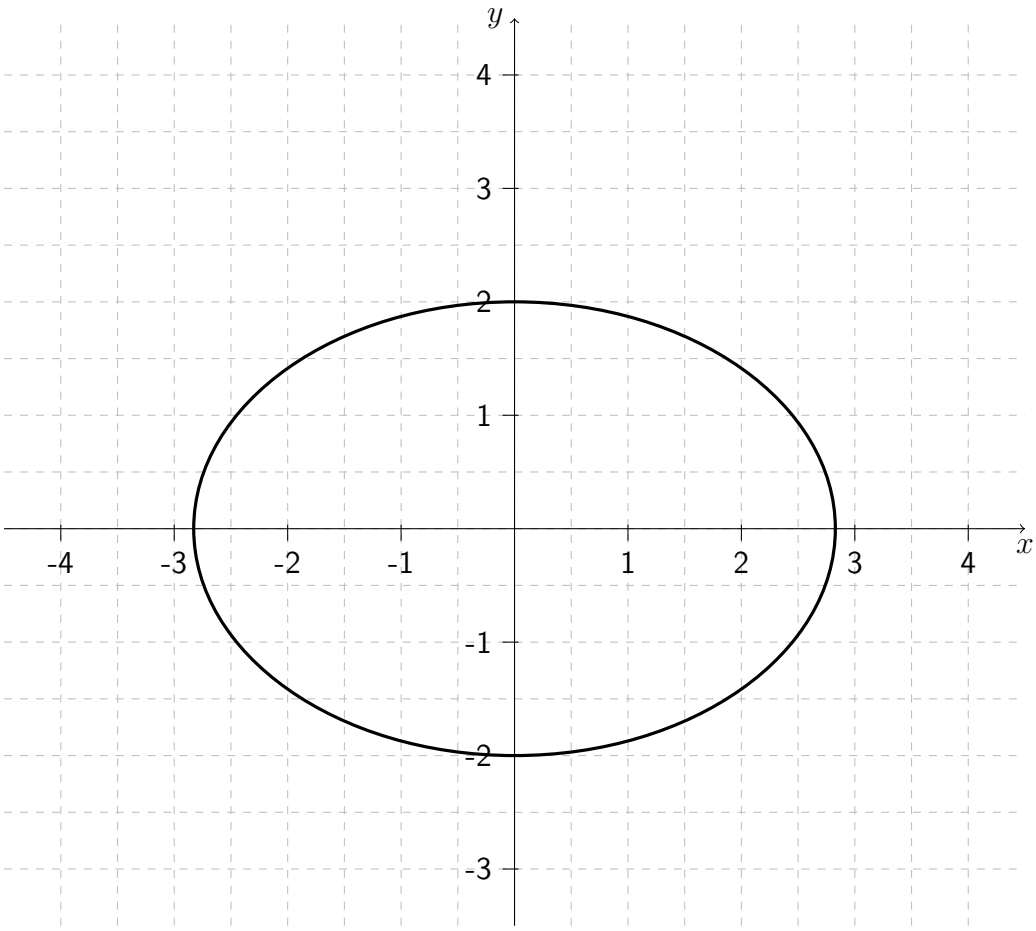
c) Zeichne Haupt- und Nebenscheitel der Ellipse und die Berührpunkte der Tangenten ein. Skizziere die Ellipse ($\sqrt{3} \approx 1,73$).



AB 6: Tangentengleichung

Aufgabe 5

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.



a) Bestimme die Geradengleichung der Tangenten an die Ellipse durch die Punkte

(i) $P_1(\sqrt{6} \mid 1)$, (ii) $P_2(\frac{8}{3} \mid \frac{2}{3})$, (iii) $P_3(0 \mid 2)$, (iv) $P_4(\sqrt{8} \mid 0)$.

b) Zeichne die Punkte und die Tangenten in die Graphik ein ($\sqrt{6} \approx 2,45$; $\sqrt{8} \approx 2,83$).

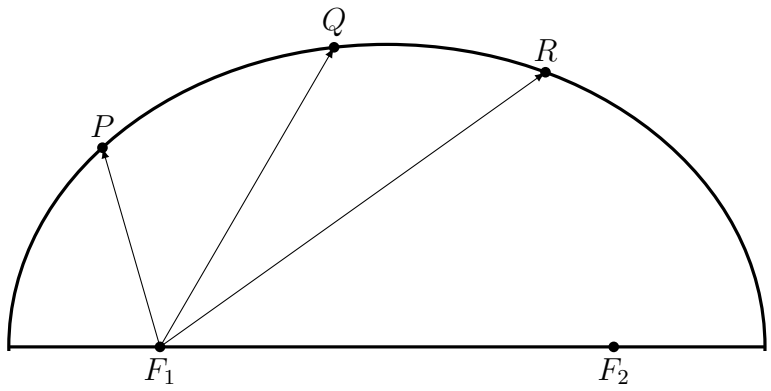
c) **Zusatzaufgabe:** Bestimme die Gleichungen der Tangenten mit Steigung $m = 2$, indem du das Tangentenkriterium verwendest.

d) **Zusatzaufgabe:** Bestimme die Schnittpunkte der Tangenten aus Teil b) mit der Ellipse. Benutze dafür die umgeformte Tangentengleichung aus dem Beweis. Prüfe dein Ergebnis auf Plausibilität, indem Du die Tangenten oben in der Graphik einzeichnest.

Flüstergewölbe

Aufgabe 6

Werden Schallwellen an einer glatten ebenen Wand reflektiert, so gilt wie bei der Reflexion von Lichtstrahlen an einem ebenen Spiegel das Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“. Bei gekrümmten Wänden gilt für die Reflexion ebenfalls „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“, wobei hier die Winkel zur Tangente bzw. Tangentialebene gemeint sind. Wir untersuchen nun, wie Schallwellen an einem Gewölbe reflektiert werden, das beim senkrechten Durchschneiden eine Ellipse bildet. Ein solches Gewölbe befindet sich z.B. in der sizilianischen Kathedrale von Agrigent.



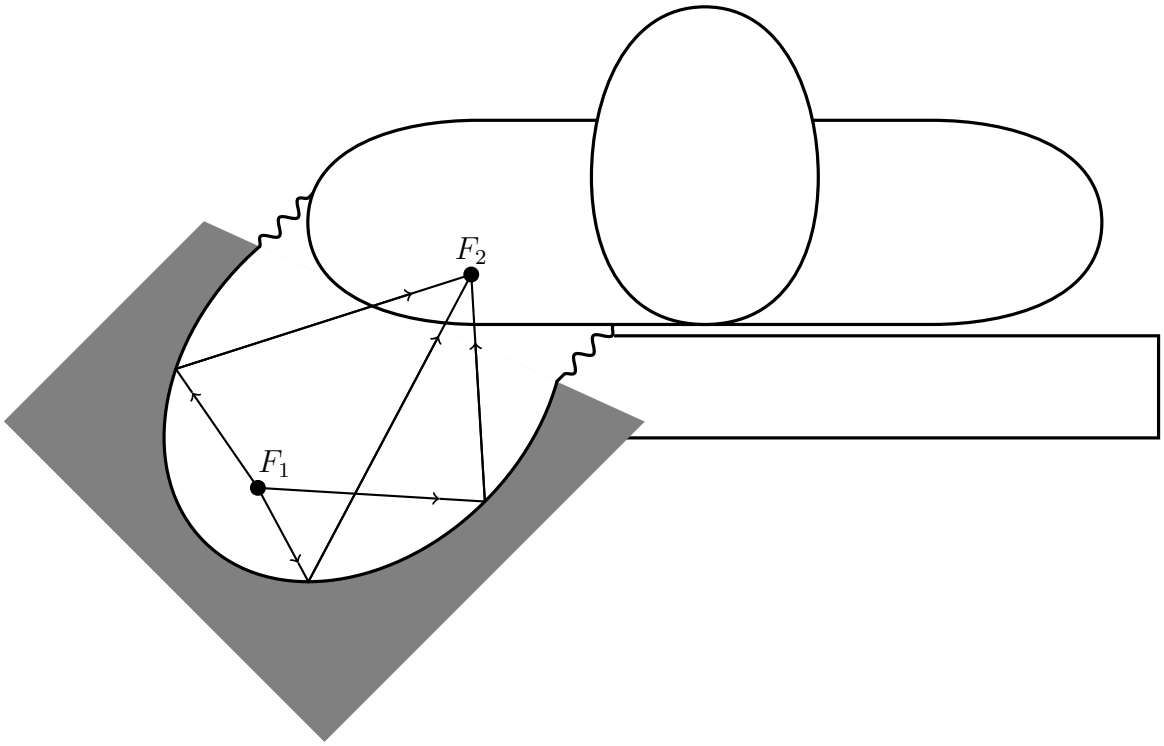
a) Wähle einen der Punkte P, Q, R. Konstruiere die Tangente an die Ellipse in diesem Punkt.

b) Konstruiere mit der von Dir gezeichneten Tangente den Verlauf der Schallwelle, die von F_1 zu dem von Dir gewählten Punkt verläuft und dann an der Ellipse reflektiert wird. Vergleiche mit dem Ergebnis Deines Nachbars.

Funktionsweise des Nierensteinzertrümmerers

Nierensteine können in ca. 90% der Fälle ohne Operation durch Stoßwellen zerkleinert werden, so dass sie nach der Zerkleinerung von alleine aus der Niere ausgespült werden.

Das Gerät besteht aus einem abgeschnittenen Ellipsoid, im Querschnitt aus einer abgeschnittenen Ellipse. Im Brennpunkt F_1 der Ellipse befindet sich ein Gerät zur Erzeugung von Stoßwellen (sehr starke Schallwellen). Das Gerät wird so am Patienten, der auf dem Rücken liegt, positioniert, dass sich der Nierenstein im Brennpunkt F_2 befindet. Das Innere des Ellipsoids ist mit Wasser gefüllt, das die Stoßwellen überträgt. Das Körpergewebe leitet die Stoßwellen ebenfalls gut weiter. Durch die Ellipsenform werden die Stoßwellen im Nierenstein konzentriert.



Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 7

Wahr oder falsch?

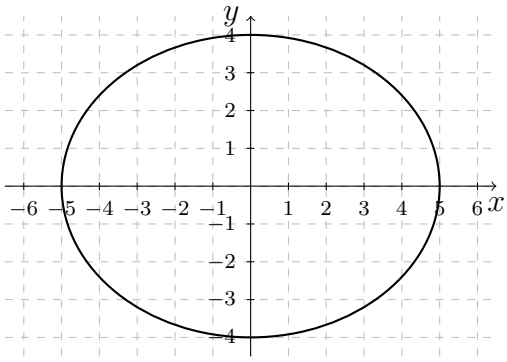
	w/f
Der Punkt einer Ellipse, der zum Brennpunkt F_1 den kleinsten Abstand hat, ist ein Nebenscheitel.	
Der Punkt einer Ellipse, der zum Brennpunkt F_1 den kleinsten Abstand hat, ist ein Hauptscheitel.	
Der Punkt einer Ellipse, der zum Brennpunkt F_1 den größten Abstand hat, ist ein Hauptscheitel.	
Für jeden Punkt P einer Ellipse, der kein Hauptscheitel ist, ist die Tangente in P eine Winkelhalbierende der Geraden durch P und F_1 bzw. durch P und F_2.	
In jedem der Hauptscheitel einer Ellipse ist die Tangente parallel zur Hauptachse.	
In jedem der Nebenscheitel einer Ellipse ist die Tangente parallel zur Hauptachse.	
Wenn eine Gerade $g : y = mx + c$ Tangente an eine Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, so gilt $a^2m^2 + b^2 = c^2$.	

Aufgabe 8

Gegeben ist die Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

siehe Skizze.



a) Gib eine Gleichung für die Tangente an die Ellipse im Punkt $P(4 \mid \frac{12}{5})$ an. Die Gleichung muss nicht nach y aufgelöst werden.

Antwort: g :

b) Prüfe, ob die jeweils angegebene Gerade Tangente an die Ellipse ist.

Geradengleichung	Tangente j/n	Geradengleichung	Tangente j/n
$g_3 : y = 4$		$g_4 : y = -5$	
$g_1 : y = 2x + 11$		$g_2 : y = \frac{3}{5}x + 5$	
$g_5 : x = 4$		$g_6 : x = -5$	

Hinweis: Eventuell die Berührbedingung verwenden.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 9

Gegeben ist die Ellipse k mit den Brennpunkten $F_1(-5 \mid 0)$, $F_2(5 \mid 0)$ und $a = 7$.

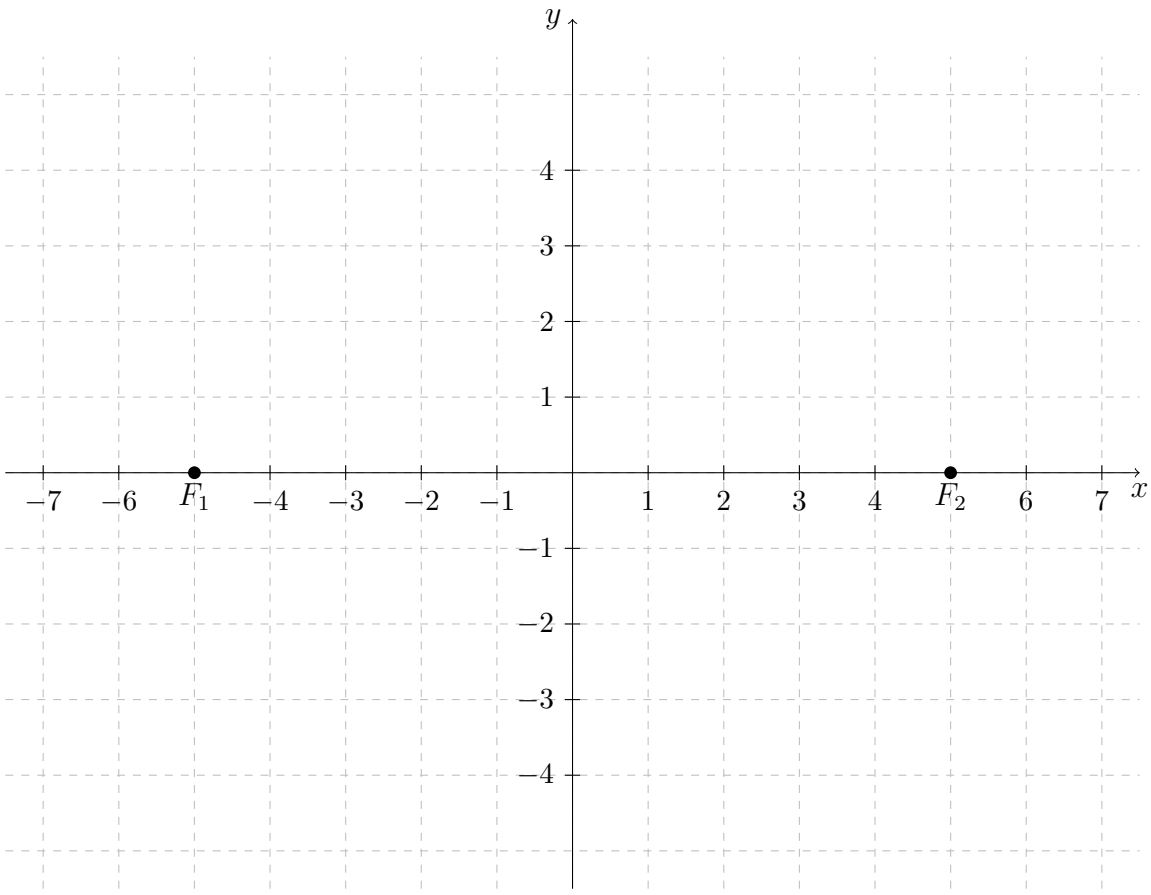
a) Konstruiere mit dem Zirkel die Nebenscheitel der Ellipse.

b) Konstruiere mit dem Zirkel die Punkte P_1, P_2 der Ellipse, die von F_1 den Abstand 10LE haben (LE = Längeneinheit).

c) Spiegle P_1, P_2 mit dem Geodreieck an der y-Achse, um zwei weitere Punkte P_3, P_4 der Ellipse zu erhalten.

d) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangente g an die Ellipse in P_3. Zeichne g in blauer Farbe ein.

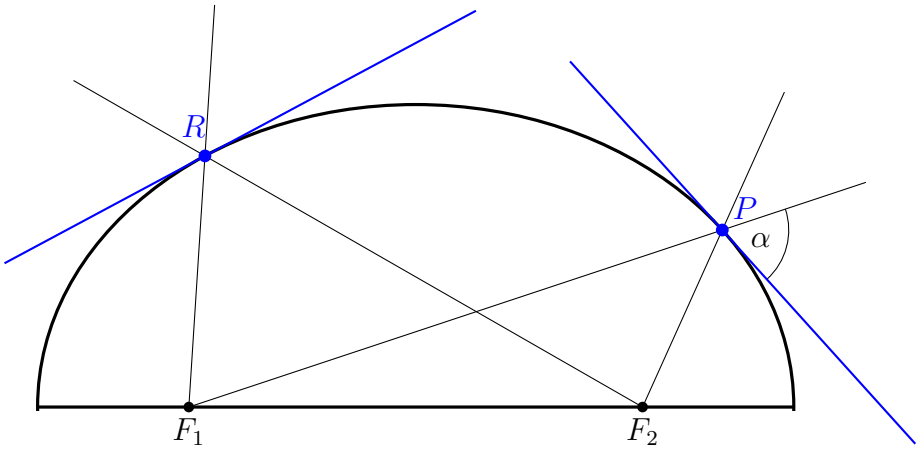
e) Zeichne die Hauptscheitel der Ellipse ein und skizziere die Ellipse k in grüner Farbe.



Weiter auf Seite 3

Aufgabe 10

Werden Schallwellen an einer glatten ebenen Wand reflektiert, so gilt wie bei der Reflexion von Lichtstrahlen an einem ebenen Spiegel das Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“. Bei gekrümmten Wänden gilt für die Reflexion ebenfalls „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“, wobei hier die Winkel zur Tangente bzw. Tangentialebene gemeint sind. Wir untersuchen nun, wie Schallwellen an einem Gewölbe reflektiert werden, das beim senkrechten Durchschneiden eine Ellipse bildet. Ein solches Gewölbe wird als *Flüstergewölbe* bezeichnet.



In der Zeichnung sind die Tangenten in den Punkten P und R eingezeichnet.

a) Beim Punkt P ist ein Winkel α eingezeichnet. Trage bei den drei weiteren Winkeln, die gleich groß sind wie α, ebenfalls α ein.

b) Beim Punkt R sind vier der sechs Winkel gleich groß. Trage bei diesen Winkeln β ein.

c) Eine Schallwelle geht von F_1 aus und wird im Punkt P reflektiert. Trage den Verlauf der Schallwelle mit grüner Farbe ein. In welchem Punkt trifft sie auf die Hauptachse?

Antwort: Im Punkt $\boxed{}$

d) Eine Schallwelle geht von F_1 aus und wird im Punkt R reflektiert. Trage den Verlauf der Schallwelle mit roter Farbe ein. In welchem Punkt trifft sie auf die Hauptachse?

Antwort: Im Punkt $\boxed{}$

Damit ist der Name *Flüstergewölbe* erklärt: Eine Person, die in F_2 steht, kann das Flüstern einer anderen Person, die im Punkt F_1 steht, gut hören.

13 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 6: Hyperbel

13.1 Tafelanschriebe

Arbeitsblatt 1: Eine neue Gleichung (Besprechung an Tafel)

6. Hyperbeln

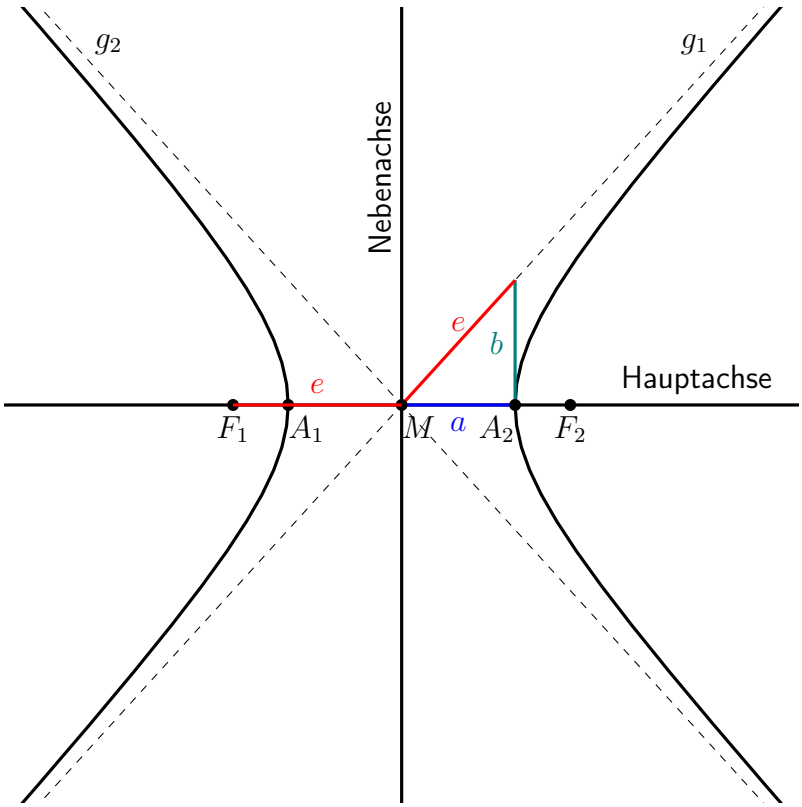
Definition: Eine Hyperbel ist gegeben durch zwei Brennpunkte $F_1 \neq F_2$ und eine Länge $a > 0$ mit $2a < \overline{F_1F_2}$. Die Hyperbel ist die Menge aller Punkte P der Ebene, für die

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| \;=\; 2a$$

gilt.

Arbeitsblatt 2: Hyperbelpunkte (Besprechung an Tafel)

Bezeichnungen bei Hyperbeln (Arbeitsblatt 3 ausfüllen)



Ein Punkt liegt genau dann auf der Hyperbel, wenn $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$.

F_1, F_2:	Brennpunkte	$e :=$	$\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$
A_1, A_2:	Scheitel	$\overline{A_1A_2} =$	$2a$
M:	Mittelpunkt	$\overline{MF_1} =$	e
		$\overline{MA_1} =$	a

Gerade durch F_1, F_2: Hauptachse

Gerade durch M senkrecht zu F_1, F_2: Nebenachse

g_1, g_2: Asymptoten $\qquad b := \sqrt{e^2 - a^2}$

Satz: Für gegebene feste Zahlen $a, b > 0$ sei $e := \sqrt{a^2 + b^2}$ Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschreibt eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$. D.h. genau dann, wenn die Koordinaten eines Punktes $P(x \mid y)$ die Gleichung erfüllen, gilt

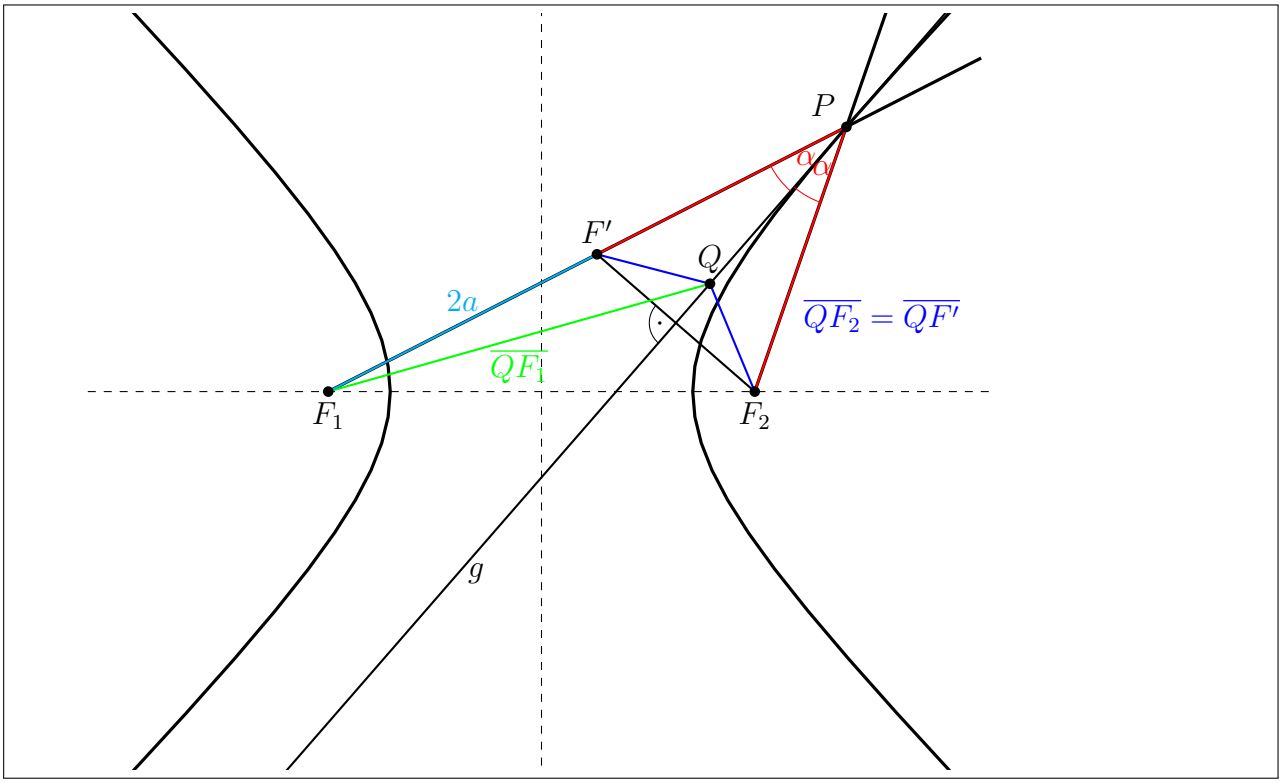
$$\left|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}\right| = 2a.$$

Beweis: Siehe Arbeitsblatt 4.

Arbeitsblatt 4: Die Hyperbelgleichung (Besprechung auf dem Arbeitsblatt)

Satz: Es sei P ein Punkt auf einer Hyperbel und g die Winkelhalbierende der Strecken PF_1 und PF_2. Dann ist g die Tangente an die Hyperbel in P.

Arbeitsblatt 5 enthält die folgende Graphik zur Verdeutlichung des Beweises



Beweis: Spiegelung von F_2 an g ergibt F' auf $F_1P \Rightarrow \overline{PF_2} = \overline{PF'}$.

$\Rightarrow \overline{F_1F'} = \overline{F_1P} - \overline{PF'} = \overline{F_1P} - \overline{PF_2} = 2a$ (da P auf Hyperbel).

Zeige: Für jeden Punkt Q auf g mit $Q \neq P$ gilt $\left|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}\right| \neq 2a$. Dann liegt Q nicht auf der Hyperbel.

Q liegt auf $g \Leftrightarrow \overline{QF_2} = \overline{QF'}$ (denn g ist Mittelenkrechte zu F_2F').

Außerdem $\overline{QF_1} < \overline{QF'} + 2a \Rightarrow \overline{QF_1} - \overline{QF'} < 2a$
$2a + \overline{QF_1} > \overline{QF'} \Rightarrow \overline{QF_1} - \overline{QF'} > -2a$

$\Rightarrow -2a < \overline{QF_1} - \overline{QF_2} = \overline{QF_1} - \overline{QF'} < 2a.$

$\Rightarrow$ Jeder Punkt Q auf g mit $Q \neq P$ liegt nicht auf der Hyperbel.

$\Rightarrow$ g ist Tangente an die Hyperbel. $\square$

Arbeitsblatt 6: Reflexion an einem Hyperbelspiegel (Besprechung in zwei Abschnitten auf dem Arbeitsblatt)

Mündlich: Kegelschnitte als Schnitte von Kegeln mit Ebenen.

13.2 OH-Folien und Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Arbeitsblatt 1: Eine neue Gleichung

Aufgabe 1

Gegeben ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1. \qquad (*)$$

Wir betrachten die Menge k aller Punkte $P(x \mid y)$, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen.

a) Was unterscheidet diese Gleichung von einer Ellipsengleichung?

b) Bestimme die x-Koordinate aller Punkte aus k, für die $y = 0$ gilt. Zeichne die Punkte ins Koordinatensystem ein.

c) Bestimme die x-Koordinate aller Punkte, für die $y = \frac{9}{4}$ oder $y = -\frac{9}{4}$ gilt. Zeichne die Punkte ins Koordinatensystem ein.

d) Gibt es Punkte in k mit der x-Koordinate $x = 0$?

e) In welchen Intervallen muss x liegen, damit die Gleichung $(*)$ mindestens eine Lösung y besitzt?

f) Wenn ein Punkt $P(x \mid y)$ in k liegt, dann liegt auch der Punkt $P(-x \mid y)$ in k. Welche Symmetrie der Menge k wird dadurch beschrieben?

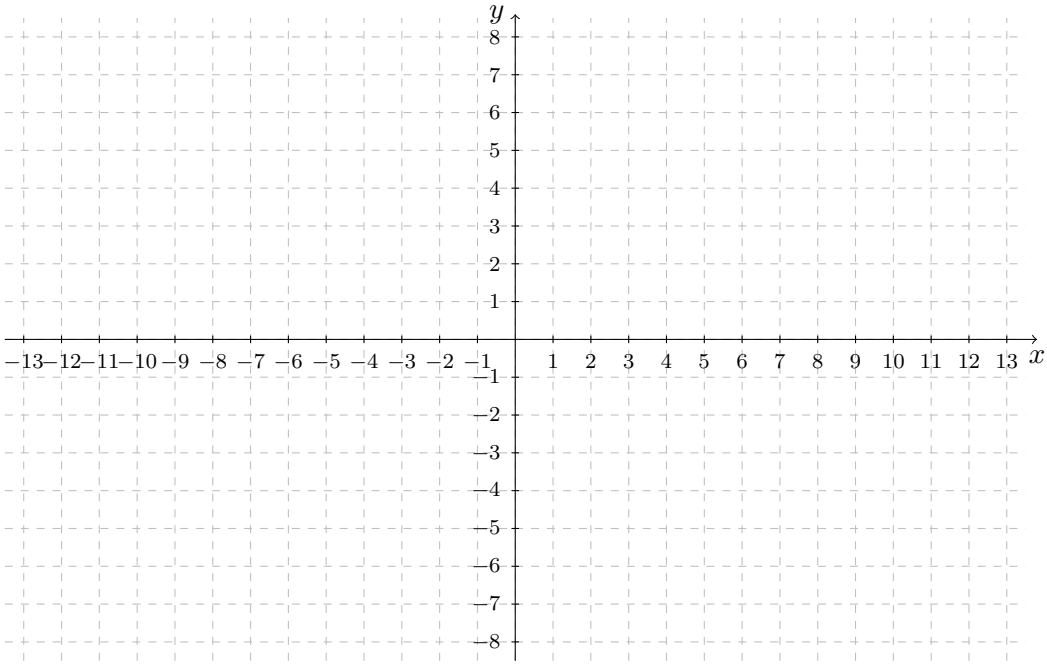
g) Wenn ein Punkt $P(x \mid y)$ in k liegt, dann liegt auch der Punkt $P(x \mid -y)$ in k. Welche Symmetrie der Menge k wird dadurch beschrieben?

h) Die Gleichung $(*)$ kann umgeformt werden zu

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{9}{16} - \frac{9}{x^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{9}{16} - \frac{9}{x^2}}.$$

Für große Werte von x^2 gilt dann $\frac{y}{x} \approx \pm\frac{3}{4}$. Zeichne die beiden Geraden $g_1 : y = \frac{3}{4}x$ und $y = -\frac{3}{4}x$ ins Koordinatensystem ein.

i) Skizziere die Menge k. Beachte hierbei, dass alle Punkte von k mit positiven x-Werten unterhalb von g_1 und oberhalb von g_2 liegen. Benütze die Symmetrieeigenschaften aus **f)** und **g)**.



Arbeitsblatt 2: Hyperbelpunkte

Aufgabe 2

Gegeben ist die Hyperbel mit $F_1(-4 \mid 0)$, $F_2(4 \mid 0)$ und $a = 2$. Konstruiere jeweils mit dem Zirkel alle Punkte der Hyperbel, die die angegebene Bedingung erfüllen:

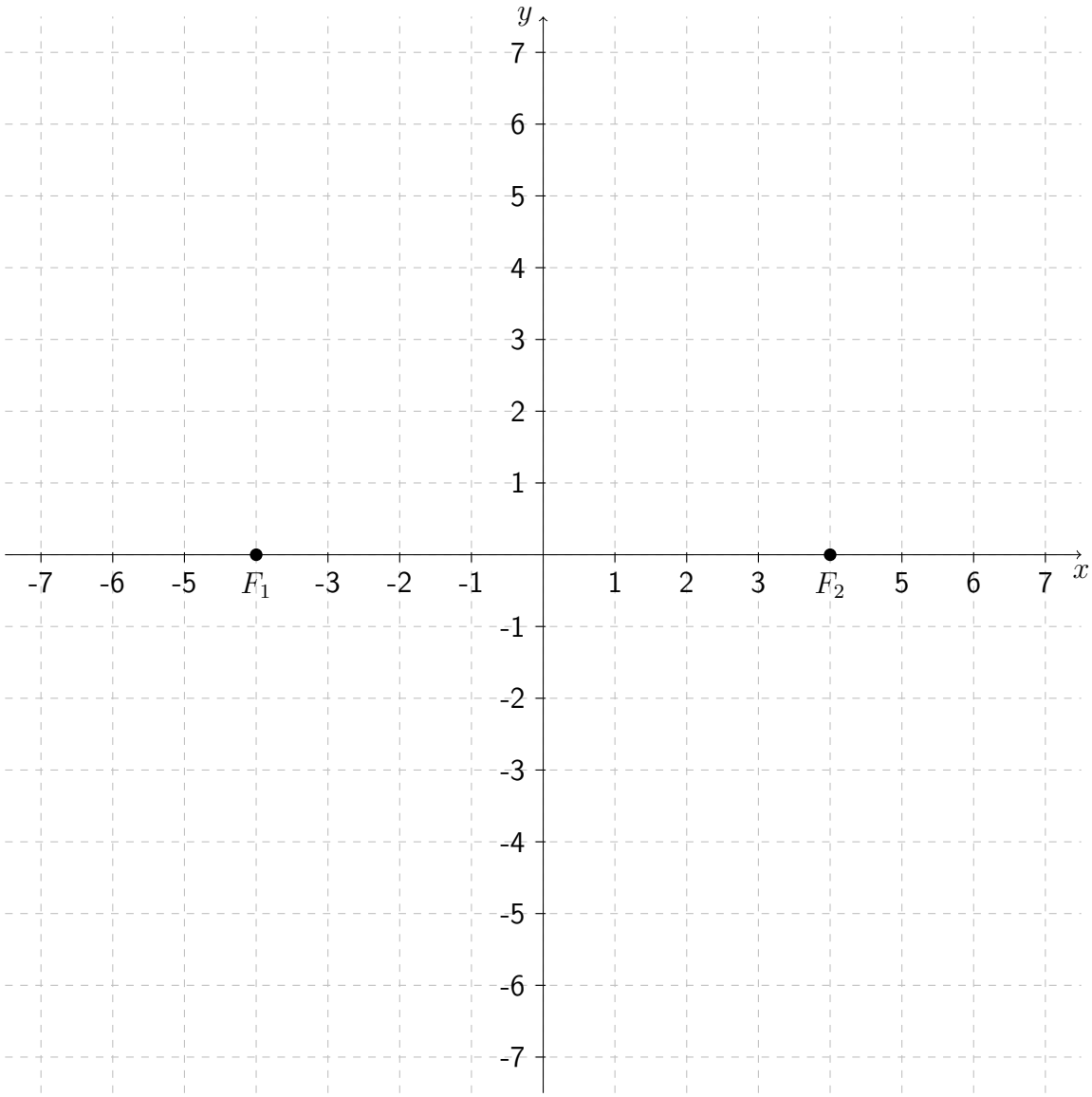
a) P mit $\overline{PF_1} = 2$. (Wie groß muss $\overline{PF_2}$ sein?)

b) P' mit $\overline{P'F_2} = 2$.

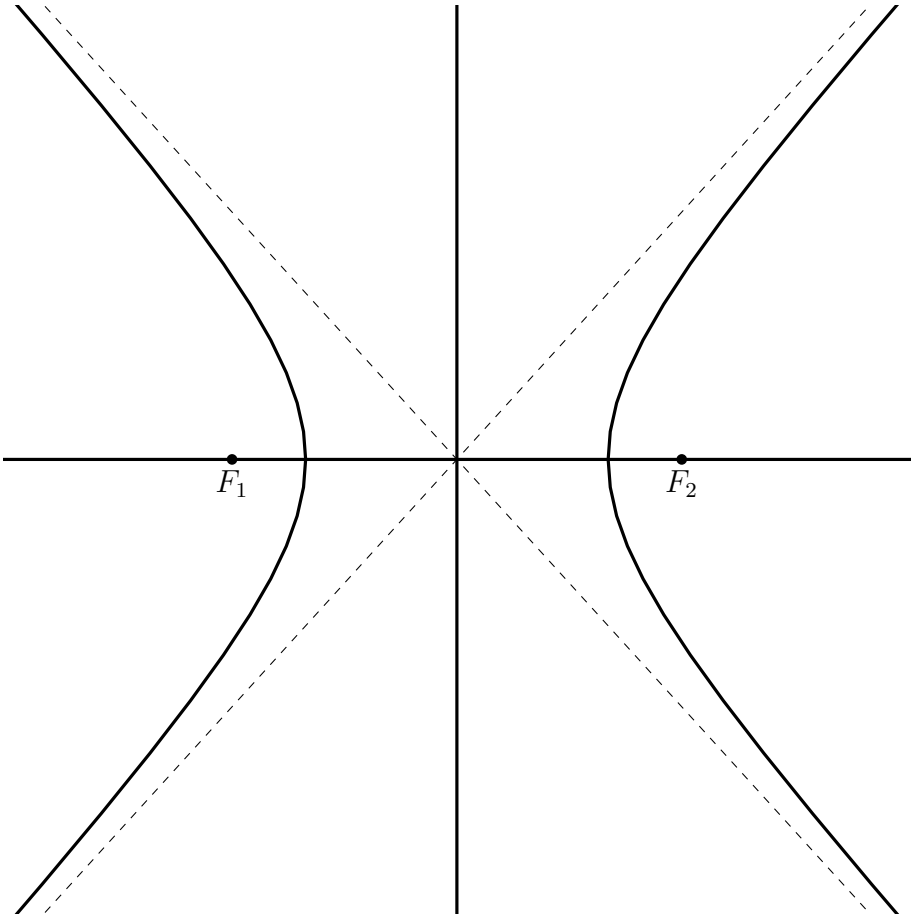
c) Q, Q' mit $\overline{QF_1} = 4$ bzw. $\overline{Q'F_2} = 4$.

d) R, R' mit $\overline{RF_1} = 6$ und $\overline{RF_2} = 10$ bzw. $\overline{R'F_1} = 10$ und $\overline{R'F_2} = 6$.

e) Gegeben ist der Punkt $S(4 \mid 6)$. Berechne $\overline{SF_1}$ und $\overline{SF_2}$. Zeige, dass S auf der Hyperbel liegt, d.h. dass die Eigenschaft $\left|\overline{SF_1} - \overline{SF_2}\right| = 4$ erfüllt ist.



Arbeitsblatt 3: Bezeichnungen bei Hyperbeln



Ein Punkt P liegt genau dann auf der Hyperbel, wenn

F_1, F_2:	$e :=$
A_1, A_2:	$\overline{A_1A_2} =$
M:	$\overline{MF_1} =$
	$\overline{MA_1} =$

Gerade durch F_1, F_2:

Gerade durch M senkrecht zu F_1, F_2:

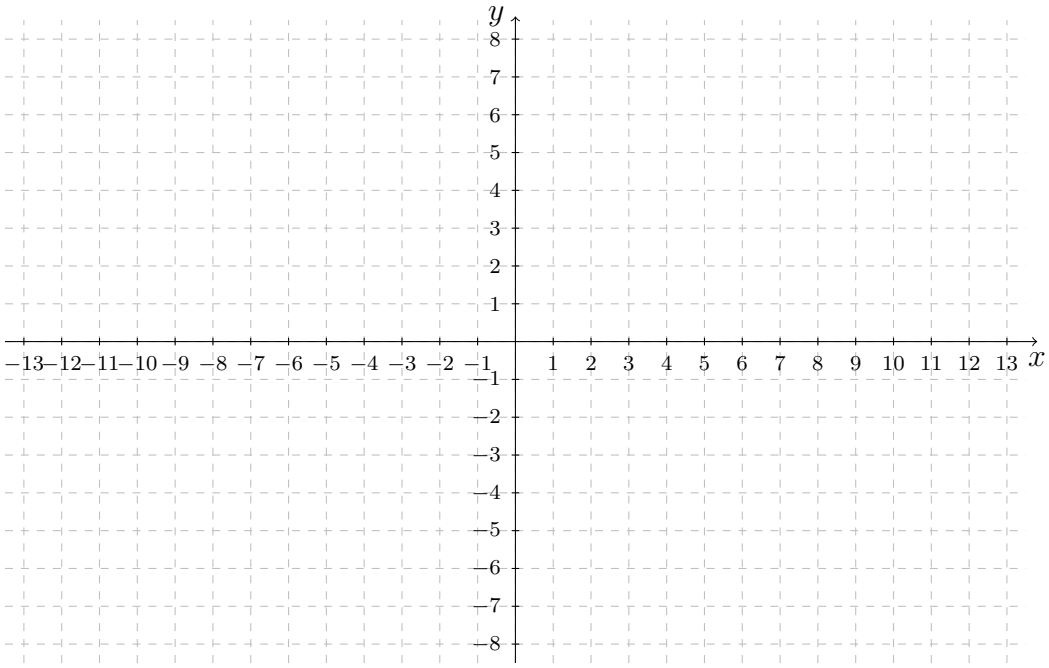
g_1, g_2:	$b :=$

Arbeitsblatt 4: Die Hyperbelgleichung

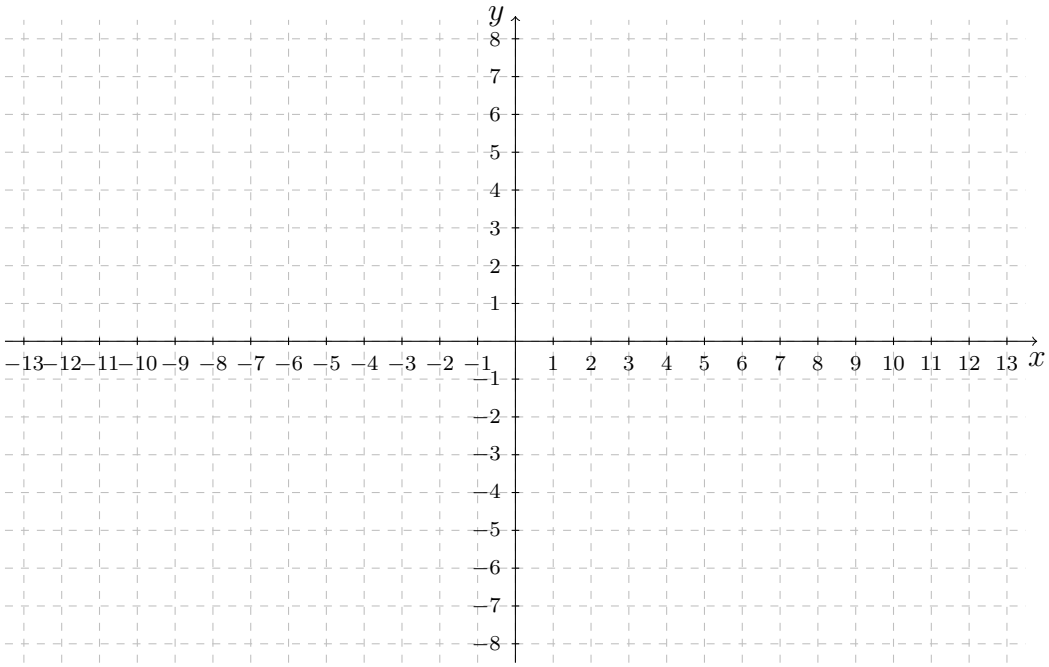
Aufgabe 3

Berechne in jeder Teilaufgabe die Größen a, b, e für die gegebene Hyperbel. Zeichne jeweils die Brennpunkte, die Scheitel, die Asymptoten und die Hyperbel ein ($\sqrt{11} \approx 3{,}3$, $\sqrt{2} \approx 1{,}4$).

a) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$

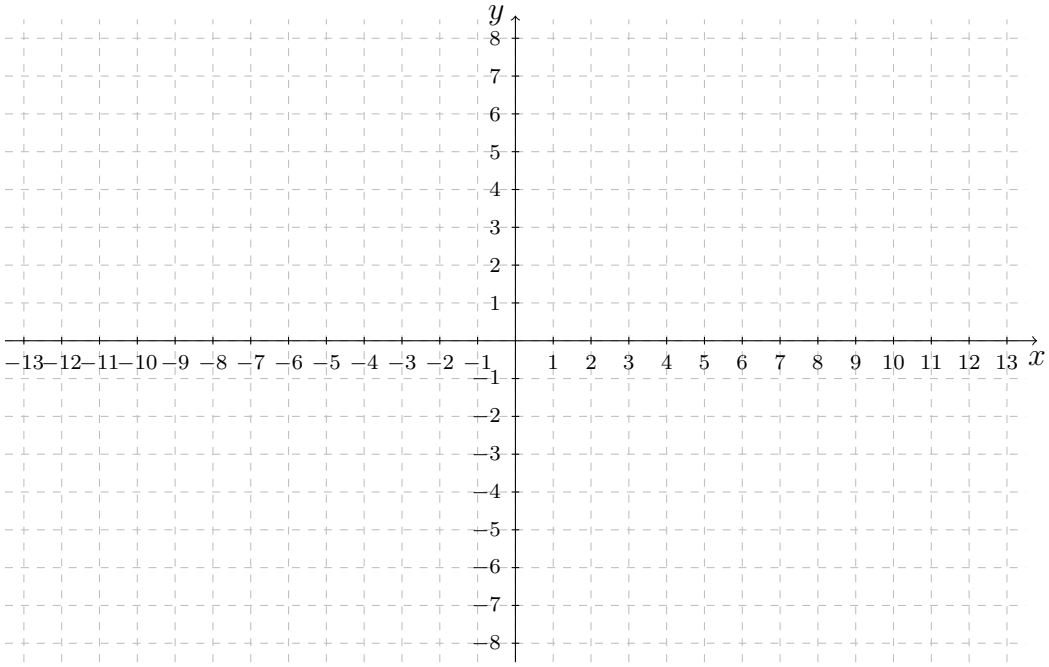


b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$



Bitte wenden

c) $x^2 - y^2 = 1$.



Satz: Jeder Punkt, dessen Koordinaten die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllen, liegt auf der Hyperbel, deren Punkte die Bedingung

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| \;=\; 2a$$

mit $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$, $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ erfüllen.

Beweis: Sei $P(x \mid y)$ mit $x > 0$ und $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Beweise als Erstes, dass

$$\overline{PF_1} \;=\; \frac{e}{a}x + a \qquad (*)$$

gilt.

Löse zunächst die Koordinatengleichung nach y^2 auf:

$$y^2 \;=\; \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\overline{PF_1}^2 &= (x+e)^2 + y^2 \\
&= x^2 + 2ex + e^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 \\
&= \frac{x^2}{a^2}(\underbrace{a^2 + b^2}_{=e^2}) + 2ex + \underbrace{e^2 - b^2}_{=a^2} \\
&= \left(\frac{xe}{a} + a\right)^2.
\end{aligned}$$

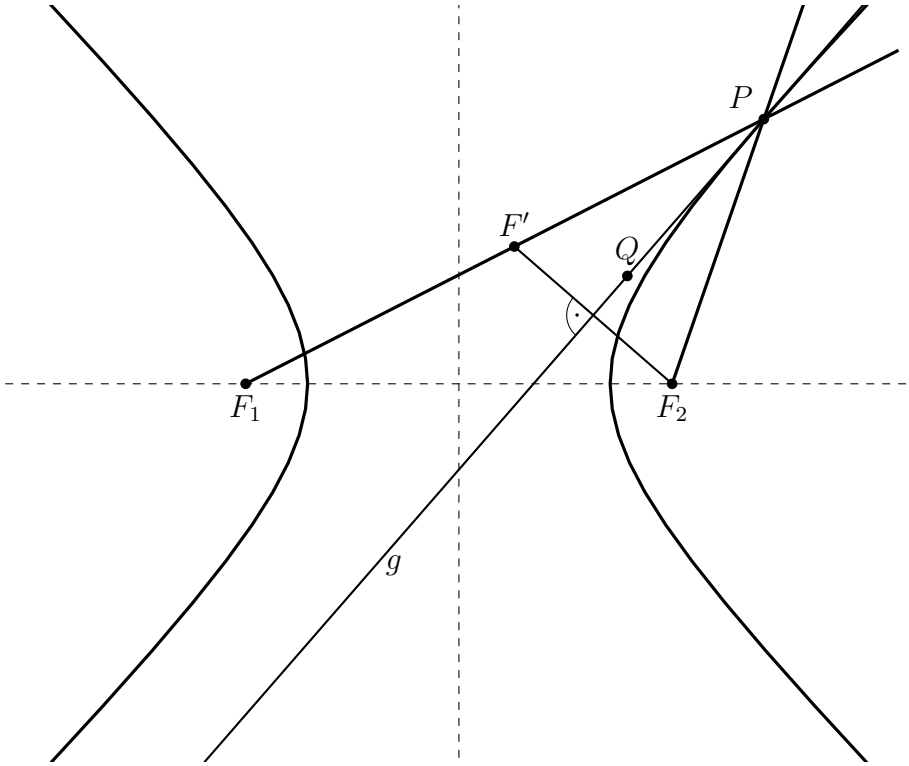
Dies beweist $(*)$. Genauso folgt

$$\overline{PF_2} \;=\; \left|\frac{e}{a}x - a\right| \;=\; \frac{e}{a}x - a. \qquad (**)$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt nun $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$.

Für $x < 0$ gelten $(*)$ und $(**)$ entsprechend, es müssen nur die rechten Seiten mit (-1) multipliziert werden. $\square$

Arbeitsblatt 5: Tangente an eine Hyperbel



Arbeitsblatt 6: Reflexion an einem Hyperbelspiegel

Aufgabe 4

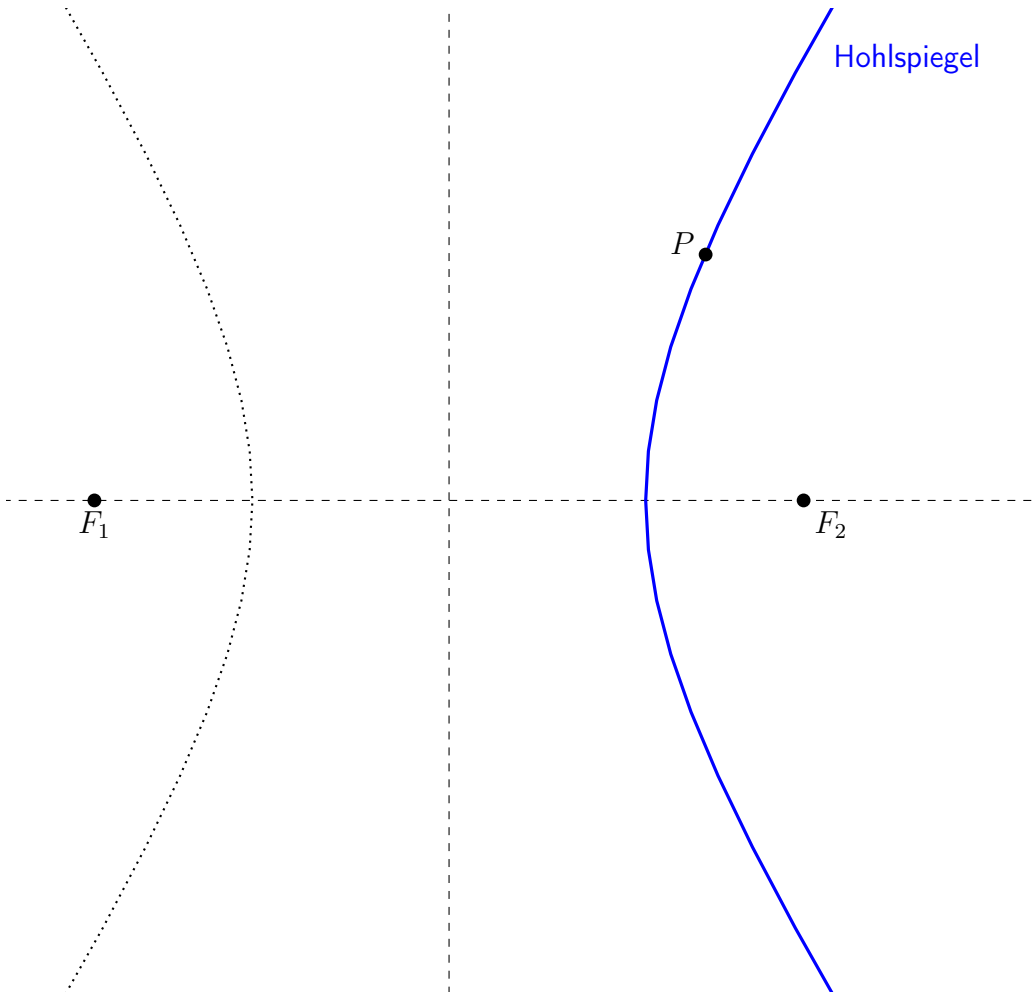
Werden Lichtwellen an einem ebenen Spiegel reflektiert, so gilt das Reflexionsgesetz „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“. Bei gekrümmten Spiegeln gilt für die Reflexion ebenfalls „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“, wobei hier die Winkel zur Tangente bzw. Tangentialebene gemeint sind. In dieser Aufgabe wird untersucht, wie Lichtwellen an hyperbelförmig gekrümmten Spiegeln reflektiert werden. Gegeben ist ein Hohlspiegel mit hyperbelförmiger Krümmung (siehe Zeichnung).

a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangente g an die Hyperbel im Punkt P.

b) Zeichne die vier gleichen Winkel α ein, die die Tangente und die Geraden durch P und F_1 bzw. durch P und F_2 einschließen.

c) Zeichne den Verlauf eines Lichtstrahls, der von einer Lichquelle im Brennpunkt F_2 ausgeht und im Punkt P von der konstruierten Tangente g reflektiert wird.

d) Zeichne zwei weitere Punkte Q, R auf der Hyperbel unterhalb der waagrechten Symmetrieachse ein und zeichne den Verlauf der Lichstrahlen, die von F_2 ausgehen und in Q bzw. R reflektiert werden.



Weiter auf Seite 2

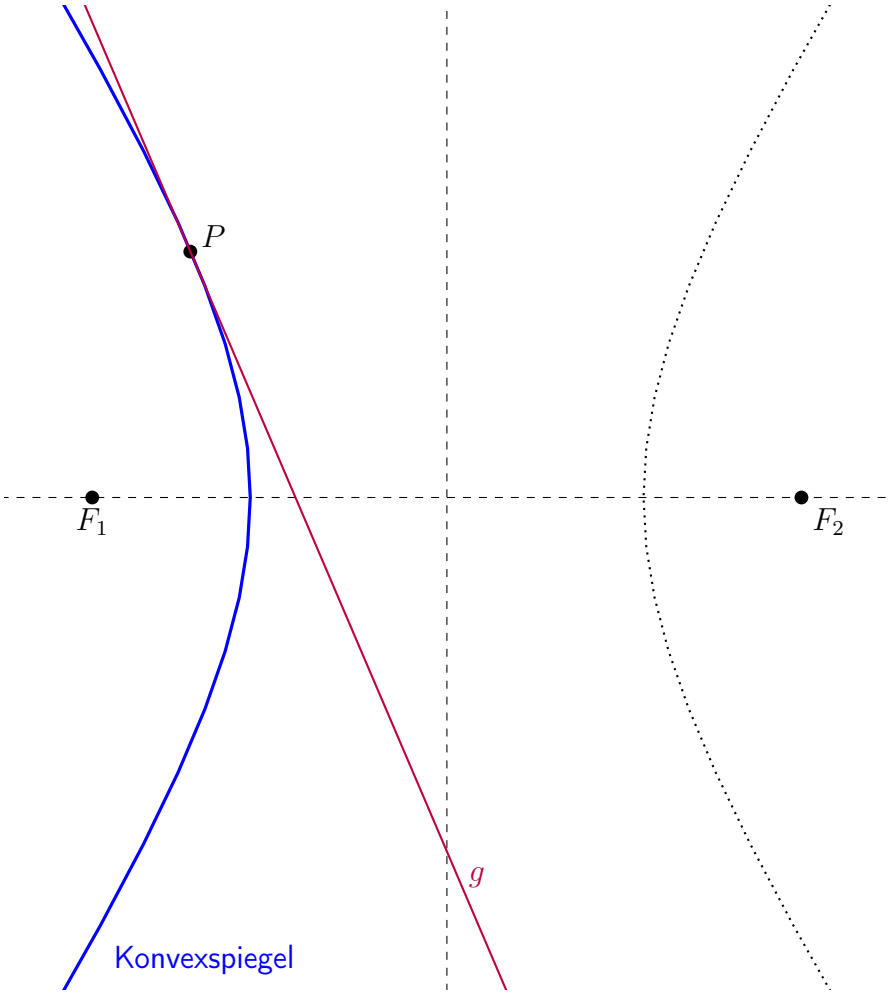
Aufgabe 5

Nun ist ein Konvexspiegel mit hyperbelförmiger Krümmung gegeben (siehe Graphik).

a) Zeichne die Geraden durch P und F_1 bzw. durch P und F_2 und die vier gleichen Winkel α ein, die die Tangente und diese Geraden einschließen.

b) Zeichne den Verlauf eines Lichtstrahls, der von einer Lichquelle im Brennpunkt F_2 ausgeht und im Punkt P von der eingezeichneten Tangente g reflektiert wird.

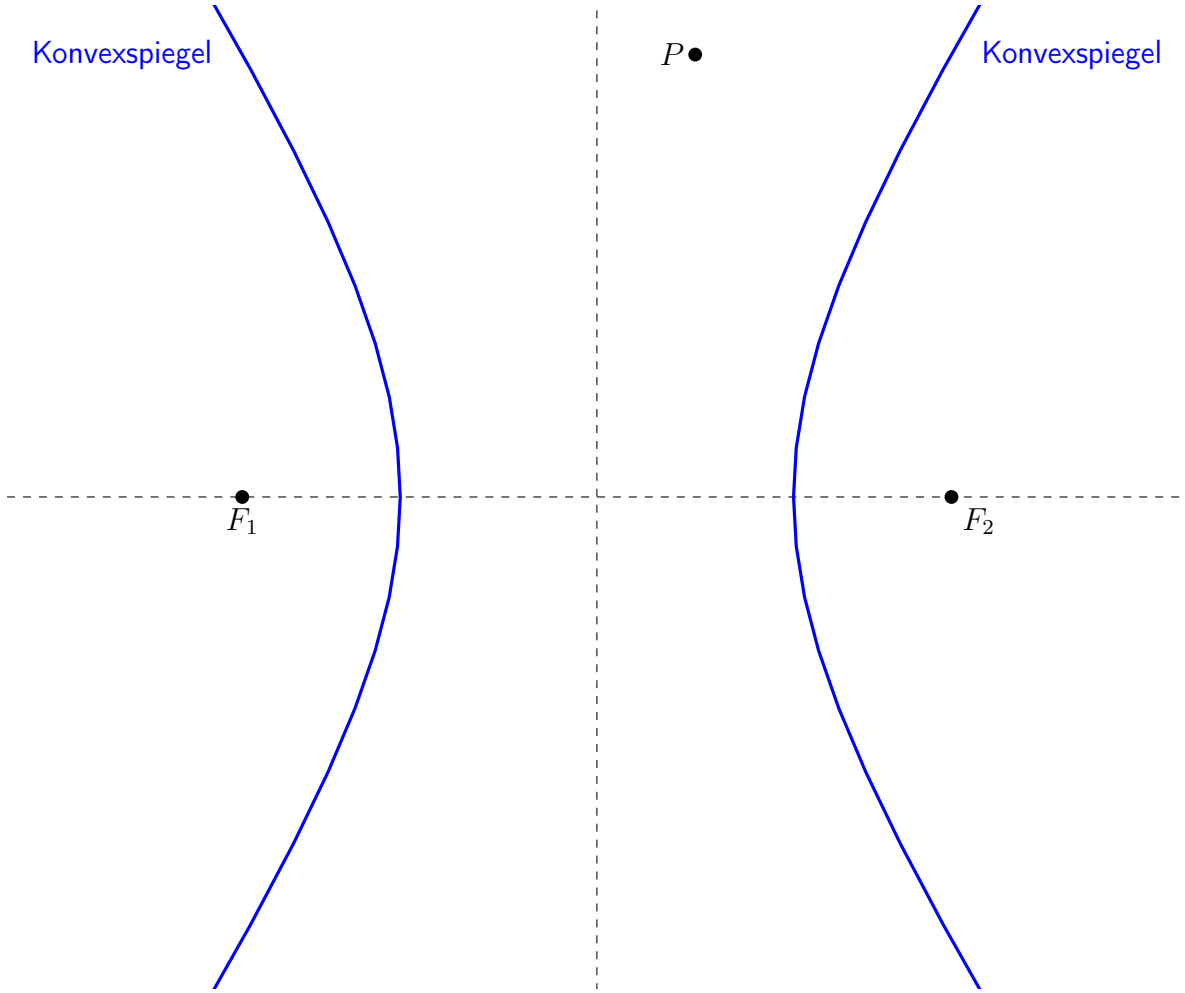
c) Zeichne zwei weitere Punkte Q, R auf der Hyperbel ein, die nicht auf der Hauptachse der Hyperbel liegen, und zeichne den Verlauf der Lichstrahlen, die von F_2 ausgehen und in Q bzw. R reflektiert werden.



Weiter auf Seite 3

Aufgabe 6

Gegeben sind zwei Konvexspiegel mit hyperbelförmiger Krümmung (siehe Skizze). Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der von P aus in Richtung F_2 verläuft und dann mehrfach an beiden Spiegeln reflektiert wird.



Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 7

a) Eine Hyperbel ist durch zwei Punkte F_1, F_2 und eine Länge $a < \frac{1}{2}\overline{F_1F_2}$ gegeben. Vervollständige die Sätze.

Die Punkte F_1 und F_2 werden als _____ bezeichnet.

Mit A_1 und A_2 werden die _____ bezeichnet.

Für jeden Punkt P der Hyperbel gilt $\left|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}\right| =$ _____

Die Gerade durch F_1 und F_2 heißt _____.

b) Gegeben ist die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$. Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte und der Scheitel sowie die Gleichungen der Asymptoten.

F_1	F_2	A_1	A_2
g_1 :		g_2 :	

Aufgabe 8

Wahr oder falsch?

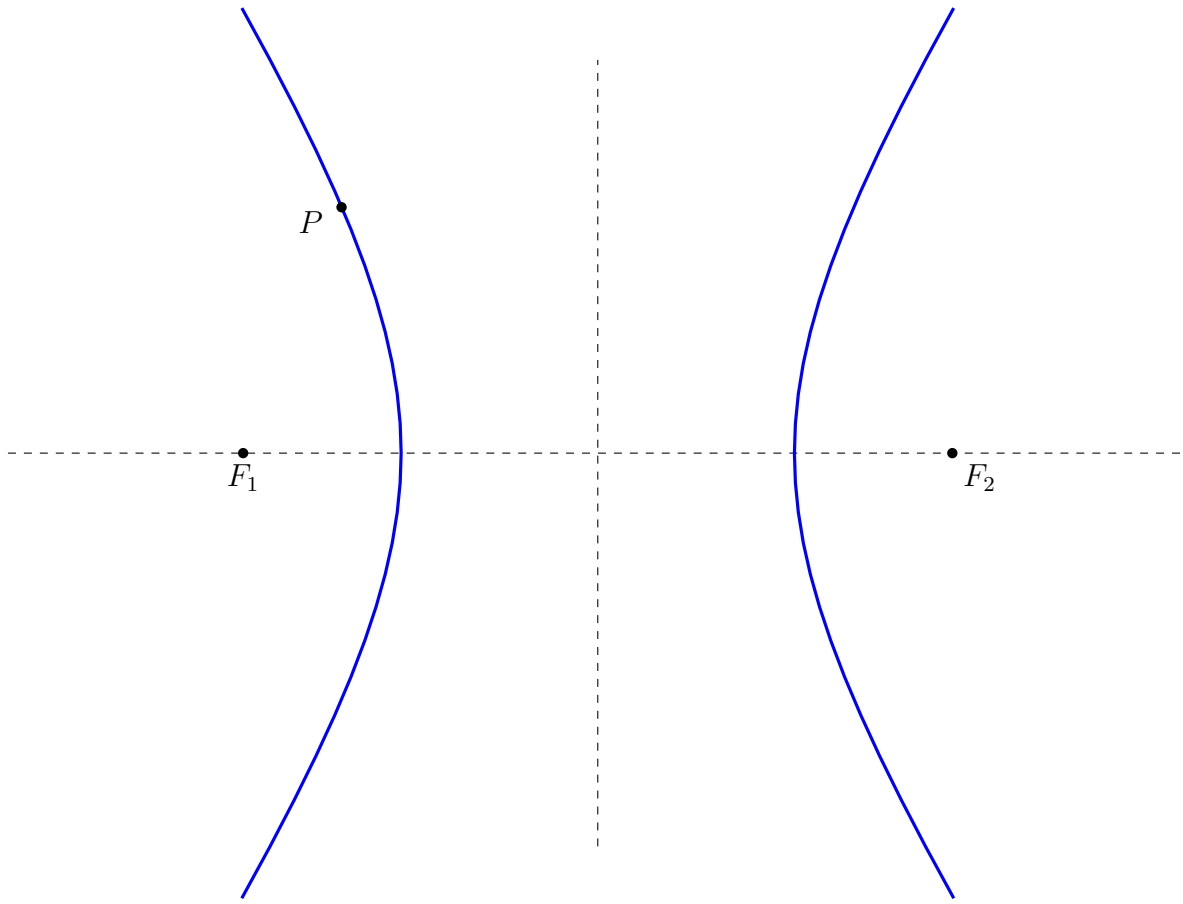
	w/f
Für alle Punkte P einer Hyperbel hat die Differenz $\overline{F_1P} - \overline{F_2P}$ den selben Wert.	
Eine Asymptote einer Hyperbel ist eine Gerade, der die Hyperbelpunkte beliebig nahe kommen.	
Der Punkt einer Hyperbel, der zum Brennpunkt F_1 den kleinsten Abstand hat, ist ein Scheitel.	
Jede Hyperbel ist punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt.	
Die Brennpunkte einer Hyperbel haben vom Mittelpunkt M immer einen größeren Abstand als die Scheitel .	
Seien $a, b > 0$. Die Asymptoten zu einer Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ besitzen die Steigung $m = \frac{a}{b}$ oder $m = -\frac{a}{b}$.	
In jedem Scheitel einer Hyperbel ist die Tangente parallel zur Nebenachse.	
Sei eine Hyperbel durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben. Im Fall $a > b > 0$ ist die x-Achse die Hauptachse, im Fall $b > a > 0$ ist die y-Achse die Hauptachse.	

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 9

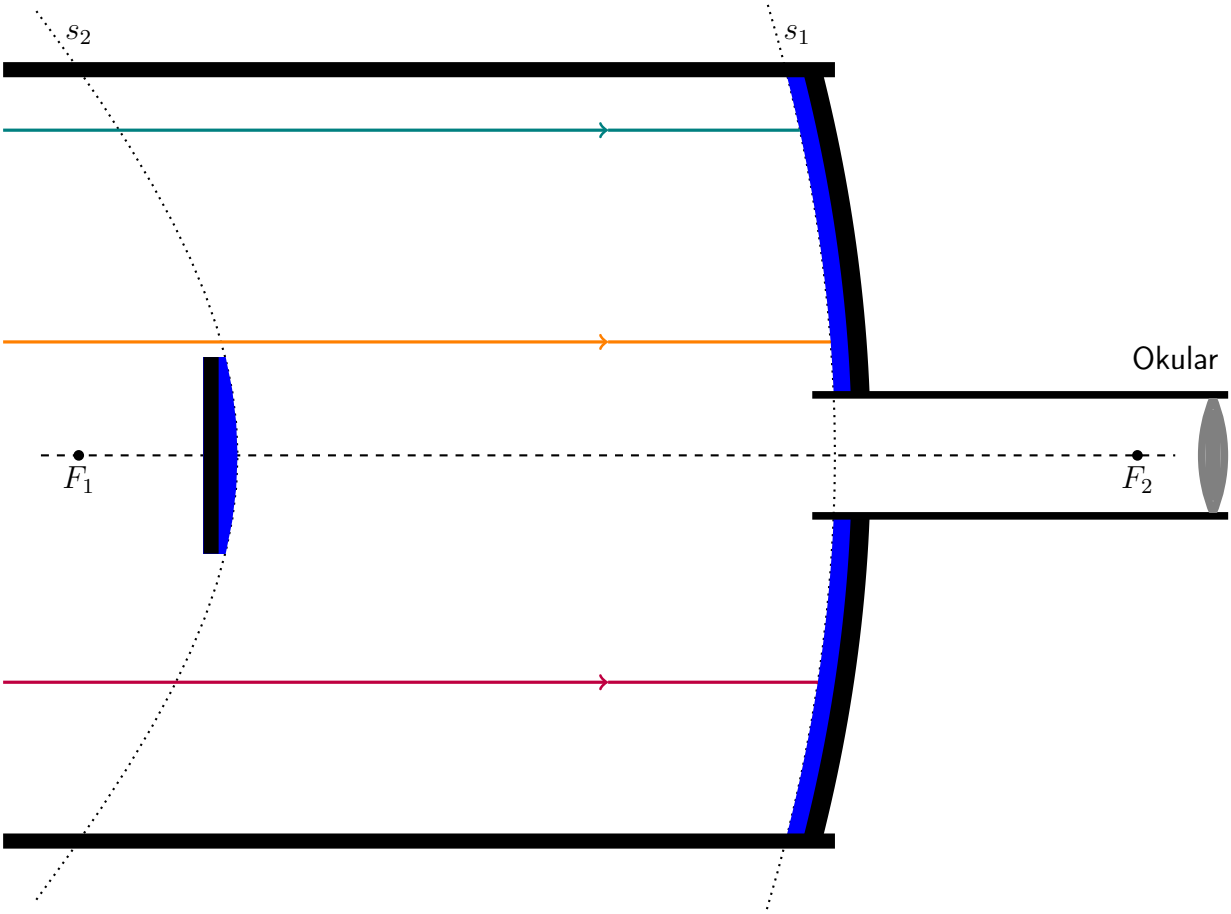
a) Konstruiere mit Zirkel und Lineal die Tangente g an die Hyperbel im Punkt P.

b) Zeichne die vier gleichen Winkel α ein, die die Tangente und die Geraden durch P und F_1 bzw. durch P und F_2 einschließen.



Weiter auf Seite 3

Aufgabe 10

Im Cassegrain-Teleskop werden die (von links parallel einfallenden) Lichtstrahlen zuerst von einem parabelförmig gekrümmten Hohlspiegel s_1 (mit Loch in der Mitte) und danach von einem hyperbelförmig gekrümmten Konvexspiegel s_2 reflektiert Die Spiegel sind so angeordnet, dass die Symmetrieachse von Parabel und Hyperbel übereinstimmen und auch der Brennpunkt der Parabel und der Brennpunkt F_1 der Hyperbel zusammenfallen. Zeichne den Strahlengang für die drei Lichtstrahlen bis zur Linse des Okulars ein.

Hinweis: Im Bild sind die gemeinsame Symmetrieachse der Parabel und der Hyperbel (gestrichelt), die Brennpunkte F_1, F_2 der Hyperbel und die Parabel s_1 und Hyperbel s_2 (gepunktet) eingezeichnet.