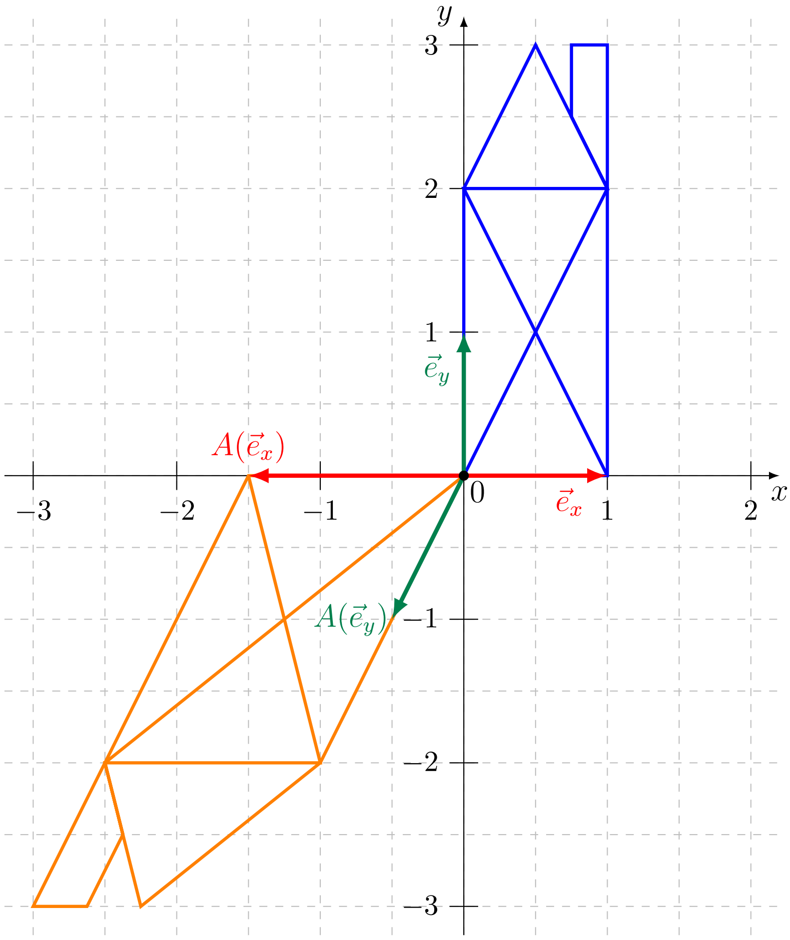
Lineare Abbildungen geometrisch und analytisch

L. Duschek, P. Lesky, F. Raiber, A. Sittig
Universität Stuttgart



Vorwort

Der vorliegende Text ist in einem Kurs des Schülerseminars für die Klassenstufen 8–10 entstanden. Wir haben das Privileg, hier mathematisch besonders begabte Schüler:innen unterrichten zu können. Daher sind die Dichte des Materials und die Geschwindigkeit sehr hoch.

Das Material wurde von den Studierenden L. Duschek, F. Raiber und A. Sittig im Rahmen von fachdidaktischen Übungen ausgearbeitet und im Schülerseminar unterrichtet. Unter Einbeziehung der Erfahrungen aus ihrem Unterricht wurde das Material überarbeitet und als Video-Kurs mit Übungen produziert. Der Kurs ist auf der Homepage des *Schülerzirkels Mathematik* an der Uni Stuttgart zu finden. Für den Video-Kurs wurden schriftliche Aufgaben zur Lernkontrolle entwickelt. Die teilnehmenden Schüler:innen konnten Ihre Bearbeitungen der schriftlichen Aufgaben einsenden und erhielten eine Korrektur mit Musterlösungen zurück. So konnte eine qualifizierte Teilnahmebestätigung ausgestellt werden.

Zu dem vorliegenden Thema findet sich wenig Literatur. Wir haben das Buch *Analytische Geometrie der Abbildungen*, Jehle-Möller-Zeitler, BSV 1968 (München) verwendet. Aber den größten Teil des Materials haben sich die Studierenden selber ausgedacht.

Zur Struktur des Dokuments: Im ersten Teil wird der Unterrichtsverlauf beschrieben und kommentiert. Alle Aufgaben außer den schriftlichen sind mit Lösungen angegeben. Ist in Aufgaben Platz zum Eintragen der Lösungen vorgegeben, dann sind die Lösungen in blau eingetragen. Darauf folgt ein Anhang über trigonometrische Funktionen. Dieser ist für Schüler:innen gedacht, die noch zu wenig Vorkenntnisse haben. Danach ist der komplette Heftaufschrieb notiert, so wie er im Schülerheft stehen sollte, ergänzt durch Angaben, wo die Übungsblätter ausgeteilt wurden. Ab Kapitel 10 sind dann die Ausarbeitungen zu den einzelnen Unterrichtsstunden gegeben. Diese enthalten den Tafelaufschrieb und die Übungsblätter einschließlich der schriftlichen Aufgaben.

Ich hoffe, dass dieses Material eine Erleichterung für die Unterrichtsvorbereitung bringt, und wünsche allen Leserinnen und Lesern viel Freude mit dem Thema.

Über Rückmeldungen und Verbesserungsvorschläge an `zirkel@mathematik.uni-stuttgart.de` freue ich mich.

Im August 2023 Peter Lesky

Erste Fassung 2023: Lukas Duschek, Ferdinand Raiber, Alexander Sittig.
Betreuung durch Jan Köllner, Matthias Künzer, Peter Lesky (Universität Stuttgart)
Überarbeitung 2023: Peter Lesky

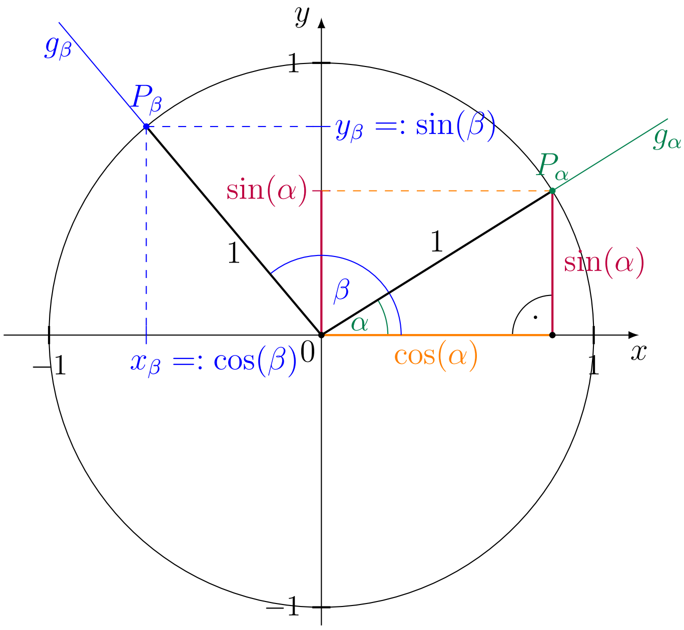
Inhaltsverzeichnis

1 Unterrichtseinheit 1 - Vektoren

1.1 Arbeitsblatt 1: Trigonometrische Grundlagen

Definition: Für beliebige Winkel α sei g_α die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht (für $\alpha < 0°$ Drehung mit Winkel $|\alpha|$ im Uhrzeigersinn). $P_\alpha(x_\alpha \mid y_\alpha)$ sei der Schnittpunkt des Einheitskreises mit g_α. Man definiert

$$\sin(\alpha) := y_\alpha, \qquad \cos(\alpha) := x_\alpha.$$



Satz: Für beliebige Winkel α gelten:

$$\begin{array}{lrcl}
1) & \sin(360° + \alpha) & = & \sin\alpha, \\
2) & \cos(360° + \alpha) & = & \cos\alpha \\
3) & \sin(-\alpha) & = & -\sin(\alpha) \\
4) & \cos(-\alpha) & = & \cos(\alpha) \\
5) & \big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 & = & 1
\end{array}$$

Tabelle exakter Werte für Sinus und Cosinus:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

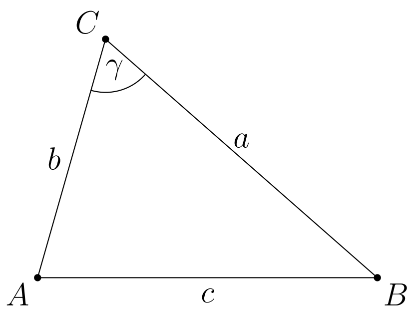
Satz: Für beliebige Winkel α, β gelten die **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)
\end{aligned}$$

Cosinussatz: In jedem Dreieck ABC gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

Hierbei sind für a, b, c die Längen der entsprechend bezeichneten Seiten einzusetzen, γ bezeichnet den von den Seiten a, b eingeschlossenen Winkel.



Vorgehen: Das erste Arbeitsblatt wird an der Tafel entwickelt, die Schüler:innen müssen nicht mitschreiben.

> **Anmerkung**
> Da die trigonometrischen Funktionen im vorhergehenden Schülerseminar *Komplexe Zahlen* ausführlich behandelt wurden, war hier nur eine kurze Wiederholung notwendig. Eine ausführliche Behandlung der trigonometrischen Funktionen und der benötigten Eigenschaften findet sich im Anhang, Kapitel 7 und Kapitel 8.

1.2 Vektoren

Tafelanschrieb

I. Vektoren

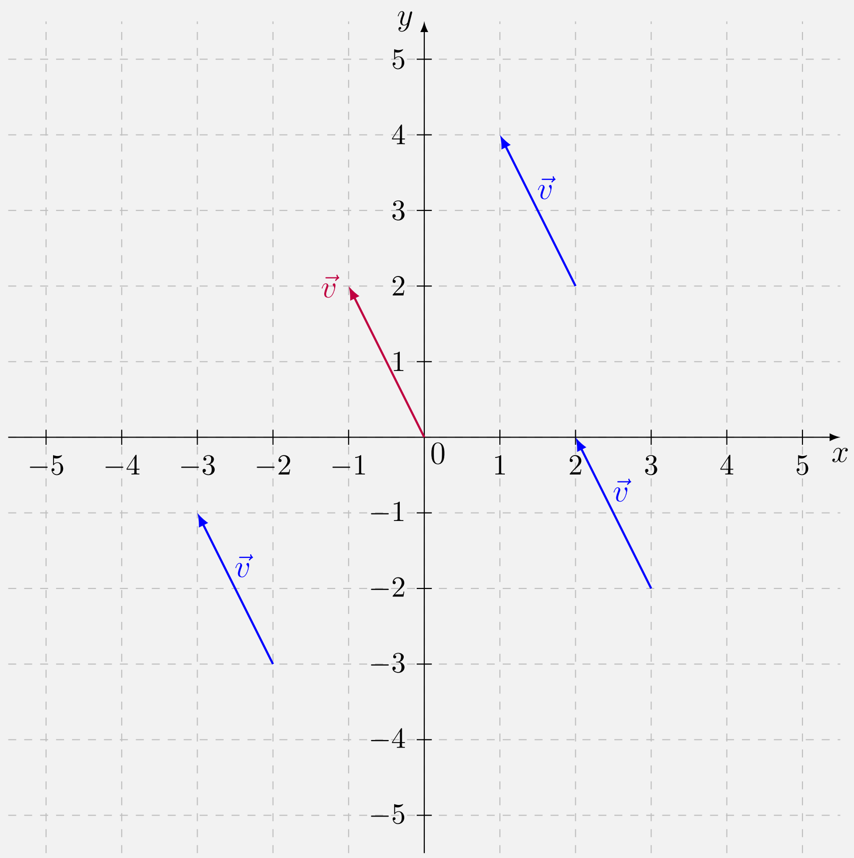
1. Definition von Vektoren

Definition: 1) Ein Vektor $\vec{v}$ ist eine Verschiebungsvorschrift in der Ebene.

Vorgehen: Die folgende Aufgabe wird gemeinsam gelöst (Visualizer). Zuerst die blauen Vektoren einzeichnen. Danach erst die Koordinaten des Vektors.

Aufgabe 1.1 (*Arbeitsblatt 1.2 (Definition von Vektoren), Aufgabe 1*)

Wir zeichnen verschiedene Pfeile des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Der Standard-Pfeil zeigt auf den Punkt $(-1 \mid 2)$.

Lösung: Siehe Graphik.

Tafelanschrieb

2) Vektoren kann man durch ihre Pfeile darstellen. Ist v_x die Verschiebung in x-Richtung, v_y die Verschiebung in y-Richtung, so schreibt man

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

3) Die Menge aller Vektoren bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2$.

4) Derjenige Pfeil des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, der im Ursprung $(0 \mid 0)$ startet, heißt <u>Standard-Pfeil</u> von $\vec{v}$. Er zeigt auf den zu $\vec{v}$ gehörenden Punkt $(v_x \mid v_y)$.

Mündlich: Zusammenfassung: Zu jedem Vektor gehören unendlich viele Verschiebungspfeile. Der Standard-Pfeil gibt die Verschiebung des Ursprungs an.

Tafelanschrieb

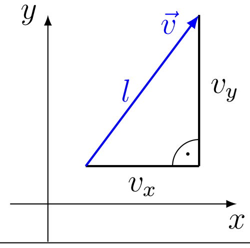
<u>2. Norm von Vektoren</u>

<u>Definition:</u> Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Die <u>Norm</u> von $\vec{v}$ definiert man durch

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

<u>Satz:</u> Die Norm des Vektors $\vec{v}$ entspricht der Länge jedes seiner Pfeile.

<u>Beweis:</u>



Pythagoras: $l^2 = v_x^2 + v_y^2$

$\Rightarrow \; l = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \|\vec{v}\|$

$\square$

Mündlich: Für das Koordinatensystem im Beweis kein Geodreieck verwenden. Es soll nur eine grobe Skizze gezeichnet werden.

Tafelanschrieb

<u>3. Rechnen mit Vektoren</u>

<u>Definition:</u> 1) Addition zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$

2) Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 6 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Vorgehen: Aufgabe 2 wird gemeinsam bearbeitet (Visualizer, Schüler:innen schreiben auf ihrem Arbeitsblatt mit).

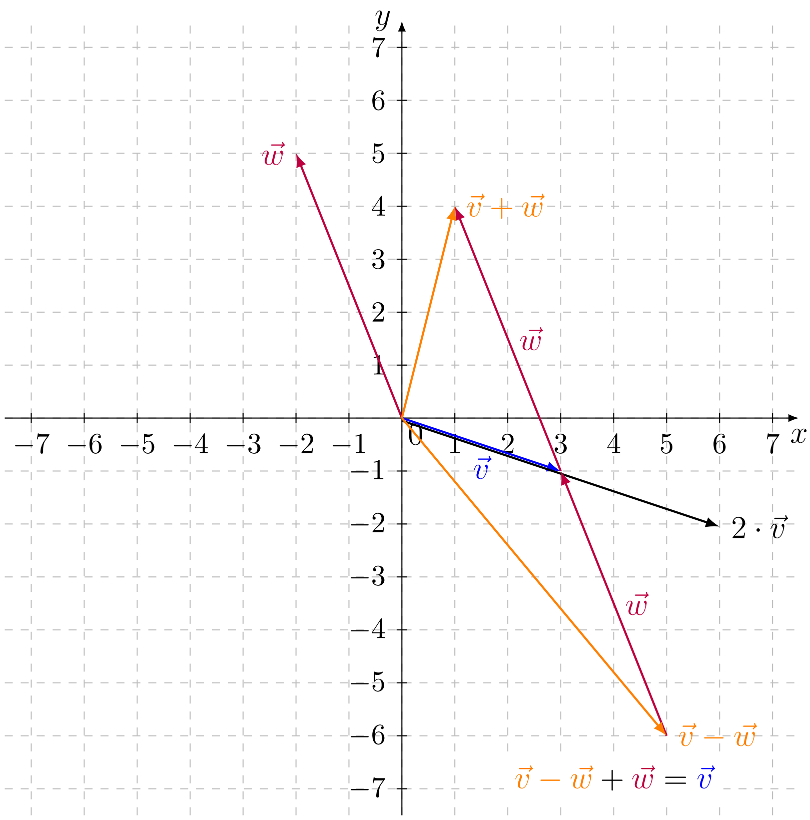
Aufgabe 1.2 (*Arbeitsblatt 1.3 (Rechenoperationen - Geometrische Interpretation), Aufgabe 2*)

a) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne **ohne** vorherige Rechnung die Standard-Pfeile von $\vec{v} + \vec{w}$, $2 \cdot \vec{v}$ und $\vec{v} - \vec{w}$ ein.

c) Berechne die Vektoren aus b) direkt und vergleiche mit deiner Zeichnung.

Lösung: **a)** und **b)**



c) $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Mündlich: Betonen, dass die Addition der Hintereinanderausführung der Verschiebungen entspricht.

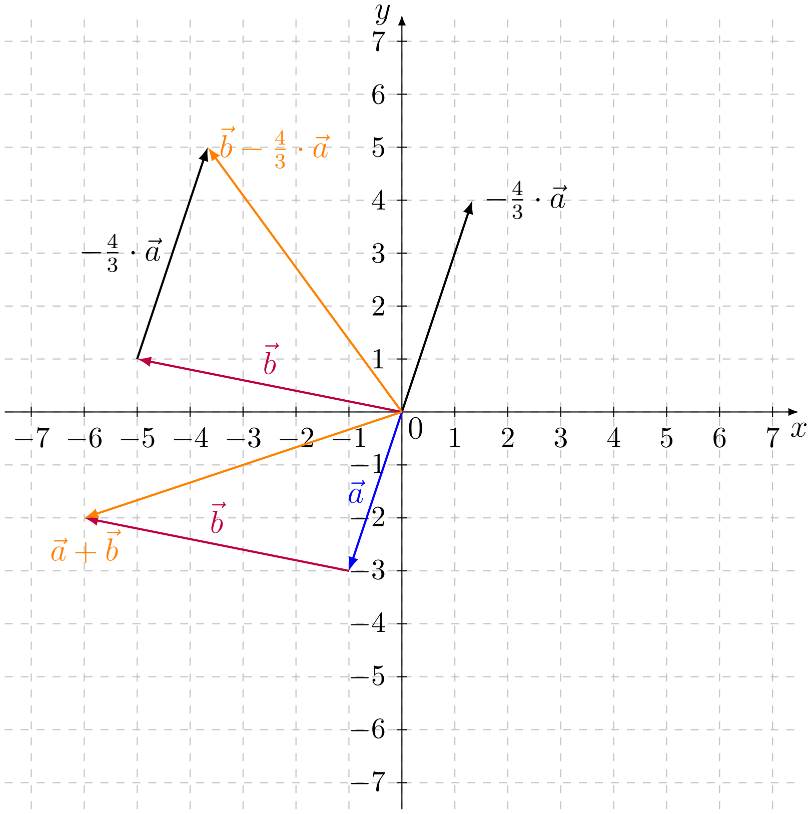
Aufgabe 1.3 (*Arbeitsblatt 1.4 (Rechenoperationen und Norm), Aufgabe 3*)

a) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a} + \vec{b}$, $-\frac{4}{3} \cdot \vec{a}$ und $\vec{b} - \frac{4}{3} \cdot \vec{a}$ ein, **ohne** diese Vektoren zu berechnen.

c) Berechne die Vektoren aus b) direkt und kontrolliere damit deine Zeichnung.

Lösung: **a)** und **b)**



c) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\quad -\frac{4}{3} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{b} - \frac{4}{3} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.4 (*Arbeitsblatt 1.4 (Rechenoperationen und Norm), Aufgabe 4*)

a) Berechne für die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ jeweils die Norm.

b) Berechne die Norm von $\vec{v} + \vec{w}$.

c) Formuliere eine kurze geometrische Begründung, warum hier $\|\vec{v} + \vec{w}\| \neq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ gilt. Konstruiere dafür zunächst die Vektorsumme $\vec{v} + \vec{w}$.

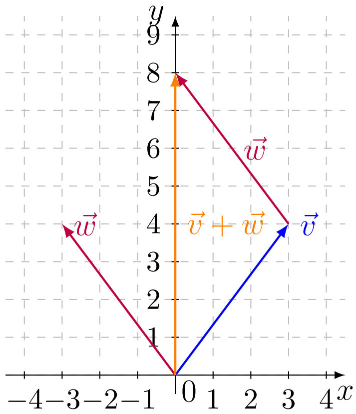
d) Gib an, welche Bedingung zwei beliebige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$ erfüllen müssen, so dass die Gleichheit $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ doch gilt.

Lösung: **a)** $\|\vec{v}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{9+16} = 5$.

b) $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 + (-3) \\ 4 + 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0 + 64} = 8.$

c) Geometrische Begründung: Da $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nicht in dieselbe Richtung zeigen, ist die Länge von $\vec{v}+\vec{w}$ kleiner als die Summe der Längen.

d) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ müssen in dieselbe Richtung zeigen, d.h. es muss $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$ oder $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$ mit $\lambda \geq 0$ gelten.



Tafelanschrieb

4. Skalarprodukt und Winkel

Definition: Das Skalarprodukt von $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} := v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y.$$

Mündlich: Vektor Mal Vektor ergibt eine Zahl. Zahlen bezeichnet man auch als Skalare, im Gegensatz zu Vektoren. Deshalb der Name Skalarprodukt.

Tafelanschrieb

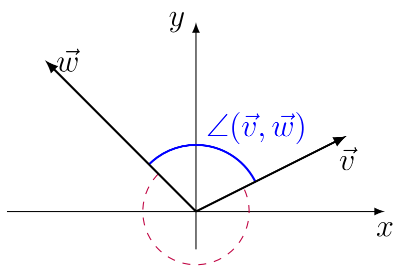
Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 5$

Hilfssatz: $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

Beweis:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y \\ &= v_x^2 + v_y^2 \\ &= \|\vec{v}\|^2 \qquad \square \end{aligned}$$

Definition: Seien $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$.

1) Der Winkel $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist das Minimum der eingeschlossenen Winkel ihrer Standard-Pfeile.



Es gilt also $0° \leq \angle(\vec{v}, \vec{w}) \leq 180°$

2) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen orthogonal, falls $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90°$.

Mündlich: Skizze ohne Geodreieck, muss nicht genau sein.

Mündlich: Die beiden Begriffe „Skalarprodukt“ und „Winkel“ sind verknüpft.

Tafelanschrieb

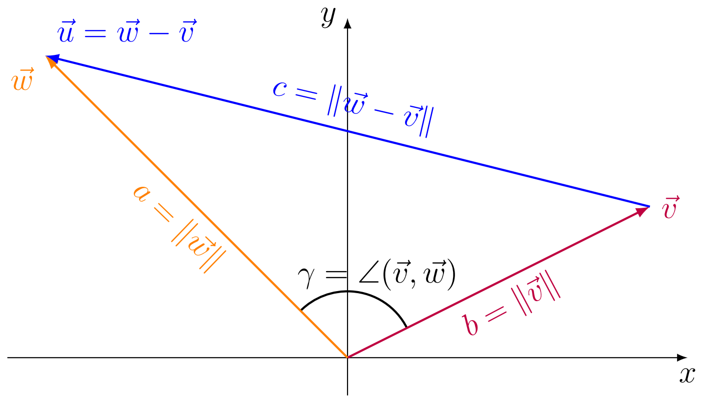
Satz (Skalarprodukt-Winkel-Formel): Seien $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Dann

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big).$$

Mündlich: Durch die Formel kann der Winkel zwischen Vektoren berechnet werden, ohne die Vektoren zu zeichnen! Man löst dazu die Gleichung nach dem Cosinus des gesuchten Winkels auf. Das Skalarprodukt und die Normen sind sehr einfach berechenbar. Dadurch wird die Winkelberechnung auch sehr einfach.

Tafelanschrieb

Beweis:



Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} = (\vec{w} - \vec{v}) \bullet (\vec{w} - \vec{v}) \\ &= \vec{w} \bullet \vec{w} - \vec{v} \bullet \vec{w} - \vec{w} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} \\ &= \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \bullet \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

In die Gleichung des Cosinussatzes eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \bullet \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 &= \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow \quad & -2\vec{v} \bullet \vec{w} &= -2\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow \quad & \vec{v} \bullet \vec{w} &= \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \qquad \square \end{aligned}$$

Spezialfall: $\vec{v}, \vec{w}$ orthogonal

$\Leftrightarrow \ \angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90°$

$\Leftrightarrow \ \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$ und $\vec{v}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mündlich: Der Cosinussatz gilt in jedem Dreieck. Er ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras. Der Term $-2ab\cos(\gamma)$ ist eine Art Korrekturterm, der die Formel richtig macht, wenn der Winkel nicht $90°$ beträgt.

Aufgabe 1.5 (*Arbeitsblatt 1.5 (Winkel zwischen Vektoren), Aufgabe 5*)

a) Gegeben sind $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne $\vec{v} \bullet \vec{w}$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\cos\left(\angle(\vec{v}, \vec{w})\right)$ und $\angle(\vec{v}, \vec{w})$.
Hinweis: Tabelle exakter Werte für Sinus und Cosinus.

b) Bestimme, welche der folgenden Vektoren orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

c) Finde rechnerisch **alle** Vektoren $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$, die orthogonal zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind.

d) Zeichne $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und drei verschiedene zu $\vec{v}$ orthogonale Vektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ in das Koordinatensystem ein.

Lösung: **a)** $\vec{v} \bullet \vec{w} = -1 + 6 = 5$,
$\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{10}$,
$\cos\left(\angle(\vec{v}, \vec{w})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 45°$.

b)

$$\begin{array}{lcrcll}
\vec{a} \bullet \vec{b} & = & 6+6 & \neq & 0 & \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ sind nicht orthogonal,} \\
\vec{a} \bullet \vec{c} & = & 12-12 & = & 0 & \Rightarrow \vec{a}, \vec{c} \text{ sind orthogonal,} \\
\vec{b} \bullet \vec{c} & = & 8-18 & \neq & 0 & \Rightarrow \vec{b}, \vec{c} \text{ sind nicht orthogonal.}
\end{array}$$

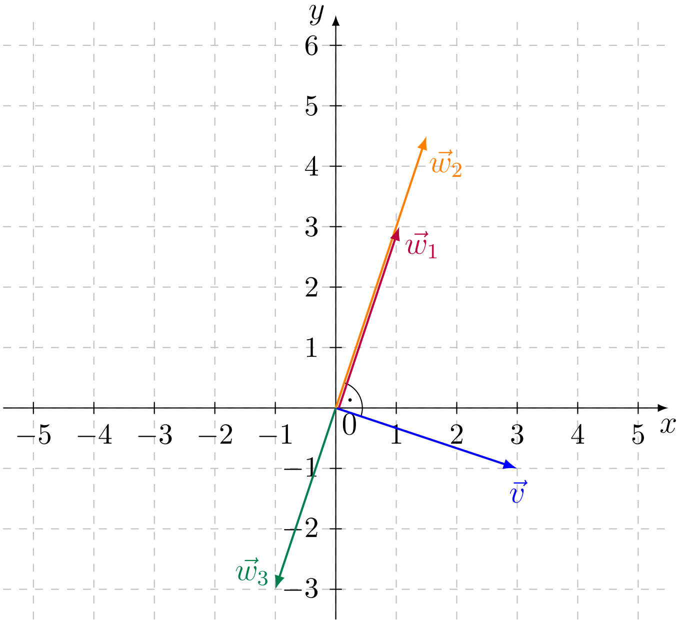
c)

$$\begin{array}{lcl}
\vec{v} \bullet \vec{w} = 0 & \Leftrightarrow & 3w_x - w_y = 0 \\
& \Leftrightarrow & w_y = 3w_x \\
& \Leftrightarrow & w = \begin{pmatrix} w_x \\ 3w_x \end{pmatrix} = w_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Alle Vektoren $\vec{w}$, die orthogonal zu $\vec{v}$ sind, sind gegeben durch

$$\vec{w} \;=\; \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}.$$

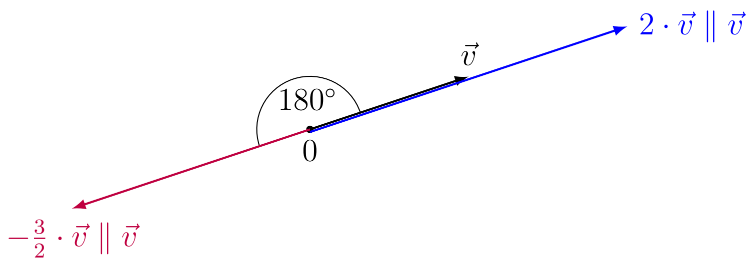
d)



Tafelanschrieb

Definition: Zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ heißen parallel, falls $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 0°$ oder $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 180°$ gilt. Schreibe $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

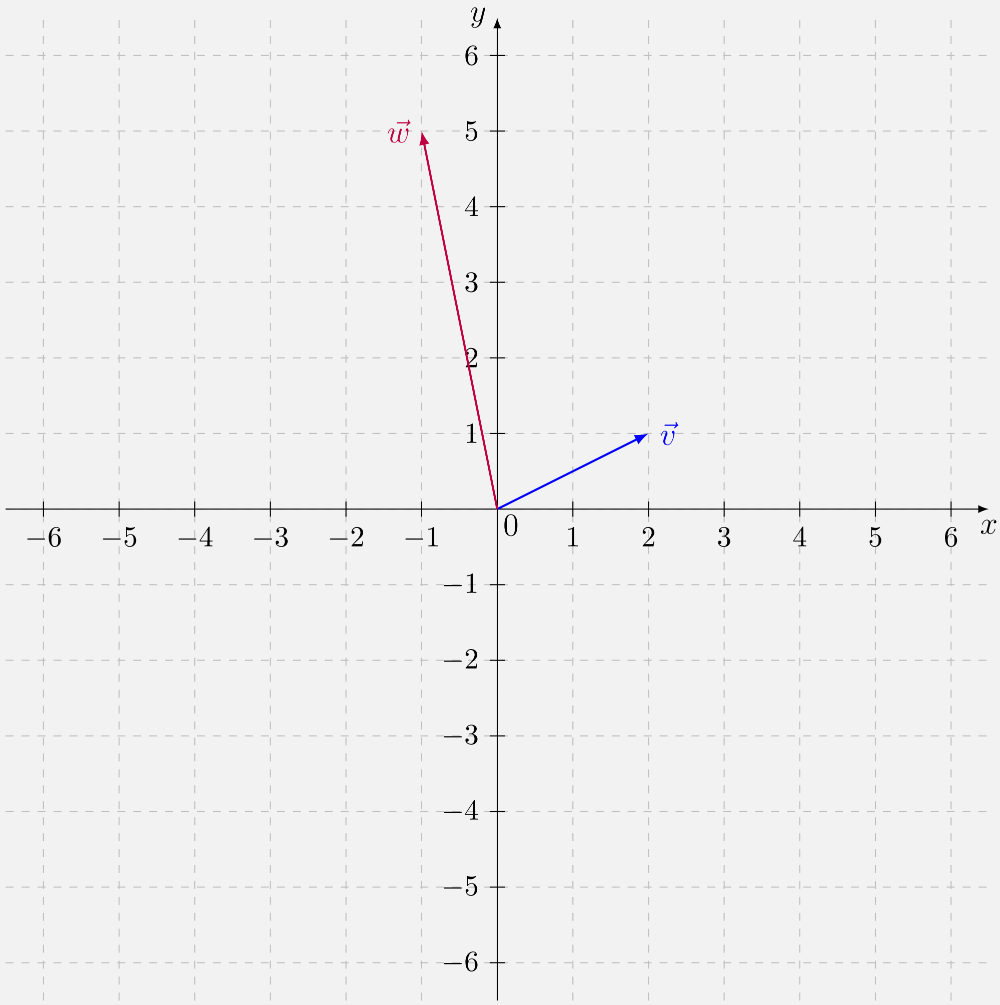
Bemerkung: $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt.



1.3 Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1.6 (*Arbeitsblatt 1.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 6*)

In der unten stehenden Graphik sind die Standard-Pfeile von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingezeichnet. Konstruiere $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{v}-\vec{w}$, $3\cdot\vec{v}$.



Weiter auf der nächsten Seite.

Aufgabe 1.7 (*Arbeitsblatt 1.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 7*)

Berechne:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{}$,

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{}$,

c) $\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right\| = \boxed{}$,

d) $\left\| \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \boxed{}$,

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{}$,

f) $\angle\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}\right) \approx \boxed{}$.

(Taschenrechner, zwei Nachkommastellen)

Aufgabe 1.8 (*Arbeitsblatt 1.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 8*)

Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Gib einen Vektor $\vec{a}$ an, der orthogonal zu $\vec{v}$ ist.

$\vec{a} = \boxed{}$,

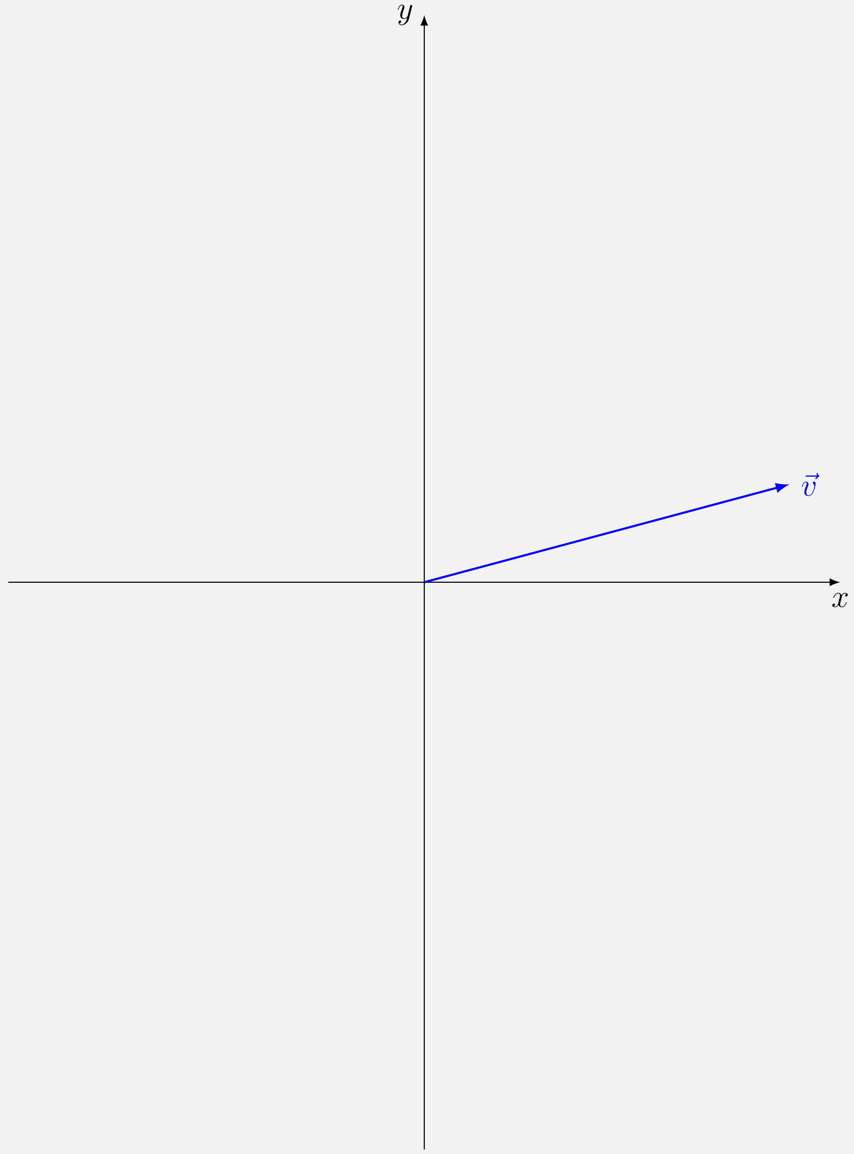
b) Gib einen Vektor $\vec{b} \neq \vec{v}$ an, so dass $\angle(\vec{v}, \vec{b}) = 0^\circ$ gilt.

$\vec{b} = \boxed{}$,

c) Gib einen Vektor $\vec{c}$ an, so dass $\angle(\vec{v}, \vec{c}) = 180^\circ$ gilt.

$\vec{c} = \boxed{}$.

Aufgabe 1.9 (*Arbeitsblatt 1.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9*)



In der Graphik ist der Standard-Pfeil des Vektors $\vec{v}$ eingezeichnet.

a) Zeichne den Standard-Pfeil eines Vektor $\vec{w}$ ein, für den $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 35°$ gilt (Geodreieck erforderlich).

b) Zeichne den Standard-Pfeil des Vektors $-\vec{w}$ ein, wobei $\vec{w}$ den Vektor bezeichnet, dessen Standard-Pfeil du im Teil a) gezeichnet hast.

c) Bestimme $\angle(\vec{v}, -\vec{w}) = \boxed{}$.

1.4 Zusatzmaterial

Aufgabe 1.10 (*Arbeitsblatt 1.7 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 1*)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Skalarprodukte $\vec{v} \bullet \vec{w}$, $\vec{v} \bullet \vec{u}$ und $\vec{w} \bullet \vec{u}$. Welche der Vektoren sind orthogonal?

Lösung: $\vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} = 10 - 10 = 0 \Rightarrow \vec{v}, \vec{w}$ sind orthogonal,

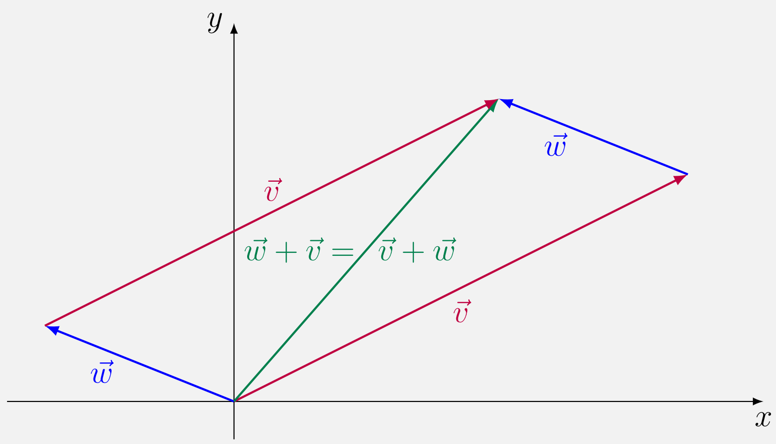
$\vec{v} \bullet \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = -5 - 5 = -10 \neq 0 \Rightarrow \vec{v}, \vec{u}$ sind nicht orthogonal,

$\vec{w} \bullet \vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = -50 + 2 = -48 \neq 0 \Rightarrow \vec{w}, \vec{u}$ sind nicht orthogonal.

Aufgabe 1.11 (*Arbeitsblatt 1.7 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 2*)

a) Beweise rechnerisch, dass $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt (Kommutativität der Vektoraddition).

b) Visualisiere das Kommutativgesetz aus Teil a) durch geeignete Vervollständigung der folgenden Skizze.



Lösung: **a)** $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x + v_x \\ w_y + v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{w} + \vec{v}$

b) Siehe Graphik.

Aufgabe 1.12 (*Arbeitsblatt 1.7 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 3*)

Beweise rechnerisch die angegeben Distributivgesetze.

a) Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ und alle reellen Zahlen λ gilt

$$\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}.$$

b) Für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ und alle reellen Zahlen λ, μ gilt

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}.$$

c) Für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}.$$

Lösung: **a)**

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(v_x + w_x) \\ \lambda(v_y + w_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x + \lambda w_x \\ \lambda v_y + \lambda w_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda w_x \\ \lambda w_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} &= (\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) v_x \\ (\lambda + \mu) v_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda v_x + \mu v_x \\ \lambda v_y + \mu v_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu v_x \\ \mu v_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix} \\
&= u_x(v_x + w_x) + u_y(v_y + w_y) = u_x v_x + u_x w_x + u_y v_y + u_y w_y \\
&= \underbrace{u_x v_x + u_y v_y} + \underbrace{u_x w_x + u_y w_y} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} \\
&= \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}.
\end{aligned}$$

2 Unterrichtseinheit 2 - Gerade, Drehung

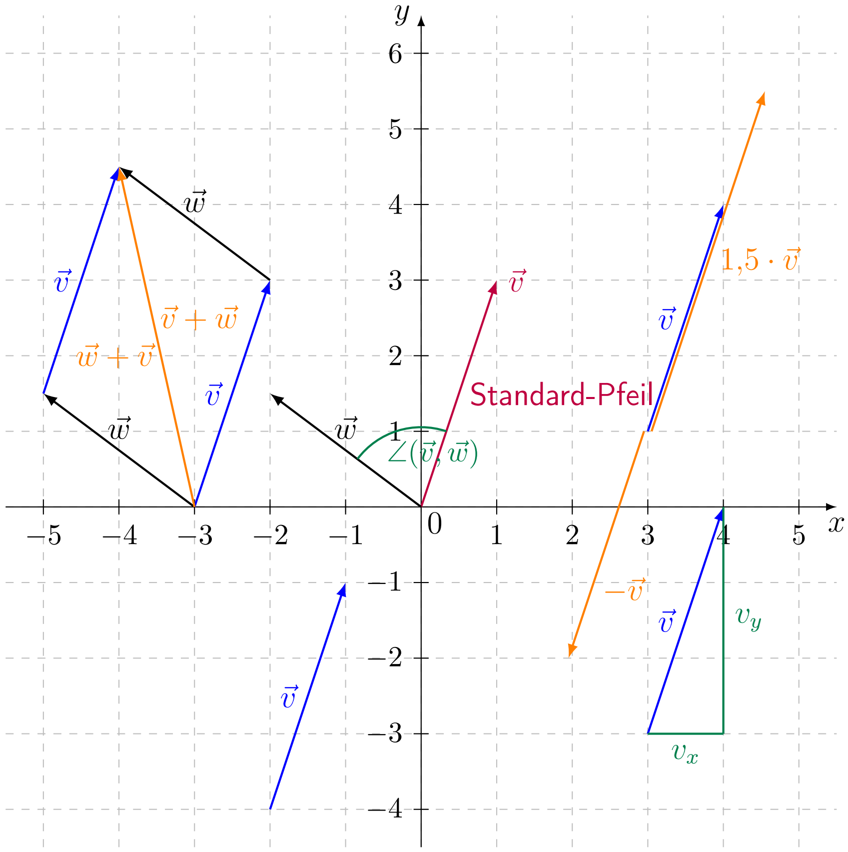
2.1 Wiederholung

Mündlich: Wir haben in der ersten Einheit über Vektoren gesprochen.
Ein Vektor $\vec{v}$ ist eine Verschiebungsvorschrift in der Ebene.
Vektoren kann man durch ihre Pfeile darstellen.

Vorgehen: Schüler:innen schreiben die Wiederholung nicht mit. Die blauen Vektor-Pfeile werden bereits vor dem Unterricht auf der Tafel eingezeichnet. Der Standard-Pfeil und die Veranschaulichung der Rechenoperationen werden erst nachträglich eingezeichnet.

Tafelanschrieb

Wiederholung



$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Addition: $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix}.$

Multiplikation mit Zahl: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix}$

Norm: $\left\| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Winkel: $\angle(\vec{v},\vec{w}) =$ Minimum der eingeschlossenen Winkel der Standard-Pfeile.

Skalarprodukt: $\vec{v} \bullet \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\big(\angle(\vec{v},\vec{w})\big).$

Mündlich: Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

2.2 Geraden

Vorgehen: Das erste Arbeitsblatt wird gemeinsam bearbeitet, das zweite in Einzelarbeit.

Aufgabe 2.1 (*Arbeitsblatt 2.1 (Darstellung von Geraden), Aufgabe 1*)

Erinnerung aus der Schule: Eine Gerade kann durch eine Gleichung der Form

$$y = mx + c$$

angegeben werden. Diese Form heißt auch Steigungsform.

Hierbei nennt man m die Steigung und c den y-Achsenabschnitt.

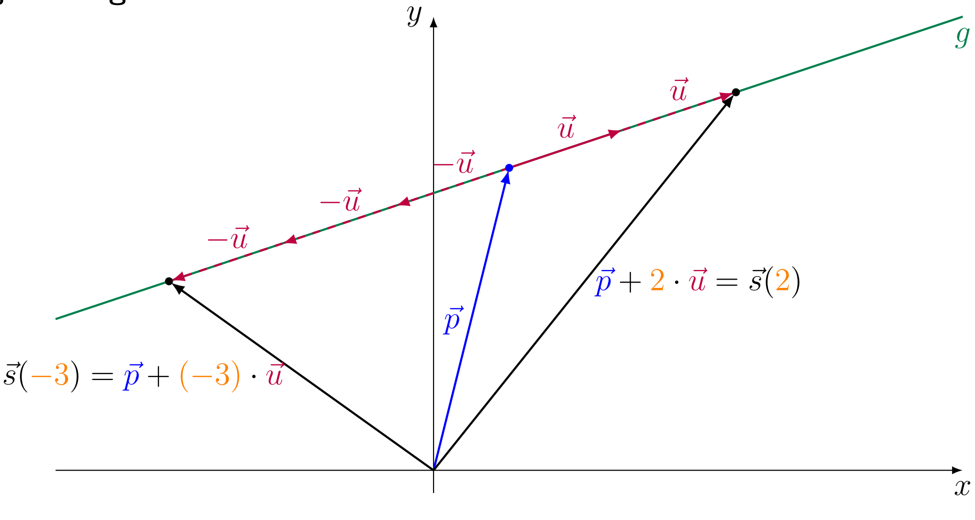
Die Gerade besteht aus allen Punkten $(x \mid y)$, die diese Gleichung erfüllen.
Beispiel: Gerade g mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{3}x + 4.$$

Punkte auf g: $(0 \mid 4)$, $(6 \mid 6)$, $(9 \mid 7)$,
Alternativ kann man auch alle zugehörigen Vektoren angeben, um g zu beschreiben.
In unserem Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Deren Standard-Pfeile zeigen dann auf Punkte von g.

Geradengleichung in Vektorform:



Alle zu der Geraden g gehörenden Vektoren werden angegeben durch

$$\vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Man nennt $\vec{p}$ einen Stützvektor und $\vec{u}$ einen Richtungsvektor.

Vorgehen: Die Beschreibungen „$\vec{s}(-3) =$“ und „$= \vec{s}(2)$“ werden erst eingetragen, wenn die darunter stehende Geradengleichung vorgelesen wurde.

Tafelanschrieb

5. Geraden

Definition: Eine Gerade g ist festgelegt durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{u} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Man schreibt

$$g: \quad \vec{s}(t) \;=\; \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Durch $\vec{s}(t)$ sind alle zu Geradenpunkten gehörenden Vektoren gegeben.

Aufgabe 2.2 (*Arbeitsblatt 2.2 (Geraden), Aufgabe 2*)

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 2x - 1$.

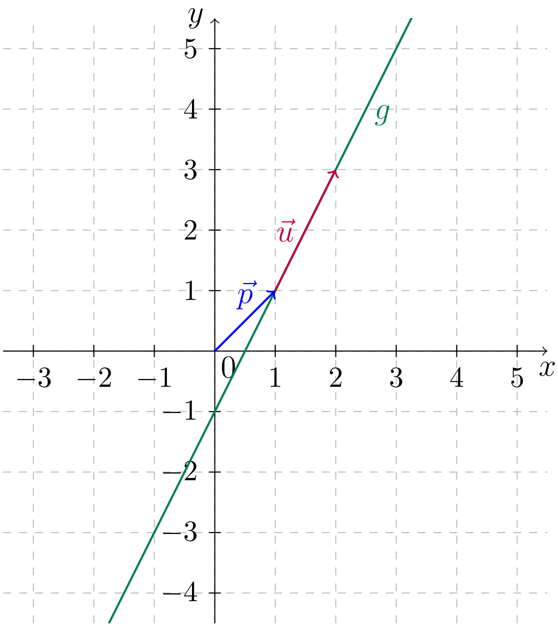
a) Zeichne die Gerade in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne einen möglichen Stützvektor $\vec{p}$ und einen möglichen Richtungsvektor $\vec{u}$ ein und gib sie dann an.

c) Gib mit b) die Geradengleichung in Vektorform an.

d) An der Steigungsform sieht man: Für $x = 3$ ist $y = 5$, also liegt der Punkt $P(3 \mid 5)$ auf g. Bestimme rechnerisch den Wert von t_0, für den der Standard-Pfeil von $\vec{s}(t_0)$ auf P zeigt.

Lösung:



a) Siehe links.

b) Z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

c) $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

d) $\vec{s}(t_0) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t_0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+t_0\\1+2t_0\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t_0 \stackrel{!}{=} 3 \\ 1 + 2t_0 \stackrel{!}{=} 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t_0 = 2$$

Vorgehen: Bei Teil c) kann darauf hingewiesen werden, wie mit verschiedenen t-Werten verschiedene Punkte der Geraden erreicht werden.
Bei Teil d) kann t_0 zunächst zeichnerisch erraten werden. Aber man ist ja nicht sicher, ob wirklich $t_0 = 2$ gilt, also muss noch gerechnet werden.

Anmerkung

Hier tritt zum ersten Mal ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen auf. Für Schüler:innen aus Klassenstufe 8/9 ist das neu. Die Schüler:innen sollten darauf hingewiesen werden, dass beide Gleichungen für denselben Wert von t_0 erfüllt sein müssen.

2.3 Lineare Abbildungen

Vorgehen: Schüler:innen sollen ab jetzt mitschreiben

Tafelanschrieb

II. Drehungen

1. Lineare Abbildungen und Matrizen

Wir betrachten Abbildungen (Funktionen) von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Eine solche Abbildung A ordnet also jedem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ wieder einen Vektor $A(\vec{v}) \in \mathbb{R}^2$ zu, den Abbildungswert.

Mündlich: Bisher bilden Funktionen f Zahlen auf Zahlen ab, jetzt werden Vektoren auf Vektoren abgebildet.

Tafelanschrieb

Beispiel: $A(\vec{v}) = A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x + 6v_y \\ 3v_x \end{pmatrix}$.

Z.B. $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \end{pmatrix}$

Mündlich: Nochmal betonen, dass A Vektoren auf Vektoren abbildet.

Tafelanschrieb

Definition: Ist eine Abbildung A von der Form

$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{a} + v_y \cdot \vec{b}$$

mit festen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, dann nennt man A linear.

Mündlich: Jetzt überlegen wir, ob die Abbildung A aus dem Beispiel linear ist. Tatsächlich ist sie es. Dazu schieben wir alle Terme mit v_x in einen Vektor und alle mit v_y in einen zweiten Vektor.

Tafelanschrieb

Beispiel: Die Abbildung A des letzten Beispiels ist linear:

$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x + 6v_y \\ 3v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x \\ 3v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6v_y \\ 0 \end{pmatrix} = v_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + v_y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

Definition: Eine lineare Abbildung ist durch die beiden Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt. Man schreibt die Vektoren in ein Schema, um A anzugeben:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a} \; \vec{b} \end{bmatrix}.$$

Dieses Schema heißt Matrix.

Im obigen Beispiel $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Mündlich: Man lässt die Vektorklammern aus Gründen der Übersichtlichkeit weg. Mit den Informationen, die in der Matrix stehen, können nun alle Abbildungswerte berechnet werden.

Tafelanschrieb

Z.B. $A\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 6\\3 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}44\\-3\end{pmatrix}$

Mündlich: Achtung, die Reihenfolge dreht sich um: $\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ steht rechts von der Matrix, aber die Koordinaten -1 und 7 stehen links der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$.

Aufgabe 2.3 (*Arbeitsblatt 2.3 (Lineare Abbildungen und Matrizen), Aufgabe 3*)

a) Sei B die lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $\begin{bmatrix}3 & 5\\9 & 7\end{bmatrix}$. Berechne folgende Abbildungswerte.

$$B\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \boxed{-3\cdot\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-13\end{pmatrix}}, \quad B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \boxed{0\cdot\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}}.$$

b) Sei C die Abbildung mit $C(\vec{v}) = \begin{pmatrix}4v_x + v_y\\5v_x - 6v_y\end{pmatrix}$ für alle $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}$.

b₁) Begründe, dass C linear ist.

$$\begin{aligned} C(\vec{v}) &= \begin{pmatrix}4v_x\\5v_x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}v_y\\-6v_y\end{pmatrix} = v_x\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + v_y\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \\ &= v_x\cdot\vec{a} + v_y\cdot\vec{b} \end{aligned}$$

Also ist die Definition einer linearen Abbildung erfüllt.

b₂) Gib zu der linearen Abbildung C das Matrix-Schema an.

$$C = \boxed{\begin{bmatrix}4 & 1\\5 & -6\end{bmatrix}}.$$

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

Aufgabe 2.4 (*Arbeitsblatt 2.3 (Lineare Abbildungen und Matrizen), Zusatzaufgabe 1*)

Sei A eine beliebige lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{bmatrix}$. Zeige eine (oder beide) der folgenden Aussagen.

(L1) Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt $A(\vec{v}+\vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$.

(L2) Für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A(\lambda\cdot\vec{v}) = \lambda\cdot A(\vec{v})$.

Lösung: (L1)
$$\begin{aligned} A(\vec{v}+\vec{w}) &= A\left(\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix} \\ &= (v_x+w_x)\cdot\vec{a} + (v_y+w_y)\cdot\vec{b} \\ &= v_x\cdot\vec{a} + w_x\cdot\vec{a} + v_y\cdot\vec{b} + w_y\cdot\vec{b} \\ &= v_x\cdot\vec{a} + v_y\cdot\vec{b} + w_x\cdot\vec{a} + w_y\cdot\vec{b} \\ &= A(\vec{v}) + A(\vec{w}) \end{aligned}$$

(L2)
$$\begin{aligned} A(\lambda\cdot\vec{v}) &= A\begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix} = (\lambda v_x)\cdot\vec{a} + (\lambda v_y)\cdot\vec{b} \\ &= \lambda\cdot\left(v_x\cdot\vec{a}\right) + \lambda\cdot\left(v_y\cdot\vec{b}\right) = \lambda\cdot\left(v_x\cdot\vec{a} + v_y\cdot\vec{b}\right) \\ &= \lambda\cdot A(\vec{v}) \end{aligned}$$

Vorgehen: Bei der Besprechung der letzten Aufgabe werden beide Teile besprochen, damit der folgende Satz bewiesen ist.

Tafelanschrieb

Satz: Ist $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, so gelten

(L1) $A(\vec{v}+\vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$
(L2) $A(\lambda\cdot\vec{v}) = \lambda\cdot A(\vec{v})$

für beliebige $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Beweis: Letzte Aufgabe.

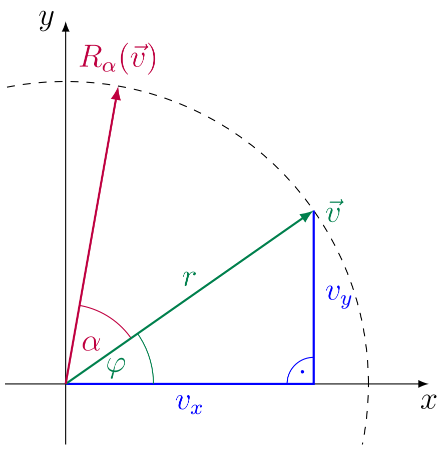
2.4 Drehungen

Mündlich: Jeder von euch weiß, was eine Drehung ist. Aber wie stellt man Drehungen mit Formeln dar? Wir legen zunächst fest, was wir unter einer Drehung verstehen.

Tafelanschrieb

2. Drehungen

Sei α ein beliebiger Winkel und R_α die Abbildung, die jeden Vektor $\vec{v}$ um α dreht.
Damit meinen wir im Folgenden immer, dass der zugehörige Standard-Pfeil von $\vec{v}$ um α im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung gegedreht wird.



$$\cos(\varphi) = \frac{v_x}{r} \Rightarrow v_x = r\cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{v_y}{r} \Rightarrow v_y = r\sin(\varphi)$$

Mündlich: R steht für Rotation.
Gibt es eine Formel, mit der man den gedrehten Vektor $R_\alpha(\vec{v})$ berechnen kann? Ist R_α eine lineare Abbildung?
Wir verwenden eine Technik wie bei den komplexen Zahlen (Polardarstellung). Wir geben den Vektor $\vec{v}$ durch seine Norm und den Winkel φ an, den der Standard-Pfeil von $\vec{v}$ mit der positiven x-Achse einschließt.

Tafelanschrieb

Also $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ $(*)$

Analog
$$
\begin{aligned}
R_\alpha(\vec{v}) &= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\alpha) \\ r\sin(\varphi+\alpha) \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Additionstheoreme}}{=} \begin{pmatrix} r\big(\cos(\varphi)\cos(\alpha) - \sin(\varphi)\sin(\alpha)\big) \\ r\big(\cos(\varphi)\sin(\alpha) + \sin(\varphi)\cos(\alpha)\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\alpha) - r\sin(\varphi)\sin(\alpha) \\ r\cos(\varphi)\sin(\alpha) + r\sin(\varphi)\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} v_x\cos(\alpha) - v_y\sin(\alpha) \\ v_x\sin(\alpha) + v_y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_x\cos(\alpha) \\ v_x\sin(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_y\sin(\alpha) \\ v_y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= v_x \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Mündlich: Damit haben wir nachgewiesen, dass R_α eine lineare Abbildung ist.
Lasst euch nicht verwirren, dass α in den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vorkommt. Der Winkel α ist gegeben, also sind $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ einfach gegebene Zahlen.

Tafelanschrieb

Satz: R_α ist eine lineare Abbildung und es gilt

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Anmerkung
Auf dem nächsten Arbeitsblatt steht folgender Hinweis:
Hinweis: Du kannst dir am Einheitskreis überlegen, welche Werte der Sinus und der Cosinus für die Winkel $180°$ bzw. $90°$ hat (vgl. Arbeitsblatt 1.1 der ersten Einheit).

Aufgabe 2.5 (*Arbeitsblatt 2.4 (Drehungen), Aufgabe 4*)

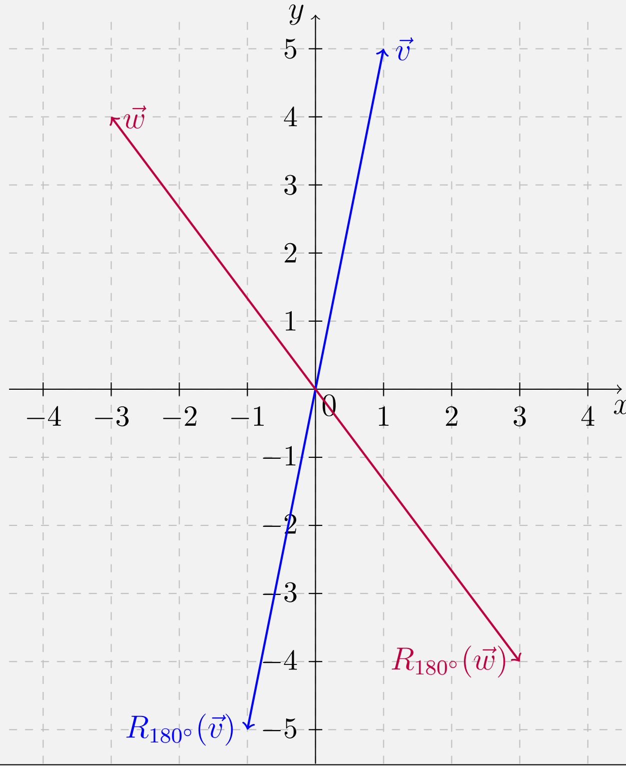
a) Gib das Matrix-Schema für R_{180° an.

b) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechne $R_{180^\circ}(\vec{v})$ und $R_{180^\circ}(\vec{w})$.

c) Zeichne $\vec{v}$, $R_{180^\circ}(\vec{v})$, $\vec{w}$ und $R_{180^\circ}(\vec{w})$ in das Koordinatensystem ein.



Lösung: **a)** $R_{180^\circ} = \begin{bmatrix} \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) \\ \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $R_{180^\circ}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $R_{180^\circ}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) Siehe oben stehende Graphik.

Aufgabe 2.6 (*Arbeitsblatt 2.4 (Drehungen), Aufgabe 5*)

a) Gib das Matrix-Schema für R_{90° an.

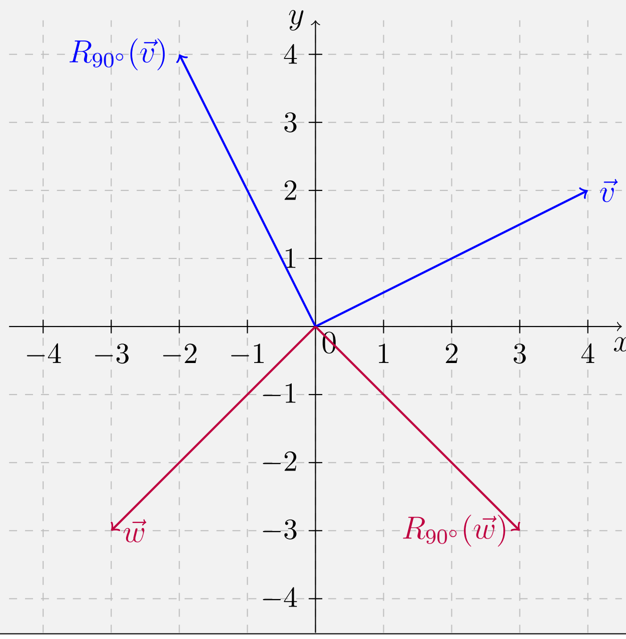
b) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Berechne $R_{90^\circ}(\vec{v})$ und $R_{90^\circ}(\vec{w})$.

c) Zeichne $\vec{v}$, $R_{90^\circ}(\vec{v})$, $\vec{w}$ und $R_{90^\circ}(\vec{w})$ in das Koordinatensystem ein.

d) Überprüfe mit Hilfe des Skalarprodukts, dass $\vec{v}$ und $R_{90^\circ}(\vec{v})$ orthogonal sind und dass $\vec{w}$ und $R_{90^\circ}(\vec{w})$ orthogonal sind.



Lösung: **a)** $R_{90^\circ} = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $R_{90^\circ}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $R_{90^\circ}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) Siehe oben stehende Graphik.

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet R_{90^\circ}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ die Vektoren sind orthogonal.
$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet R_{90^\circ}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = (-3) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) = 0 \Rightarrow$ die Vektoren sind orthogonal.

2.5 Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 2.7 (*Arbeitsblatt 2.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 6*)

a) Sei A die lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$. Berechne folgende Abbildungswerte.

$A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{}$.

b) Sei B die Abbildung mit $B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -3v_y \\ 2v_x + v_y \end{pmatrix}$ für alle $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

b₁) Begründe, dass B linear ist.

$\boxed{}$.

b₂) Gib zu der linearen Abbildung B das Matrix-Schema an.

$B = \boxed{}$.

Aufgabe 2.8 (*Arbeitsblatt 2.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 7*)

a) Gib jeweils das Matrix-Schema der angegebenen Drehung R_α um den Winkel α an (exakte Werte eintragen, benütze die Tabelle von Arbeitsblatt 1.1).

$R_{45^\circ} = \boxed{}$ $\quad R_{135^\circ} = \boxed{}$

b) Die lineare Abbildung $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ stellt eine Drehung dar. Gib den Drehwinkel α an.

$\alpha = \boxed{}$

Aufgabe 2.9 (*Arbeitsblatt 2.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 8*)

Kreuze jeweils an, ob die gegebene Abbildung B linear ist oder nicht.

Abbildung	linear	nicht linear
$B\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_y^2 \\ 7v_y \end{pmatrix}$		
$B\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y - 10v_x \\ v_x - 3v_y \end{pmatrix}$		
$B\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix}$		
$B\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_y \\ 4 \end{pmatrix}$		

Weiter auf der nächsten Seite.

Aufgabe 2.10 (*Arbeitsblatt 2.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9*)

a) Gib die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus an.

$$\sin(\alpha+\beta) \quad = \quad \boxed{}$$

$$\cos(\alpha+\beta) \quad = \quad \boxed{}$$

b) Bestimme mit Hilfe der Additionstheoreme exakte Werte für Sinus und Cosinus. Verwende dazu die exakten Werte aus der Tabelle von Arbeitsblatt 1.1.

$$\sin(75°) = \sin(30° + 45°) \quad = \quad \boxed{}$$

$$\cos(75°) = \cos(30° + 45°) \quad = \quad \boxed{}$$

2.6 Zusatzmaterial

Aufgabe 2.11 (*Arbeitsblatt 2.6 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 2*)

Die Abbildung A ist durch die Abbildungsvorschrift $A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x^2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Bestimme für die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Abbildungswerte $A(\vec{v})$ und $A(\vec{w})$.

b) Zeige mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil a), dass A nicht die Eigenschaft (L2) besitzt und daher nicht linear ist.

Lösung: **a)** $A(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -20 \\ 25 \end{pmatrix}$, $A(\vec{w}) = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Es gilt $\vec{v} = 5 \cdot \vec{w}$. Nach (L2) müsste dann $A(\vec{v}) = 5 \cdot A(\vec{w}) = \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \end{pmatrix}$ gelten. Dies stimmt jedoch nicht. Also ist (L2) nicht für beliebige $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt.

3 Unterrichtseinheit 3 - Spiegelungen

3.1 Wiederholung

Aufgabe 3.1 (*Arbeitsblatt 3.1 (Winkel, Geraden, lineare Abbildungen), Aufgabe 1*)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechne das Skalarprodukt $\vec{v} \bullet \vec{w}$, die Normen $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ und den Winkel zwischen den Vektoren.
Hinweise: Skalarprodukt-Winkel-Formel, Taschenrechner erforderlich.

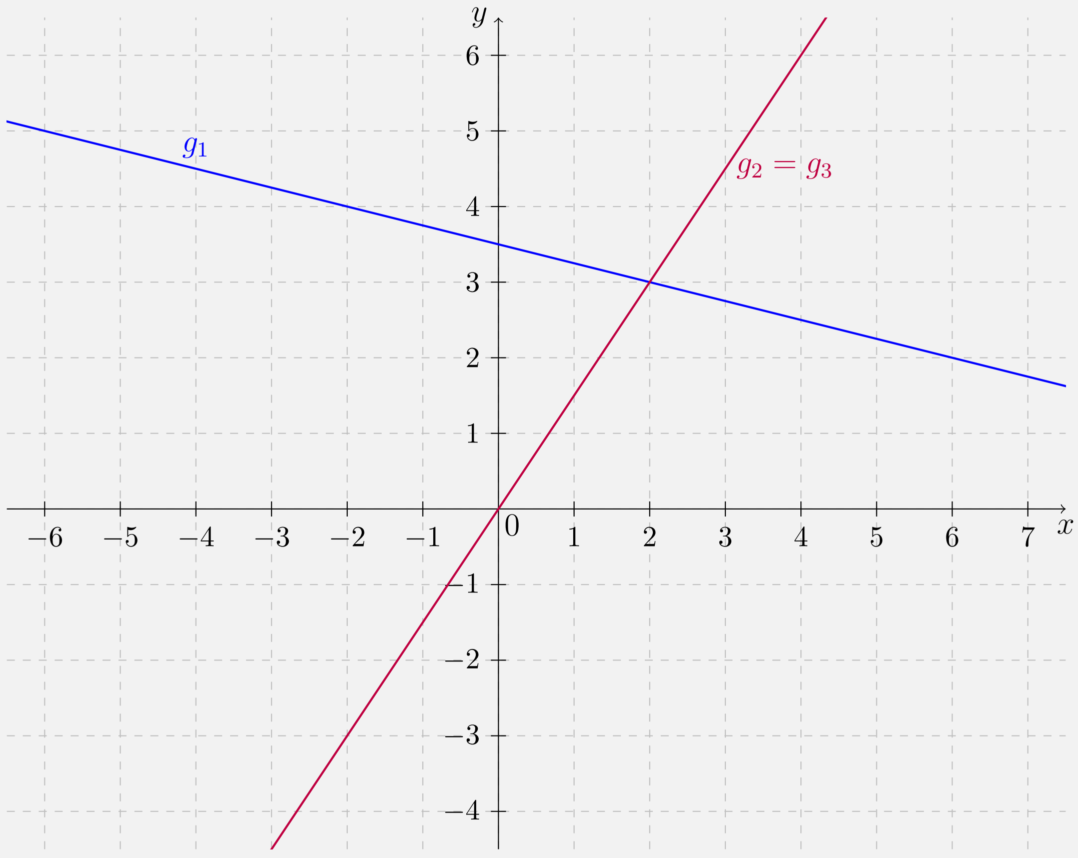
Lösung: $\vec{v} \bullet \vec{w} = -2 + 4 = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{20}$, $\cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \angle(\vec{v}, \vec{w}) \approx 71{,}57°$.

Aufgabe 3.2 (*Arbeitsblatt 3.1 (Winkel, Geraden, lineare Abbildungen), Aufgabe 2*)

Gegeben sind die drei Geraden

$$\begin{aligned}
g_1: \quad \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\
g_2: \quad \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\
g_3: \quad \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Zeichne die drei Geraden in das Koordinatensystem ein.



Lösung: Siehe Graphik im Aufgabentext.

Aufgabe 3.3 (*Arbeitsblatt 3.1 (Winkel, Geraden, lineare Abbildungen), Aufgabe 3*)

Gegeben ist die lineare Abbildung

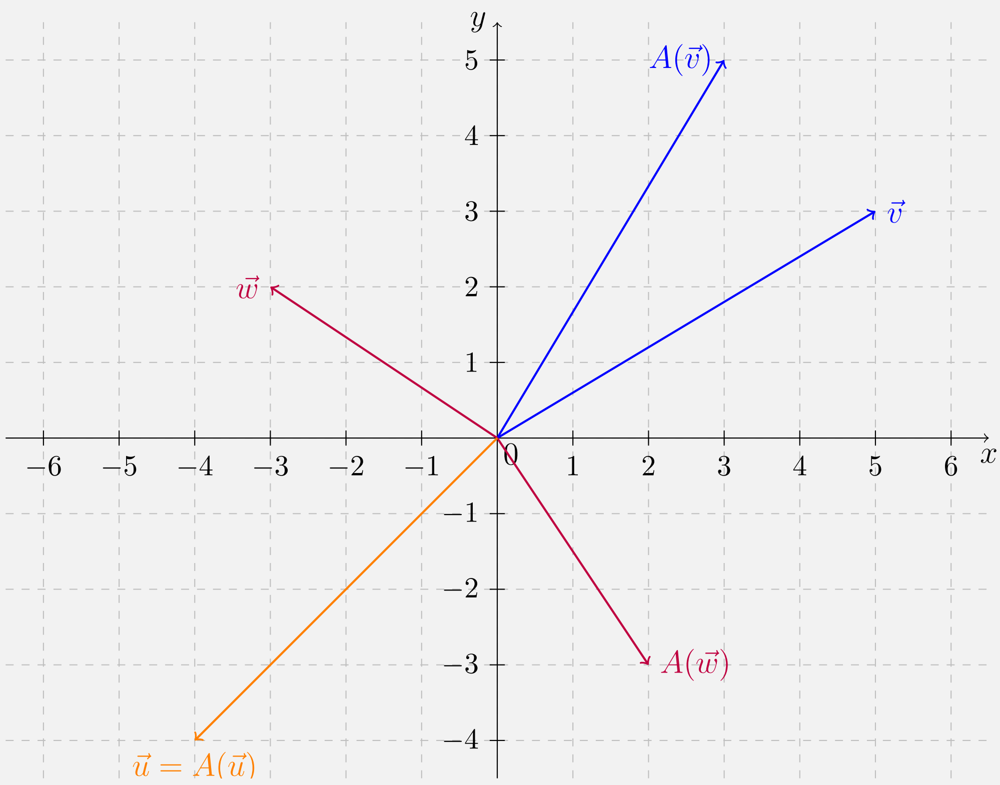
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne $A\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $A(\vec{v})$, $A(\vec{w})$ und $A(\vec{u})$ in das Koordinatensystem ein.

c) Berechne $A(\vec{v})$ für einen allgemeinen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

d) Kannst Du die Abbildung A geometrisch beschreiben?



Lösung: **a)** $A\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) Siehe Graphik.

c) $A(\vec{v}) = A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ v_x \end{pmatrix}$.

d) A ist die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

3.2 Spiegelungen

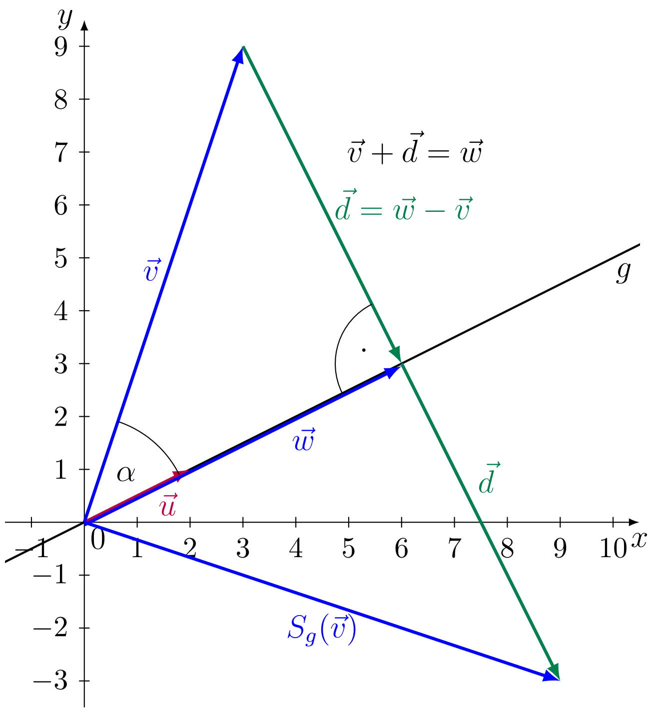
Vorgehen: Das Arbeitsblatt 3.2 wird gemeinsam bearbeitet. Zunächst wird $S_g(\vec{v})$ mit dem Geodreieck konstruiert. Dann wird $\vec{w}$ eingezeichnet. Erst bei der Berechnung der Länge von $\vec{w}$ werden der rechte Winkel und α eingezeichnet.
Dann wird die allgemeine Formel für $\vec{w}$ an der Tafel hergeleitet. Die Berechnungen auf dem Arbeitsblatt bleiben zunächst frei.

Aufgabe 3.4 (*Arbeitsblatt 3.2 (Geradenspiegelung), Aufgabe 4*)

Gegeben sind die Gerade g durch

$$\vec{s}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{=\vec{p}\text{ (Stützvektor)}} + t\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{=\vec{u}\text{ (Richtungsvektor)}} \quad \text{für } t\in\mathbb{R}$$

und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$. Der Standard-Pfeil von $\vec{v}$ soll an g gespiegelt werden.



$$\vec{v}\bullet\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 6+9 = 15 \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{w} = \frac{15}{5}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$$

$$S_g(\vec{v}) = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2\cdot 3\\9+2\cdot(-6)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$$

Anmerkung

Hier wird vorausgesetzt, dass eine Geradenspiegelung Vektoren auf Vektoren abbildet. Dies wird nicht thematisiert. Hintergrund: Es dreht sich hier nicht um Hintereinanderausführung von Abbildungen. Sondern die Vorstellung ist, dass die komplette Ebene gespiegelt wird. Eine Verschiebung des Punktes P um $\vec{v}$ wird dann zu einer Verschiebung des gespiegelten Punktes um $S_g(\vec{v})$. Im Prinzip stecken die Geraden- und Längentreue der Spiegelung dahinter.

Tafelanschrieb

III. Geradenspiegelung

1. Berechnung von $\vec{w}$:

Mündlich: Ein Vektor ist durch zwei Angaben bestimmt: Entweder durch seine zwei Koordinaten, oder durch seine Länge und Richtung. Wir bestimmen zuerst die Länge $\|\vec{w}\|$.

Tafelanschrieb

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|} \;\Leftrightarrow\; \|\vec{w}\| = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{v}\|$$

Skalarprodukt-Winkel-Formel:

$$\vec{v}\bullet\vec{u} = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\vec{v}\bullet\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$$

Mündlich: Wir benützen nun, dass $\vec{w}$ parallel zu $\vec{u}$ ist.

Tafelanschrieb

$$\Rightarrow\; \vec{w} = \|\vec{w}\|\cdot\underbrace{\frac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\vec{u}}_{\text{Vektor der Länge } 1} = \frac{\vec{v}\bullet\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u}$$

Definition: $\vec{w}$ heißt Projektion des Vektors $\vec{v}$ auf g.

Mündlich: Es kann sein, dass das Skalarprodukt $\vec{v}\bullet\vec{u}$ negativ ist. Dann stimmt die Formel trotzdem. $\vec{w}$ zeigt dann in die entgegen gesetzte Richtung von $\vec{u}$. (Obwohl bei der Herleitung der Formel in der Gleichung $\|\vec{w}\| = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{v}\|$ die Positivität des Skalarproduktes benötigt wurde.)

Vorgehen: Nun werden die Berechnungen von $\vec{w}$, $\vec{d}$ und $S_g(\vec{v})$ auf dem Arbeitsblatt durchgeführt. Erst nach der Berechnung von $\vec{w}$ wird $\vec{d}$ eingezeichnet, um $S_g(\vec{v})$ berechnen zu können.

Mündlich: Nun können wir die allgemeine Formel für $S_g(\vec{v})$ herleiten. Dies ist eine lange Rechnung. Die Formel, die am Schluss rauskommt, ist das Wichtige.

Tafelanschrieb

2. Berechnung von $S_g(\vec{v})$:

$$\begin{aligned} S_g(\vec{v}) &= \vec{v} + 2\cdot\vec{d} = \vec{v} + 2\cdot(\vec{w}-\vec{v}) \\ &= 2\cdot\vec{w} - \vec{v} = 2\cdot\frac{\vec{v}\bullet\vec{u}}{\|u\|^2}\cdot\vec{u} - \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{v} \\ &= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\left(2\cdot\vec{v}\bullet\vec{u}\cdot\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix} - \|\vec{u}\|^2\cdot\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

> **Anmerkung**
> Zur Verdeutlichung, dass es sich um eine Multiplikation handelt, wurde zwei Mal ein Malpunkt für die Multiplikation reeller Zahlen eingefügt. Meistens steht der Malpunkt im Skript für die Multiplikation „Zahl Mal Vektor“.

Mündlich: Nun setzen wir die Definition des Skalarprodukts und der Norm ein, um die Koordinaten des Abbildungswertes zu berechnen.

Tafelanschrieb

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 2(v_x u_x + v_y u_y) u_x - (u_x^2 + u_y^2) v_x \\ 2(v_x u_x + v_y u_y) u_y - (u_x^2 + u_y^2) v_y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{2}v_x u_x^2 + 2 v_y u_y u_x - \cancel{u_x^2 v_x} - u_y^2 v_x \\ 2 v_x u_x u_y + \cancel{2} v_y u_y^2 - u_x^2 v_y - \cancel{u_y^2 v_y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \cdot \begin{pmatrix} (u_x^2 - u_y^2) v_x + 2 v_y u_y u_x \\ 2 v_x u_x u_y + (u_y^2 - u_x^2) v_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} v_x + \dfrac{2 u_y u_x}{u_x^2 + u_y^2} v_y \\ \dfrac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} v_x + \dfrac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} v_y \end{pmatrix} \\
&= v_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} \\ \dfrac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + v_y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ \dfrac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}
\end{aligned}
$$

Mündlich: Damit ist die Definition einer linearen Abbildung erfüllt, und wir können die Matrix zur Abbildung S_g angeben.

Tafelanschrieb

$$
\Rightarrow \quad S_g \text{ ist linear, } S_g = \begin{bmatrix} \dfrac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} & \dfrac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ \dfrac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} & \dfrac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{bmatrix}
$$

Mündlich: Für die Berechnung der Spiegelmatrix aus den Koordinaten des Richtungsvektors genügt es, die Einträge in der ersten Zeile der Matrix zu berechnen. Die zweite Zeile erhält man aus der ersten durch Vertauschen der Reihenfolge und Multiplikation des zweiten Eintrags mit -1.

Tafelanschrieb

Beispiel: Für die Gerade g mit $\vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$
S_g = \begin{bmatrix} \dfrac{4-1}{4+1} & \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 1}{4+1} \\ \dots & -\dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{4}{5} & -\dfrac{3}{5} \end{bmatrix}
$$

$$
S_g \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} + \frac{36}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{27}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{5} \\ \frac{-15}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}
$$

Mündlich: In der folgenden Aufgabe sehen wir, wie einfach wir nun Spiegelungen von Vektoren ausrechnen können.

Aufgabe 3.5 (*Arbeitsblatt 3.3 (Spiegelung geometrisch und analytisch), Aufgabe 5*)

Gegeben sind

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix},\ g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Zeichne die Gerade g und die Standard-Pfeile von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in das Koordinatensystem ein.

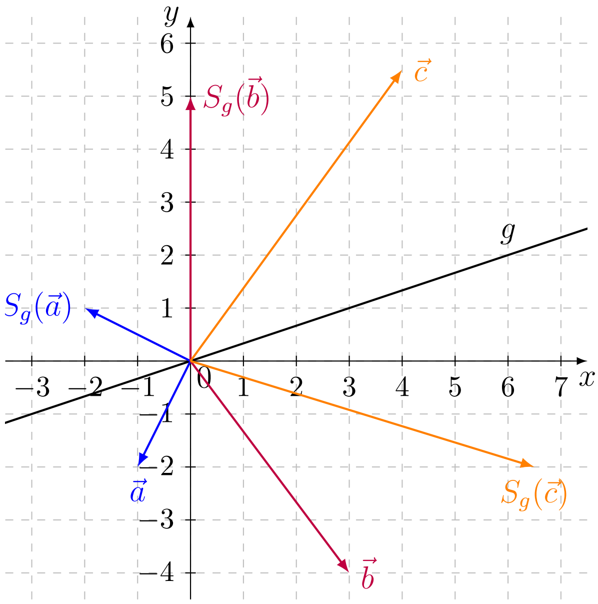
b) Konstruiere mit dem Geodreieck die gespiegelten Vektoren $S_g(\vec{a})$, $S_g(\vec{b})$ und $S_g(\vec{c})$.

c) Berechne die Spiegelungsmatrix zu g.

d) Berechne die Abbildungswerte $S_g(\vec{a})$, $S_g(\vec{b})$, $S_g(\vec{c})$.

e) Überprüfe, ob die berechneten Abbildungswerte mit den konstruierten Vektoren übereinstimmen.

Lösung: **a)** und **b)**



c)
$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{9-1}{10} & \frac{2\cdot 3}{10} \\ \frac{2\cdot 3}{10} & \frac{1-9}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{-8}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

d)
$$S_g(\vec{a}) = (-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{5} \\ \frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_g(\vec{b}) = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0}{5} \\ \frac{25}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$S_g(\vec{c}) = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + 5{,}5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32{,}5}{5} \\ \frac{-10}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e) Klar.

3.3 Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 3.6 (*Arbeitsblatt 3.4 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 6*)

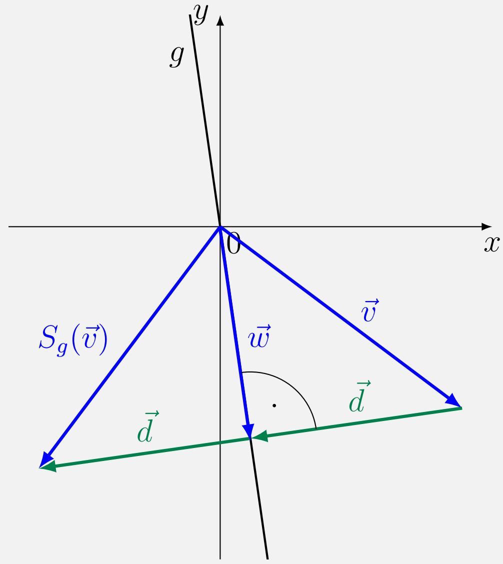
Gegeben sind die Gerade $g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$ und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Berechne die in der Graphik eingezeichneten Vektoren.

$\vec{w} =$

$\vec{d} =$

$S_g(\vec{v}) =$



Aufgabe 3.7 (*Arbeitsblatt 3.4 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 7*)

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

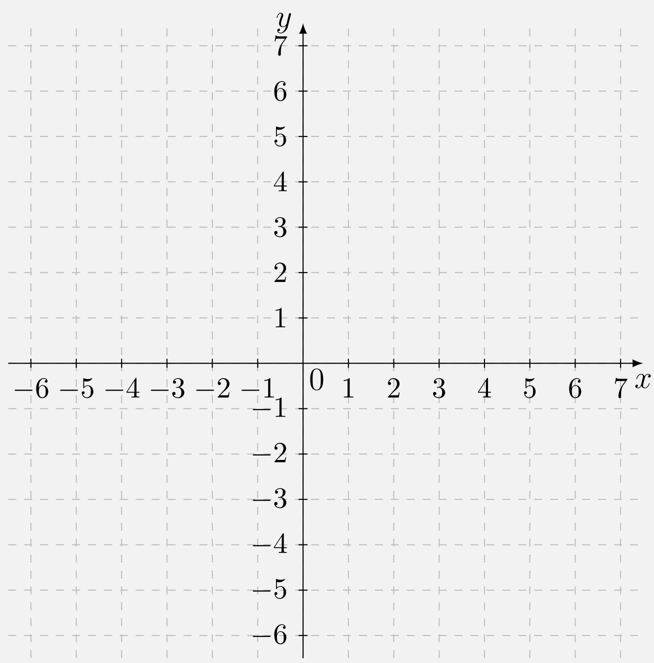
a) Berechne die Matrix für die Spiegelung an g.

$S_g =$

b) Berechne die Abbildungswerte für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$.

$S_g(\vec{a}) =$

$S_g(\vec{b}) =$



c) Zeichne die Gerade g, die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und ihre Abbildungswerte in die Graphik ein.

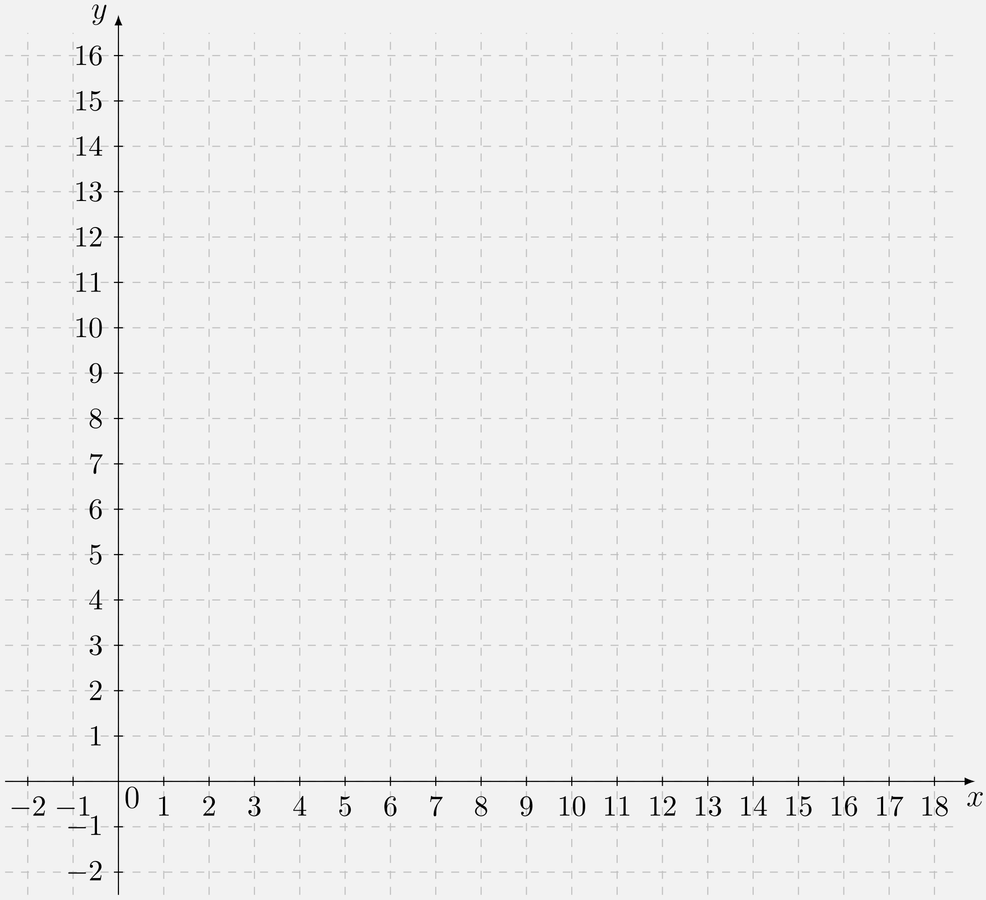
Aufgabe 3.8 (*Arbeitsblatt 3.4 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 8*)

Gegeben ist die Geradenspiegelung $S_g = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \end{bmatrix}$ an einer Geraden g.

Die zugehörige Gerade g soll bestimmt werden.

a) Berechne für den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Abbildungswert. $S_g(\vec{a}) =$

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a}$ und $S_g(\vec{a})$ in das Koordinatensystem ein.



c) Welcher Punkt P auf der Verbindungsstrecke der Pfeilspitzen $\vec{a}$ und $S_g(\vec{a})$ muss auf der Geraden g liegen? Gib die Koordinaten des Punktes an. P

d) Gib die Gerade g an, zu der die Geradenspiegelung S_g gehört.

$g : \vec{s}(t) =$ $\qquad$ $(t \in \mathbb{R})$

3.4 Zusatzmaterial

Aufgabe 3.9 (*Arbeitsblatt 3.5 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 1*)

Gegeben sind die Geradenspiegelung

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

und die Gerade

$$g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimme für festes $t \in \mathbb{R}$ den Abbildungswert $S_g(\vec{s}(t))$.

b) Alle Abbildungswerte $S_g(\vec{s}(t))$ bilden eine Gerade. Gib für diese Gerade einen Stützvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{u}$ an.

Lösung: **a)** $$S_g(\vec{s}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3+2t \\ 4+t \end{pmatrix} = (3+2t) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + (4+t) \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{(3+2t)3+(4+t)4}{5} \\ \frac{(3+2t)4-(4+t)3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9+16+t(6+4)}{5} \\ \frac{12-12+t(8-3)}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2t \\ t \end{pmatrix}$$

b) $S(\vec{s}(t)) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: Stützvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.10 (*Arbeitsblatt 3.5 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 2*)

Welche der folgenden Matrizen stellen keine Geradenspiegelung dar?

a) $\begin{bmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ -\frac{20}{29} & \frac{21}{29} \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} -\frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{21}{29} \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ -\frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} \frac{21}{29} & -\frac{20}{29} \\ -\frac{20}{29} & -\frac{21}{29} \end{bmatrix}$, **e)** $\begin{bmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{21}{29} \end{bmatrix}$, **f)** $\begin{bmatrix} \frac{21}{29} & \frac{20}{29} \\ \frac{21}{29} & -\frac{20}{29} \end{bmatrix}$.

Lösung: **a)** Nein, Diagonalelemente müssen entgegengesetztes Vorzeichen haben.

b) Ja. (Spiegelung an $g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.)

c) Nein, der Eintrag rechts oben muss gleich dem Eintrag links unten sein.

d) Ja. (Spiegelung an $g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.)

e) Nein, Diagonalelemente müssen entgegengesetztes Vorzeichen haben.

f) Nein, der Eintrag rechts oben muss gleich dem Eintrag links unten sein.

Hinweis: Damit eine Matrix $\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ eine Geradenspiegelung darstellt, muss außer den Bedingungen $b_y = -a_x$ und $a_y = b_x$ die Bedingung $a_x^2 + b_x^2 = 1$ erfüllt sein.

4 Unterrichtseinheit 4 - Fixpunkt, Fixgerade, Streckung

4.1 Wiederholung

Aufgabe 4.1 (*Arbeitsblatt 4.1 (Verschiedene lineare Abbildungen), Aufgabe 1*)

Vervollständige die nebenstehende Tabelle.

$\alpha =$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$
$\sin(\alpha) =$	0	1	0	-1
$\cos(\alpha) =$	1	0	-1	0

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

Aufgabe 4.2 (*Arbeitsblatt 4.1 (Verschiedene lineare Abbildungen), Aufgabe 2*)

Die Matrix einer Drehung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung ist durch

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

gegeben, die Matrix der Spiegelung an der Geraden $g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ durch

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} & 2\frac{u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ 2\frac{u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} & -\frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{bmatrix}$$

Gegeben sind lineare Abbildungen $A_1, \ldots, A_6$ durch ihre Matrizen. Kreuze jeweils an, ob die gegebene Abbildung eine Drehung, eine Geradenspiegelung oder keines von beiden ist.

	Drehung	Geradenspiegelung	Weder Drehung noch Spiegelung
$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$		$g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	
$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$90°$		
$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$180°$		
$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		$g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	
$A_5 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$			$\times$
$A_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$		$g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$	

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

Aufgabe 4.3 (*Arbeitsblatt 4.1 (Verschiedene lineare Abbildungen), Aufgabe 3*)

Gegeben sind die lineare Abbildung

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Geraden

$$g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Berechne $A\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Berechne für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ den Abbildungswert $A\big(\vec{s}(t)\big)$.

c) Berechne für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ den Abbildungswert $A\big(\vec{r}(t)\big)$.

d) Zeichne die Geraden g und h in das Koordinatensystem ein und auch die Menge aller Abbildungswerte $A\big(\vec{s}(t)\big)$ und die Menge aller Abbildungswerte $A\big(\vec{r}(t)\big)$ für $t \in \mathbb{R}$.

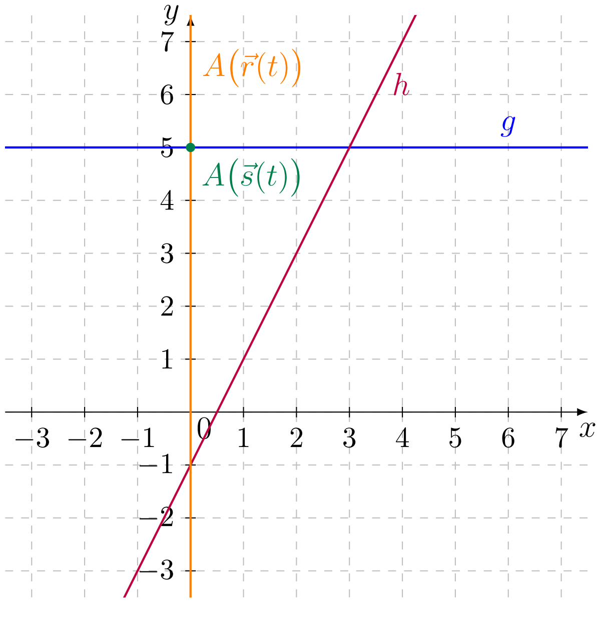
e) Was beobachtest Du?

Lösung: **a)** $A\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $A\big(\vec{s}(t)\big) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) $A\big(\vec{r}(t)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d)



e) Mögliche Beobachtungen: Eine Gerade wird auf eine Gerade abgebildet. Eine Gerade wird auf einen Punkt abgebildet. Alles wird auf die y-Achse abgebildet.

4.2 Geradentreue

Anmerkung
Die Behandlung der Geradentreue ist hier sinnvoll, da wir über Fixgeraden und Fixpunktgeraden sprechen wollen. Im Kapitel 5 wird nochmals über die Geradentreue gesprochen.

Tafelanschrieb

IV. Fixpunkt, Fixgerade, Streckung

1. Geradentreue

Satz: Seien A eine lineare Abbildung und g eine Gerade. Die Menge der Abbildungswerte der Vektoren der Geraden bildet eine Gerade oder sie besteht aus einem einzigen Vektor.

Beweis: Sei

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R}.)$$

Es folgt

$$A\big(\vec{s}(t)\big) = A\big(\vec{p} + t \cdot \vec{u}\big) = A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}).$$

Im Fall $A(\vec{u}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildet die Menge aller Abbildungswerte eine Gerade.

Im Fall $A(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $A\big(\vec{s}(t)\big) = A(\vec{p})$. Die Menge aller Abbildungswerte enthält genau ein Element, nämlich den Vektor $A(\vec{p})$. $\square$

4.3 Fixpunkte und Fixgeraden

Aufgabe 4.4 (*Arbeitsblatt 4.2 (Spiegelung), Aufgabe 4*)

Gegeben sind die Ursprungsgerade $g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und die Geradenspiegelung an g durch

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}.$$

a) Zeichne g in das Koordinatensystem ein. Welche Vektoren werden durch die Spiegelung an g auf sich selbst abgebildet? Überlege geometrisch!

b) Gegeben ist die Gerade $h : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. Zeichne h in das Koordinatensystem ein.

c) Berechne das Skalarprodukt der Richtungsvektoren von g und h. Welchen Winkel schließen die Vektoren ein?

d) Berechne $S_g\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $S_g\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zeichne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $S_g(\vec{a})$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $S_g(\vec{b})$ in das Koordinatensystem ein.
Hinweis: Die Ergebnisse haben ganzzahlige Koordinaten.

e) Berechne für jeden festen Wert von t den gespiegelten Vektor $S_g\big(\vec{r}(t)\big)$. Zeichne die Bildgerade $\tilde{h} : \vec{v}(t) = S_g\big(\vec{r}(t)\big)$ $(t \in \mathbb{R})$ in das Koordinatensystem ein. Was beobachtest Du?

Lösung: **a)** Alle Vektoren von g werden auf sich selbst abgebildet.

D.h. alle Vektoren $\vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ werden auf sich selbst abgebildet.

b) Siehe Graphik.

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$. Die Vektoren sind orthogonal, d.h. sie schließen einen Winkel von $90°$ ein.

d) $S_g\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ -\frac{8}{17} \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{15}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60+8}{17} \\ \frac{-32+15}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{68}{17} \\ \frac{-17}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$

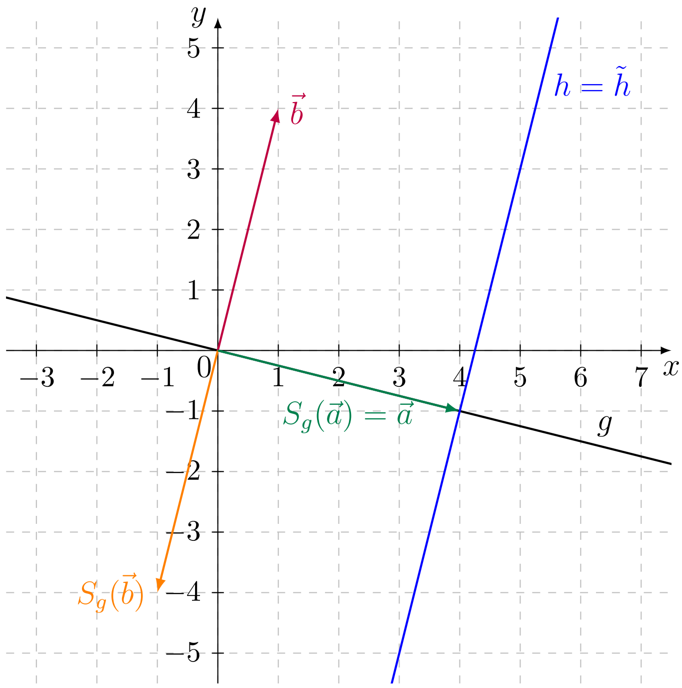
$S_g\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ -\frac{8}{17} \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{15}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15-32}{17} \\ \frac{-8-60}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-17}{17} \\ -\frac{-68}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$

e) Für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ gilt

$S_g(\vec{r}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ \tilde{h} : \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Beobachtung: $\tilde{h} = h$.



Tafelanschrieb

2. Fixpunkt und Fixgerade

Definition: Sei A eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

1) Ein Punkt $P(v_x \mid v_y)$ heißt Fixpunkt von A, wenn der zugehörige Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ von A unverändert gelassen wird. D.h. es gilt $A(\vec{v}) = \vec{v}$.
2) Eine Gerade heißt Fixpunktgerade, wenn alle ihre Punkte Fixpunkte sind.
3) Eine Gerade g heißt Fixgerade von A, wenn sie durch A wieder auf sich abgebildet wird. Jede Fixpunktgerade ist eine Fixgerade, aber die Umkehrung gilt nicht.

Tafelanschrieb

Beispiele: 1) Die Spiegelung an einer Geraden g besitzt die Fixpunktgerade g. Alle Geraden, die senkrecht auf g stehen, sind Fixgeraden, aber keine Fixpunktgeraden.

2) Ist A eine lineare Abbildung, so ist $(0 \mid 0)$ ein Fixpunkt, denn

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

3) Eine Drehung um $(0 \mid 0)$ mit Winkel $0° < \alpha < 360°$ hat nur den Fixpunkt $(0 \mid 0)$.

Mündlich: 1) und 3) sind geometrisch klar und brauchen nicht rechnerisch bewiesen zu werden.

Aufgabe 4.5 (*Arbeitsblatt 4.3 (Fixpunkt und Fixgerade), Aufgabe 5*)

Gegeben ist die lineare Abbildung A durch

$$A = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

a) Bestimme die Menge M_1 aller Fixpunkte.
Hinweis: Ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}$, der zu einem Fixpunkt $(v_x \mid v_y)$ gehört, ist Lösung der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{v}$.

b) Bestimme die Menge M_2 aller Vektoren $\vec{v}$, für die $A(\vec{v}) = 5\cdot\vec{v}$ gilt.

c) Zeichne die beiden Mengen in das Koordinatensystem ein.

d) Gib drei verschiedene Fixgeraden h_1, h_2, h_3 von A in der Form $h_j : \vec{s}(t) = \vec{p} + t\cdot\vec{u}$ an $(j = 1, 2, 3)$. Zeichne die drei Fixgeraden in das Koordinatensystem ein.
Hinweis: Bei Fixgeraden ist es geschickt, als Stützvektor $\vec{p}$ einen Vektor zu verwenden, der zu einem Fixpunkt gehört.

Lösung: **a)** $A(\vec{v}) = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} = v_x\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + v_y\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3v_x+2v_y\\2v_x+3v_y\end{pmatrix}.$

$$A(\vec{v}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3v_x+2v_y\\2v_x+3v_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}3v_x+2v_y &=& v_x\\ 2v_x+3v_y &=& v_y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}2v_x+2v_y &=& 0\\ 2v_x+2v_y &=& 0\end{array}\right.$$

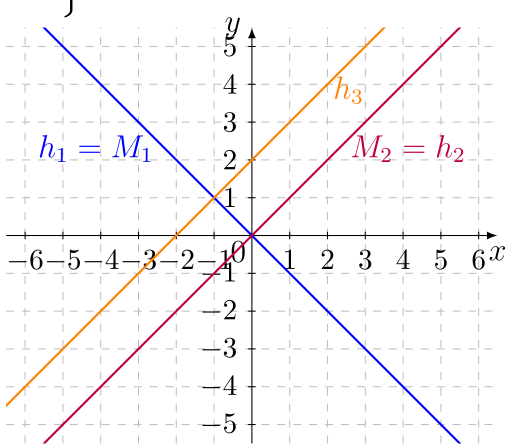
$$M_1 = \left\{\vec{v} = \begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\vec{v} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\}.$$

b) $M_2 = \left\{\vec{v} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\}.$

c) $h_1 : \vec{s}(t) = t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ (t\in\mathbb{R}),$

$h_2 : \vec{s}(t) = t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ (t\in\mathbb{R}),$

$h_3 : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ (t\in\mathbb{R})$



4.4 Streckungen

Tafelanschrieb

3. Streckungen

Definition: Sei k eine positive reelle Zahl außer 1. Die lineare Abbildung Z mit der Matrix

$$Z = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

heißt zentrische Streckung, k heißt Streckfaktor.

Mündlich: Im Fall $0 < k < 1$ spricht man auch von Stauchung.
Im Fall $k = 1$ wird jeder Vektor auf sich abgebildet, das ist langweilig.

Aufgabe 4.6 (*Arbeitsblatt 4.4 (Zentrische Streckung), Aufgabe 6*)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die zentrische Streckung

$$Z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die gestreckten Vektoren $Z(\vec{a})$, $Z(\vec{b})$ und $Z(\vec{c})$.

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in das Koordinatensystem ein und das Dreieck ABC, das durch die zugehörigen Punkte gegeben ist.

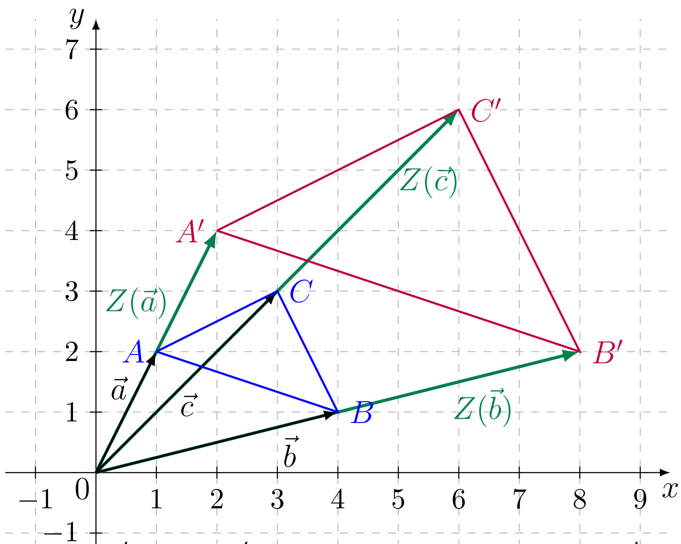
c) Zeichne die Standard-Pfeile von $Z(\vec{a}), Z(\vec{b}), Z(\vec{c})$ in das Koordinatensystem ein und das Dreieck $A'B'C'$, das durch die zugehörigen Punkte gegeben ist.

d) Was kannst Du anhand deiner Zeichnung bezüglich der Winkel und der Längen der beiden Dreiecke über die Abbildung Z aussagen? Bleiben Winkel und Längen erhalten?

Lösung: a)
$$Z(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad Z(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Z(\vec{c}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) und **c)** siehe Graphik

d) Winkel bleiben erhalten,
Längen werden verdoppelt.



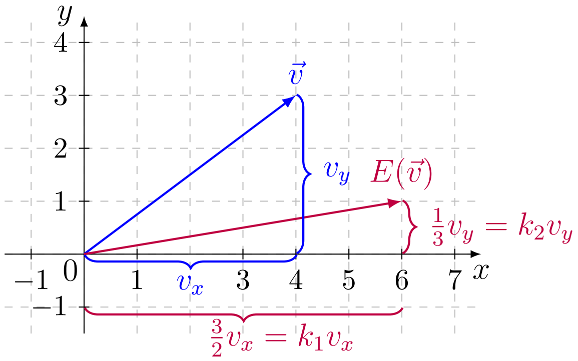
Tafelanschrieb

Definition: Seien k_1, k_2 verschiedene positive reelle Zahlen. Die lineare Abbildung E mit der Matrix

$$E = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

heißt Eulerabbildung.

Beispiel: $E = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Anmerkung
Es gibt noch andere Eulerabbildungen, auf die hier nicht eingegangen wird. Z.B. ist in Aufgabe 5 eine Eulerabbildung gegeben. Sie hat bezüglich eines um $45°$ gedrehten Koordinatensystems eine Matrix-Darstellung wie in der Definition angegeben.
Korrekt heißt E im Fall $k_1 \neq k_2$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *Euleraffinität*. Im Fall $k_1 = 1$ und $k_2 \neq k_1$, $k_2 \neq 0$ wird E als *Parallelstreckung* bezeichnet.

Aufgabe 4.7 (*Arbeitsblatt 4.5 (Eulerabbildungen), Aufgabe 7*)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung E mit dem Matrix-Schema

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die Abbildungswerte $E(\vec{a})$, $E(\vec{b})$ und $E(\vec{c})$.

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in das Koordinatensystem ein und das Dreieck ABC, das durch die zugehörigen Punkte gegeben ist.

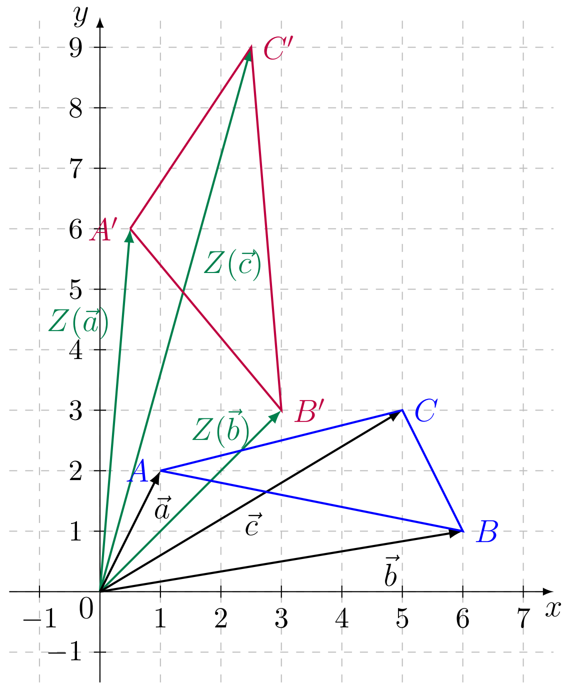
c) Zeichne die Standard-Pfeile von $E(\vec{a}), E(\vec{b}), E(\vec{c})$ in das Koordinatensystem ein und das Dreieck $A'B'C'$, das durch die zugehörigen Punkte gegeben ist.

d) Was kannst Du anhand deiner Zeichnung bezüglich der Winkel und der Längen der beiden Dreiecke über die Abbildung E aussagen? Bleiben Winkel und Längen erhalten?

Lösung: **a)** $E(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$, $E(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E(\vec{c}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 9 \end{pmatrix}$.

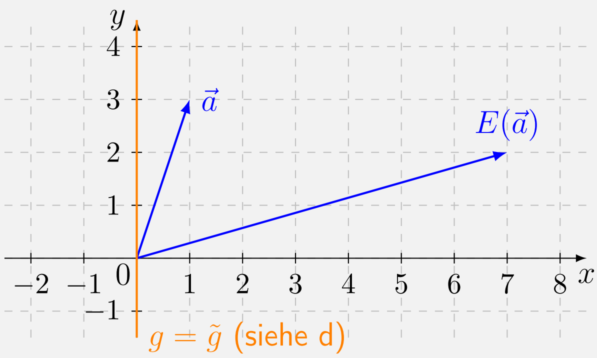
b) und **c)** siehe rechts stehende Graphik.

d) Weder Winkel noch Längen bleiben erhalten.



Aufgabe 4.8 (*Arbeitsblatt 4.5 (Eulerabbildungen), Aufgabe 8*)

Im Koordinatensystem sind der Vektor $\vec{a}$ und sein Abbildungswert $E(\vec{a})$ eingezeichnet. E ist eine Eulerabbildung.



a) Bestimme anhand der Graphik die Matrix von E. $E = \begin{bmatrix} \boxed{7} & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$

b) Überprüfe deine Matrix, indem du $E(\vec{a})$ mit deiner Matrix ausrechnest und mit der Graphik vergleichst.

c) Bestimme rechnerisch alle Fixpunkte von E. Löse dazu die Gleichung $E\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

d) Gegeben ist die Gerade $g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. Berechne $E(\vec{s}(t))$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$.

Zeichne g und die Bildgerade $\tilde{g} : \vec{r}(t) = E(\vec{s}(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ in das Koordinatensystem ein. Was beobachtest Du?

Lösung: **a)** Siehe Aufgabentext.

b) $E(\vec{a}) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \checkmark.$

c) $E\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7v_x \\ \frac{2}{3}v_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 7v_x & = & v_x \\ \frac{2}{3}v_y & = & v_y \end{cases} \Leftrightarrow v_x = v_y = 0$
$\Rightarrow E$ hat nur den Fixpunkt $(0 \mid 0)$.

d) $E\big(\vec{s}(t)\big) = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \tilde{g} : \vec{r}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \tilde{g} = g$, d.h. g ist eine Fixgerade.
(Die Abbildung E besitzt genau zwei Fixgeraden. Die zweite ist die x-Achse.)

4.5 Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 4.9 (*Arbeitsblatt 4.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9*)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Trage „w“ oder „f“ ein.

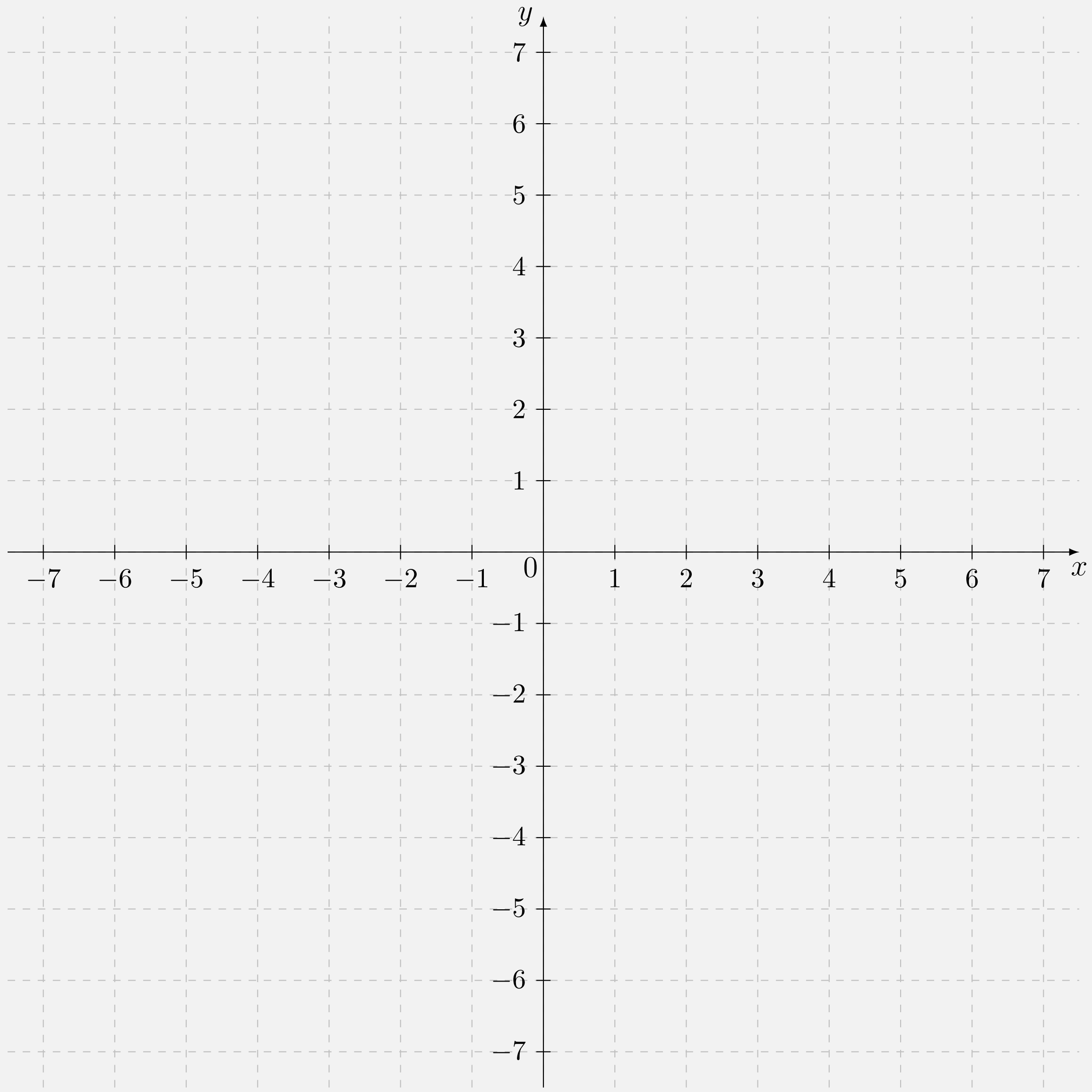
Aussage	w/f
Jede lineare Abbildung bildet Geraden auf Geraden ab.	
Jede lineare Abbildung hat mindestens den Fixpunkt $(0 \mid 0)$.	
Es gibt lineare Abbildungen, die nur einen Fixpunkt haben.	
Jede Fixpunktgerade ist eine Fixgerade	
Jede Fixgerade ist eine Fixpunktgerade	
Jede Geradenspiegelung hat unendlich viele Fixpunktgeraden.	
Jede Geradenspiegelung hat unendlich viele Fixgeraden.	
Jede Geradenspiegelung hat unendlich viele Fixpunkte.	
Ist Z eine zentrische Streckung, dann sind alle Ursprungsgeraden Fixgeraden von Z.	
Ist E eine Eulerabbildung, dann sind alle Ursprungsgeraden Fixgeraden von E.	
Ist D_α eine Drehung um $(0 \mid 0)$ mit Winkel α, $0° < \alpha < 360°$, dann sind alle Ursprungsgeraden Fixgeraden von D_α.	

Aufgabe 4.10 (*Arbeitsblatt 4.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 10*)

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. Mit S_g sei die Spiegelung an g bezeichnet.

a) Zeichne g in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne in das Koordinatensystem drei verschiedene Fixgeraden h_1, h_2, h_3 von S_g ein, die keine Fixpunktgeraden von S_g sind.



Weiter auf der nächsten Seite.

Aufgabe 4.11 (*Arbeitsblatt 4.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 11*)

Gegeben ist die Eulerabbildung E mit der Matrixdarstellung

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Gib einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an, der die Gleichung $E(\vec{v}) = \vec{v}$ löst. $\vec{v} =$ $\boxed{}$

b) Gib die Fixpunktgerade von E an. $g : \vec{s}(t) =$ $\boxed{}$

c) Gib eine Fixgerade h_1 von E an, die keine Fixpunktgerade von E ist.

$$h_1 : \vec{s}(t) = \boxed{}$$

d) Da E eine Fixpunktgerade besitzt, gibt es noch mehr Fixgeraden von E. Gib eine weitere Fixgerade $h_2 \neq h_1$ von E an, die keine Fixpunktgerade von E ist.
Hinweis: Verwende als Stützvektor einen Vektor, der zu einem Fixpunkt von E gehört.

$$h_2 : \vec{s}(t) = \boxed{}$$

Weiter auf der nächsten Seite.

Aufgabe 4.12 (*Arbeitsblatt 4.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 12*)

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit der Matrixdarstellung

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die folgenden Abbildungswerte.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{}.$$

b) Gib einen Fixpunkt P von A an. P $\boxed{}$

c) Gib eine Fixpunktgerade von A an. $g : \vec{s}(t) = \boxed{}$

d) Gib einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ an, für den $A(\vec{v}) = 3 \cdot \vec{v}$ gilt. $\vec{v} = \boxed{}$

e) Gib eine Fixgerade von A an, die keine Fixpunktgerade von A ist.

$$h : \vec{s}(t) = \boxed{}$$

4.6 Zusatzmaterial

Pythagoräische Tripel (für Spiegelungsmatrizen):

$$(3, 4, 5);\ (5, 12, 13);\ (8, 15, 17);\ (7, 24, 25);\ (20, 21, 29);\ (12, 35, 37).$$

Denn eine Matrix $\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ ist genau dann eine Geradenspiegelung, wenn die Bedingungen

$$b_y = -a_x,\ a_y = b_x \text{ und } a_x^2 + b_x^2 = 1$$

erfüllt sind. Z.B. $a_x = \frac{3}{5}$ und $b_x = \frac{4}{5}$.

Anmerkung
In der folgenden Aufgabe beschreibt die gegebene Abbildung die orthogonale Projektion auf die Gerade $g: \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix ergibt sich direkt aus der Berechnung von $\vec{w}$ in Kapitel 3. Der Vektor $\vec{w}$ bezeichnet dort die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{v}$ auf die Ursprungsgerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$. Es gilt

$$\begin{aligned} A(\vec{v}) &= \vec{w} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{v_x u_x + v_y u_y}{u_x^2 + u_y^2} u_x \\ \frac{v_x u_x + v_y u_y}{u_x^2 + u_y^2} u_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \begin{pmatrix} \frac{u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} \frac{u_y u_x}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} & \frac{u_y u_x}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} & \frac{u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setzt man $u_x = 2$, $u_y = 1$ ein, so ergibt sich die Matrix der nächsten Aufgabe.

Aufgabe 4.13 (*Arbeitsblatt 4.7 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 1*)

Gegeben sind die lineare Abbildung

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

und die Geraden

$$g: \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Berechne für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ den Abbildungswert $A(\vec{s}(t))$.

b) Berechne für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ den Abbildungswert $A(\vec{r}(t))$.

c) Zeichne die Geraden g und h in das Koordinatensystem ein und auch die Menge aller Abbildungswerte $A(\vec{s}(t))$ und die Menge aller Abbildungswerte $A(\vec{r}(t))$.

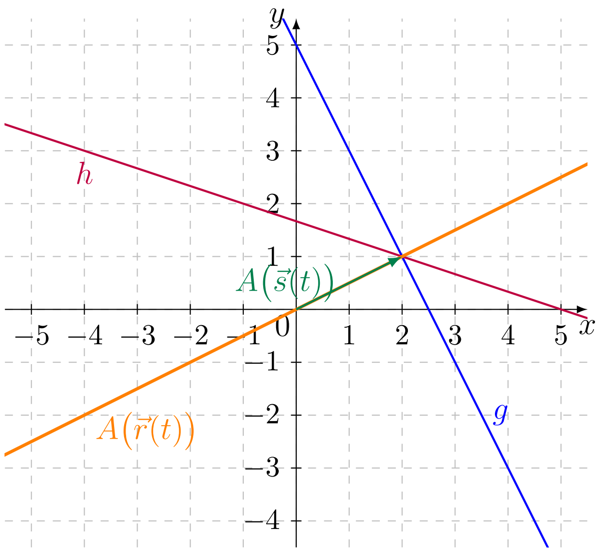
d) Was beobachtest Du?

Lösung: **a)** $A(\vec{s}(t)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $A(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Siehe Graphik.

d) Die Gerade g wird auf einen Vektor abgebildet,
die Gerade h wird auf eine Gerade abgebildet.



Anmerkung
In der nächsten Aufgabe soll die Spiegelungsgerade aus der Matrix der Spiegelung bestimmt werden. Dazu wird die Fixpunktgerade berechnet.
Die Lösung von linearen Gleichungssystemen ist manchen der Schüler:innen noch nicht bekannt. Daher wird im Aufgabenteil a) ein kurze Anleitung gegeben.
Aufgabenteil d) dient der Selbstkontrolle.

Aufgabe 4.14 (*Arbeitsblatt 4.7 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 2*)

Gegeben ist eine Geradenspiegelung S_g durch

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}$$

a) Bestimme alle Fixpunkte, also alle Lösungen der Gleichung $S_g\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

Hinweis: Berechne zunächst $S_g\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ für allgemeine reelle Koordinaten v_x, v_y.

Die Gleichung $S_g\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ ergibt zwei Gleichungen, für jede Koordinate eine. Löse jede der beiden Gleichungen nach v_x auf.

b) Gib die Spiegelgerade g an.

c) Gegeben ist der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechne $S_g(\vec{w})$.

d) Zeichne g, $\vec{w}$ und $S_g(\vec{w})$ in das Koordinatensystem ein.

Lösung: **a)** $S_g\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ -\frac{8}{17} \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{15}{17} \end{pmatrix}$

$$v_x \cdot \begin{pmatrix} \frac{15}{17} \\ -\frac{8}{17} \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} \\ -\frac{15}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{15}{17}v_x - \frac{8}{17}v_y &=& v_x \\ -\frac{8}{17}v_x - \frac{15}{17}v_y &=& v_y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 15v_x - 8v_y &=& 17v_x \\ -8v_x - 15v_y &=& 17v_y \end{array} \right.$$

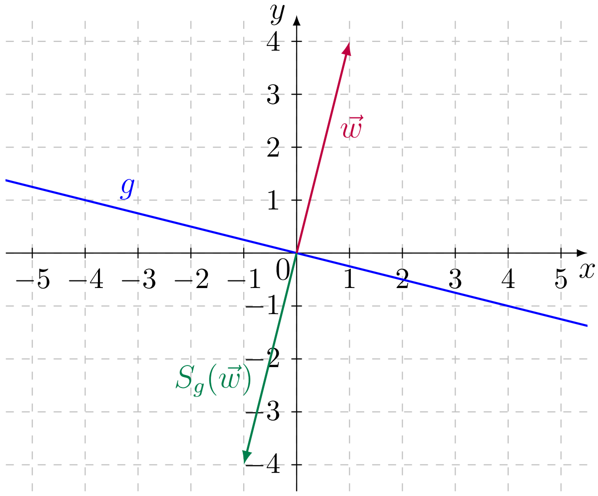
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -8v_y &=& 2v_x \\ -8v_x &=& 32v_y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -4v_y &=& v_x \\ v_x &=& -4v_y \end{array} \right.$$

Setzt man $v_y = t$, so folgt $v_x = -4t$.
Alle Fixpunkte ergeben sich also aus
$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4t \\ t \end{pmatrix}$ mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$.

b) Spiegelgerade $g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.

c) $S_g(\vec{w}) = \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) Siehe Graphik rechts.



5 Unterrichtseinheit 5 - Geometrische Veranschaulichung linearer Abbildungen

5.1 Wiederholung

Tafelanschrieb

Wiederholung

Definition: Eine Abbildung A heißt linear, wenn sie von der Form

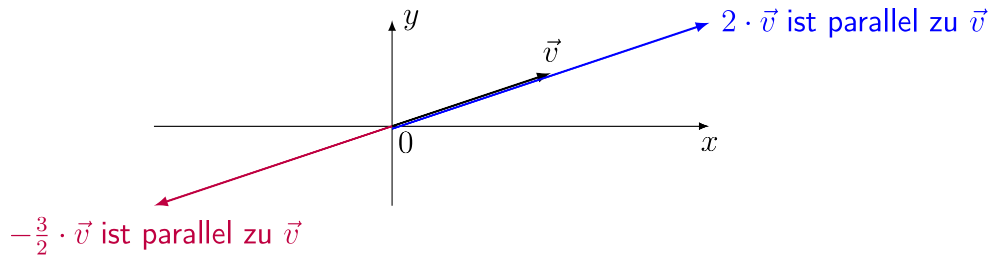
$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{a} + v_y \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

mit festen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ist.

Algebraische Eigenschaften: Für jede lineare Abbildung A gelten

(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ und
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$.

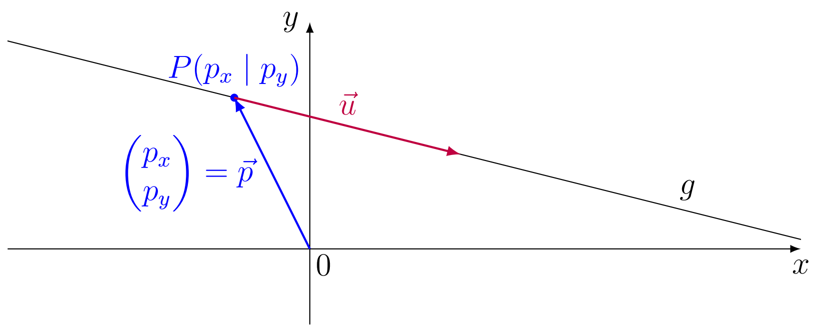
Parallelität: Zwei Vektoren $\vec{0} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$.



Geraden: Eine Gerade g ist durch

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

gegeben. Der Vektor $\vec{p}$ heißt Stützvektor und $\vec{u} \neq \vec{0}$ heißt Richtungsvektor.



Ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$, dann besteht die Gerade g aus dem Punkt $P(p_x \mid p_y)$ und aus allen Punkten, die durch Verschiebung des Punktes P mit beliebigem Vielfachen des Richtungsvektors entstehen.

Vorgehen: Der Text aus dem Tafelaufschrieb befindet sich auch auf dem ersten Übungsblatt. Daher brauchen die Schüler:innen nicht mitzuschreiben.

5.2 Geometrische Veranschaulichung

> **Anmerkung**
> In dieser Unterrichtseinheit werden geometrische Eigenschaften linearer Abbildungen behandelt (Geradentreue, Parallelentreue, Verhältnistreue). Zusätzlich wird herausgearbeitet, wie die Einträge der Matrix geometrisch interpretiert werden können.

Aufgabe 5.1 (*Arbeitsblatt 5.1 (Geraden, Matrizen), Aufgabe 1*)

Gegeben sind die Geraden

$$g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad h : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

und die Abbildung A mit dem Matrix-Schema

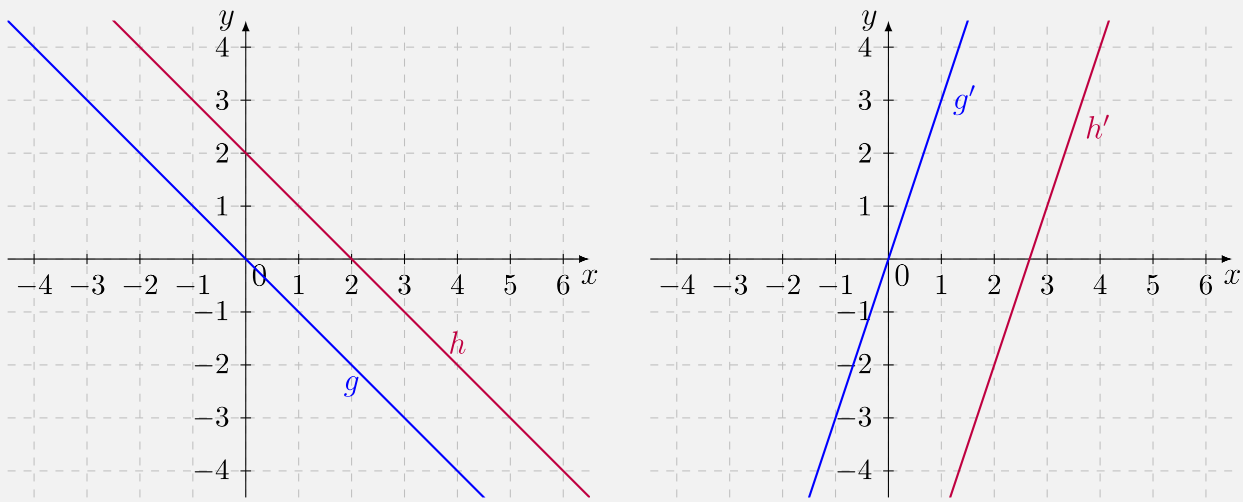
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Zeichne die Geraden in das linke Koordinatensystem ein. Warum sind die Geraden parallel?

b) Die Geraden werden mit der Abbildung A abgebildet. Berechne die Bildgeraden.

$$g' : \vec{s}(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \ (t \in \mathbb{R}), \quad h' : \vec{s}(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}} + t \cdot \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}} \ (t \in \mathbb{R}).$$

c) Zeichne die Bildgeraden g', h' in das rechte Koordinatensystem ein. Sind sie parallel?



Lösung: **a)** Die Geraden sind parallel, da ihre Richtungsvektoren parallel sind.

b) Siehe Aufgabentext.

c) Die Bildgeraden sind parallel.

Anmerkung
Die folgende Aufgabe zeigt die geometrische Bedeutung der zwei Vektoren, mit denen die Abbildungsmatrix gebildet wird.

Aufgabe 5.2 (*Arbeitsblatt 5.1 (Geraden, Matrizen), Aufgabe 2*)

Es seien $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsvektoren und A eine lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ (a_x, a_y, b_x, b_y sind irgendwelche reellen Zahlen).

a) Berechne die Abbildungswerte der Einheitsvektoren und gib sie mit Hilfe der Einträge a_x, a_y, b_x, b_y an.

$$A(\vec{e}_x) = \boxed{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}}, \quad A(\vec{e}_y) = \boxed{\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}}.$$

b) Ergänze mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil a) die Formeln im folgenden Satz.
Im Matrix-Schema der Abbildung A steht in der ersten Spalte der Vektor $\vec{a} = \boxed{A(\vec{e}_x)}$ und in der zweiten Spalte der Vektor $\vec{b} = \boxed{A(\vec{e}_y)}$.

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

Tafelanschrieb

V. Geometrische Veranschaulichung linearer Abbildungen

1. Geometrische Bedeutung der Matrix

Definition: Die Vektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ heißen Einheitsvektoren. Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullvektor.

Merksatz: Ist A eine lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema

$$\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix},$$

so sind die Spalten $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ die Bilder der Einheitsvektoren. Das bedeutet, es gilt

$$A = [A(\vec{e}_x) \; A(\vec{e}_y)] = \left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

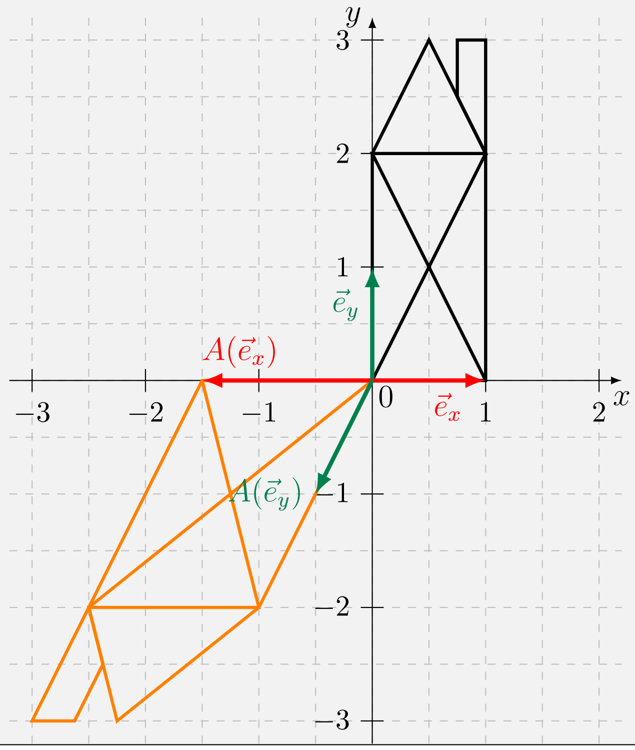
Anmerkung
Dieser Merksatz ist auch für Studierende in der Linearen Algebra sehr wichtig!

Vorgehen: Die erste Aufgabe des nächsten Aufgabenblattes wird gemeinsam gelöst.

Mündlich: Hinweis für die weiteren Aufgaben: Ihr braucht nicht die Formeln für die Matrizen aus den vorherigen Einheiten zu kennen. Die Matrizen können direkt aus der Aufgabenstellung ermittelt werden.

Aufgabe 5.3 (*Arbeitsblatt 5.2 (Matrizen aufstellen), Aufgabe 3*)

A sei die lineare Abbildung, die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet. Lies aus der Graphik $A(\vec{e}_x)$, $A(\vec{e}_y)$ ab und gib das Matrix-Schema von A an.



$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A(\vec{e}_x) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(\vec{e}_y) \overset{\text{(L2)}}{=} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

Weiter auf der nächsten Seite.

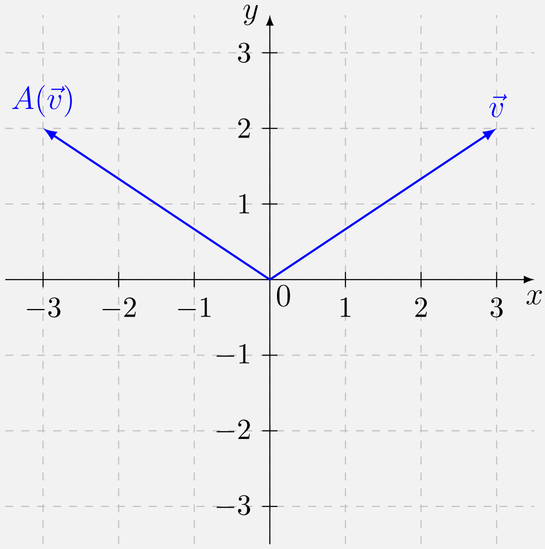
Aufgabe 5.4 (*Arbeitsblatt 5.2 (Matrizen aufstellen), Aufgabe 4*)

Bestimme jeweils die Abbildungswerte der Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ unter der beschriebenen Abbildung und stelle damit das Matrix-Schema auf, das die Abbildung beschreibt. Kontrolliere deine Matrix, indem Du mit der Matrix den Abbildungswert des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ berechnest und $\vec{v}$ und seinen Abbildungswert in das Koordinatensystem einzeichnest.
Tipp: Wenn du z.B. den Vektor $\vec{e}_x$ und seinen Abbildungswert einzeichnest, kannst du die Koordinaten des Abbildungswertes von $\vec{e}_x$ direkt ablesen.

a) A sei die Spiegelung an der y-Achse.

$$A = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

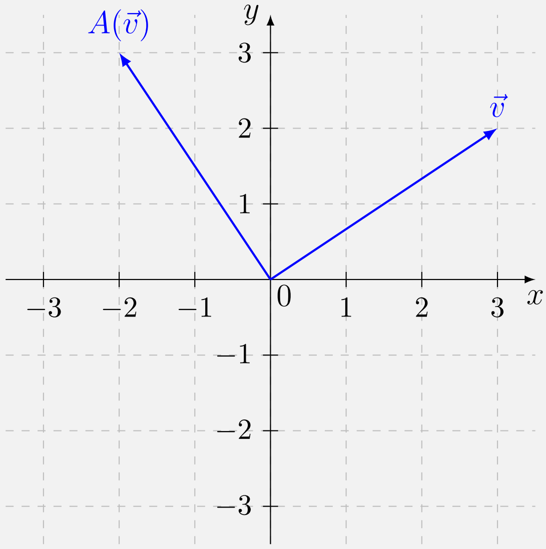
$$A(\vec{v}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



b) D sei die Drehung um den Ursprung mit Winkel $90°$ im Gegenuhrzeigersinn.

$$D = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$D(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

Aufgabe 5.5 (*Arbeitsblatt 5.2 (Matrizen aufstellen), Aufgabe 5*)

Es sei A eine beliebige Abbildung der Ebene, die die Eigenschaften (L1) und (L2) besitzt (mehr wird nicht vorausgesetzt). Weiter seien die Abbildungswerte $A(\vec{e}_x)$ und $A(\vec{e}_y)$ der Einheitsvektoren bekannt.

a) Drücke den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ mit beliebigen Koordinaten v_x und v_y als Summe der Vektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ multipliziert mit geeigneten Faktoren aus.

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \boxed{v_x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{v_y} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{v_x} \cdot \vec{e}_x + \boxed{v_y} \cdot \vec{e}_y.$$

b) Drücke den Abbildungswert $A(\vec{v})$ mit Hilfe der Vektoren $A(\vec{e}_x)$ und $A(\vec{e}_y)$ aus. Verwende dazu das Ergebnis aus Teil a) und die Eigenschaften (L1) und (L2).

$$A(\vec{v}) = \boxed{A(v_x \cdot \vec{e_x} + v_y \cdot \vec{e_y}) = v_x \cdot A(\vec{e_x}) + v_y \cdot A(\vec{e_y})}.$$

c) Folgere, dass A linear ist und gib das Matrix-Schema von A mit Hilfe der Vektoren $A(\vec{e}_x)$ und $A(\vec{e}_y)$ an.

$$A = \boxed{\begin{bmatrix} A(\vec{e}_x) & A(\vec{e}_y) \end{bmatrix}}.$$

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

Tafelanschrieb

Satz: Ist A eine Abbildung der Ebene, die die Eigenschaften

(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ und
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$.

besitzt, so ist sie linear. Damit sind die Eigenschaften (L1) und (L2) äquivalent zur Definition linearer Abbildungen.

Beweis: Letzte Übungsaufgabe.

Aufgabe 5.6 (*Arbeitsblatt 5.3 (Abbildungswert des Nullvektors), Aufgabe 6*)

Gegeben ist eine lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$.

a) Berechne $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Matrix-Schemas.

b) Verwende die Eigenschaft (L2) mit geschickt gewähltem λ, um $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu beweisen.

Lösung: **a)** $\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Wähle $\lambda = 0$. Dann folgt $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\left(0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \overset{\text{(L2)}}{=} 0 \cdot A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tafelanschrieb

2. Geometrische Eigenschaften

Definition: Zwei Geraden

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u}, \quad h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \vec{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

heißen parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind, d.h. wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$ gilt. Dann kann h auch mit dem Richtungsvektor von g geschrieben werden:

$$h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \lambda \cdot \vec{u} = \vec{q} + t' \cdot \vec{u} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

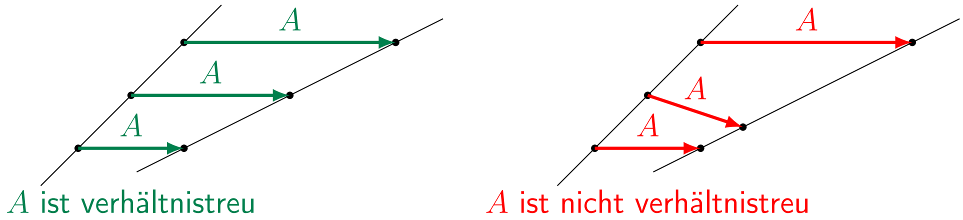
Satz: Eine lineare Abbildung A besitzt folgende geometrische Eigenschaften.

Zentriertheit:	A fixiert den Ursprung, d.h. es gilt $A(\vec{0}) = \vec{0}$.
Geradentreue:	Jede Gerade wird durch A entweder verhältnistreu auf eine Gerade oder auf einen Vektor abgebildet.
Parallelentreue:	Werden zwei parallele Geraden wieder auf Geraden abgebildet, so sind die Bildgeraden wieder parallel oder gleich.

Vorgehen: Hier wird die Verhältnistreue mit Hilfe eines Gummibandes veranschaulicht. Auf einem Gummiband sind in gleichen Abständen (oder Hälfte und Viertel) Papierstreifen befestigt. Beim Auseinanderziehen des Gummibandes bleiben die Verhältnisse der Streckenlängen erhalten.

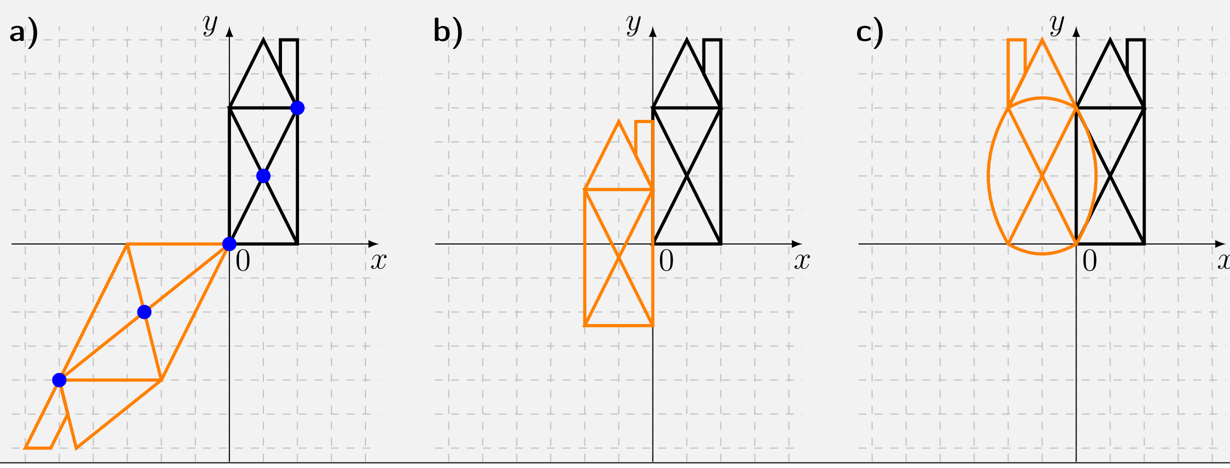
> **Anmerkung**
> Hier wird nochmals die Geradentreue thematisiert. Die Zentriertheit und die Geradentreue mit Verhältnistreue sind äquivalent zur Linearität der Abbildung. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein.

Tafelanschrieb



Aufgabe 5.7 (*Arbeitsblatt 5.4 (Linearität), Aufgabe 7*)

In jeder Teilaufgabe sei A die Abbildung, die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet. Beantworte jeweils die Frage: Kann die Abbildung A linear sein oder ist sie sicher nicht linear?



Lösung: **a)** Kann linear sein: Geraden werden auf Geraden abgebildet, der mittlere der blauen Punkte wird auf die Mitte abgebildet.

b) Kann nicht linear sein: Die Zentriertheit ist verletzt.

c) Kann nicht linear sein: Nicht jede Geraden wird auf eine Gerade abgebildet.

Tafelanschrieb

Beweis: 1) Zentriertheit: Siehe Aufgabe 6.

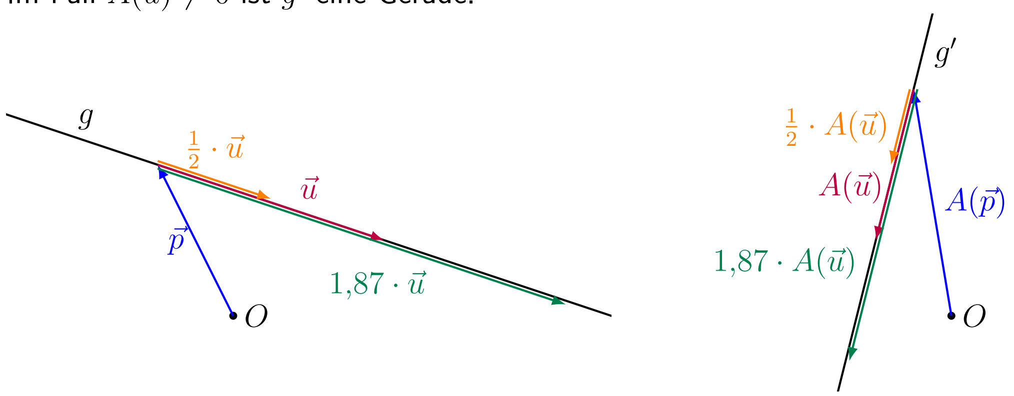
2) Geradentreue: Die Gerade

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

wird auf

$$g' : \vec{r}(t) = A\big(\vec{s}(t)\big) = A(\vec{p} + t \cdot \vec{u}) \overset{\text{(L1)}}{=} A(\vec{p}) + A(t \cdot \vec{u}) \overset{\text{(L2)}}{=} A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

abgebildet.
Im Fall $A(\vec{u}) = \vec{0}$ besteht g' nur aus einem Vektor.
Im Fall $A(\vec{u}) \neq \vec{0}$ ist g' eine Gerade.



Außerdem sieht man: Zwei Punkte im Abstand $1 \cdot \|\vec{u}\|$ (oder $\frac{1}{2} \cdot \|\vec{u}\|$ oder $1{,}87 \cdot \|\vec{u}\|$) werden auf Punkte im Abstand $1 \cdot \|A(\vec{u})\|$ (oder $\frac{1}{2} \cdot \|A(\vec{u})\|$ oder $1{,}87 \cdot \|A(\vec{u})\|$) abgebildet. Daher ist die Abbildung verhältnistreu.

3) Parallelentreue: Sind $g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ und $h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \vec{u}$ parallele Geraden, dann sind die Bildgeraden

$$g' : \vec{s}(t) = A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}) \text{ und } h' : \vec{s}(t) = A(\vec{q}) + t \cdot A(\vec{u})$$

wieder parallel oder identisch, falls z.B. $A(\vec{p}) = A(\vec{q})$ gilt. $\square$

Anmerkung

Zum Beweis von Teil 3): Die parallelen Geraden sind auch identisch, falls $A(\vec{q})$ in der Geraden g' enthalten ist. Dieser Fall wurde nicht erwähnt, um den Beweis kurz zu halten.

Tafelanschrieb

3. Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition: Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt Eigenvektor (EV) der linearen Abbildung A, wenn

$$A(\vec{v}) \ = \ \lambda \cdot \vec{v}$$

für eine reelle Zahl λ gilt. Dann heißt λ Eigenwert (EW) von A zum Eigenvektor $\vec{v}$.
Eigenvektoren behalten unter der Abbildung A ihre Richtung bei und werden dabei mit ihrem Eigenwert λ gestreckt (Achtung: Im Fall $\lambda < 0$ wird die Pfeilrichtung umgedreht).

Anmerkung
Korrekt müsste man sagen, dass bei einem Eigenvektor $\vec{v}$ von A gilt: $\vec{v}$ und $A(\vec{v})$ sind parallel. Für den Unterricht erschien der Begriff der Richtung prägnanter.

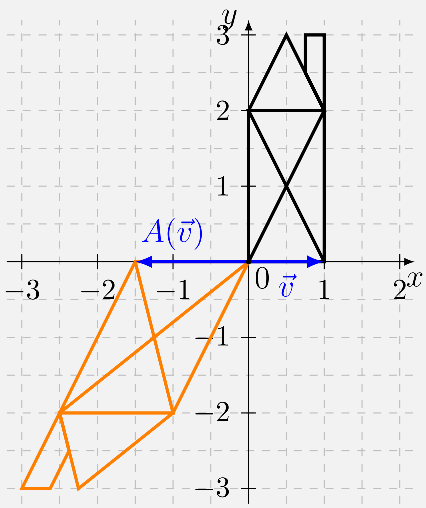
Tafelanschrieb

Bemerkung: Ist $\vec{v}$ ein EV von A zum EW λ, dann ist auch jeder Vektor $s \cdot \vec{v}$ mit $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, ein EV von A zum EW λ, denn

$$A(\underbrace{s \cdot \vec{v}}) \overset{\text{L2}}{=} s \cdot A(\vec{v}) = s \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\underbrace{s \cdot \vec{v}})$$

Aufgabe 5.8 (*Arbeitsblatt 5.5 (Eigenvektoren und Eigenwerte), Aufgabe 8*)

A sei die lineare Abbildung, die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet. Kannst Du einen oder mehrere Eigenvektor(en) von A sehen? Welcher Eigenwert gehört dazu?



Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist EV zum EW $\lambda = -\frac{3}{2}$, denn

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auch jeder Vektor $\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $s \neq 0$ ist ein EV zum EW $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

Anmerkung
In der folgenden Aufgabe kommt bewusst der Fall vor, dass $\lambda = 0$ sein kann.

Aufgabe 5.9 (*Arbeitsblatt 5.5 (Eigenvektoren und Eigenwerte), Aufgabe 9*)

Gegeben sind ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die linearen Abbildungen A, B, C durch ihr Matrizen-Schema

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die Abbildungswerte $A(\vec{v})$, $B(\vec{v})$ und $C(\vec{v})$.

b) Entscheide jeweils, ob $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A, von B oder von C ist. Gib gegebenenfalls den zugehörigen Eigenwert an.

Lösung: **a)** $A(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$, $B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $C(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Es gilt $A(\vec{v}) = 4 \cdot \vec{v}$. Also ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 4$.
Wegen $B(\vec{v}) = 0 \cdot \vec{v}$ ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda = 0$.
Es gilt $C(\vec{v}) \neq \lambda \cdot \vec{v}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Also ist $\vec{v}$ kein Eigenvektor von C.
Denn aus $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ folgt $10 = 2\lambda$ und $1 = 3\lambda$. $\lightning$

Mündlich: Betonen, dass für den Eigenwert $\lambda = 0$ möglich ist, dass ein Eigenvektor jedoch immer ungleich dem Nullvektor sein muss.

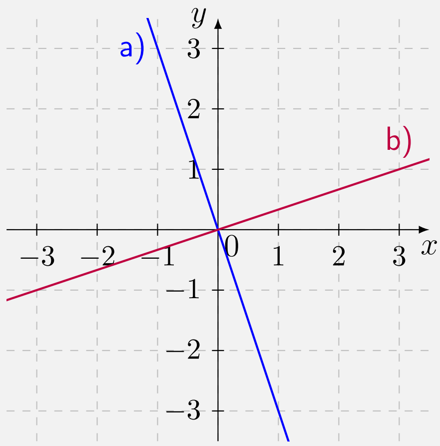
Aufgabe 5.10 (*Arbeitsblatt 5.5 (Eigenvektoren und Eigenwerte), Aufgabe 10*)
Sei S_g die Spiegelung an der Geraden

$$g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Zeichne die Fixpunktegerade von S_g in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne die Fixgerade von S_g ein, die durch den Ursprung geht und verschieden von der Fixpunktgeraden ist.

c) Gib zwei verschiedene Eigenvektoren von S_g an, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören.



Lösung: Alle Vektoren $\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $s \neq 0$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$.
Alle Vektoren $\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s \neq 0$ sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Aufgabe 5.11 (*Arbeitsblatt 5.5 (Eigenvektoren und Eigenwerte), Aufgabe 11*)

a) Sei Z die zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = 2$. Gib alle Eigenvektoren von Z mit dem zugehörigen Eigenwert an.

b) Sei D_{120} die Drehung um $O(0 \mid 0)$ mit Winkel $120°$. Gib alle Fixpunkte von D_{120} an. Besitzt D_{120} Eigenvektoren und Eigenwerte?

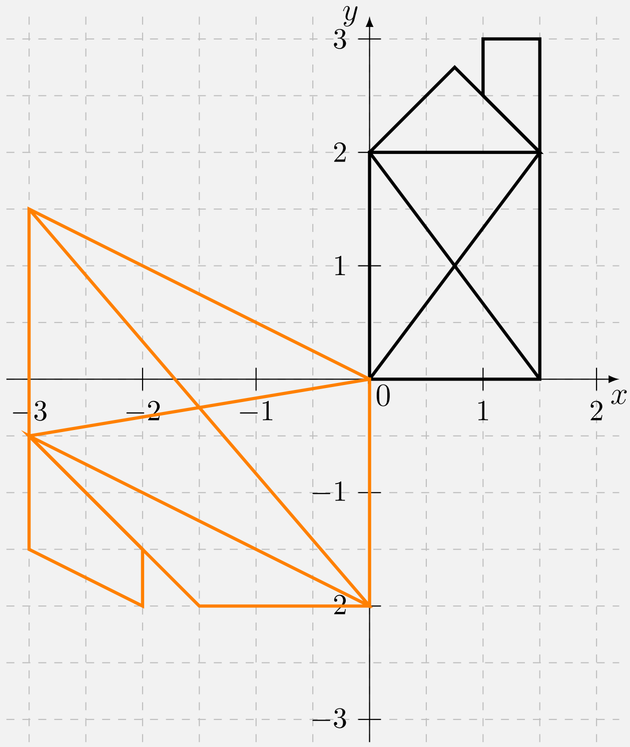
Lösung: **a)** Für jeden Vektor $\vec{v}$ gilt $Z(\vec{v}) = 2 \cdot \vec{v}$. Somit ist jeder Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 2$.

b) Der einzige Fixpunkt ist O. Die Abbildung besitzt keinen Eigenvektor.

5.3 Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 5.12 (*Arbeitsblatt 5.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 12*)

Es sei A die lineare Abbildung, die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet.



a) Zeichne $\vec{e}_x$, $A(\vec{e}_x)$, $\vec{e}_y$ und $A(\vec{e}_y)$ in der Graphik ein.

b) Gib die Koordinaten von $A(\vec{e}_x)$ und $A(\vec{e}_y)$ an.

$A(\vec{e}_x) = \boxed{}$,

$A(\vec{e}_y) = \boxed{}$.

c) Gib das Matrix-Schema der Abbildung an.

$A = \boxed{}$.

Aufgabe 5.13 (*Arbeitsblatt 5.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 13*)

Gegeben sind die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Abbildungswerte.

$A(\vec{v}_1) = \boxed{}$, $A(\vec{v}_2) = \boxed{}$, $A(\vec{v}_3) = \boxed{}$.

b) Kreuze an, falls $\vec{v}_j$ kein Eigenvektor ist, oder gib andernfalls den Eigenwert an.

	kein EV	EV zum EW
$\vec{v}_1$ ist		
$\vec{v}_2$ ist		
$\vec{v}_3$ ist		

Aufgabe 5.14 (*Arbeitsblatt 5.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 14*)

Gegeben ist die Eulerabbildung E mit dem Matrix-Schema

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Gib zwei verschiedene Eigenvektoren an, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören.

Eigenvektor $\vec{v}_1 =$ ☐, zugehöriger Eigenwert $\lambda_1 =$ ☐,

Eigenvektor $\vec{v}_2 =$ ☐, zugehöriger Eigenwert $\lambda_2 =$ ☐.

Aufgabe 5.15 (*Arbeitsblatt 5.6 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 15*)

Für die lineare Abbildung A sind die Abbildungswerte der Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bekannt:

$$A(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Verwende die Eigenschaften (L1) und (L2) zur Berechnung der folgenden Abbildungswerte.

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$ ☐,

$A\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = A(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) =$ ☐.

b) Verwende die Eigenschaft (L2) zur Berechnung der folgenden Abbildungswerte.

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$ ☐,

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ ☐.

c) Gib das Matrix-Schema für A an. $A =$ ☐.

5.4 Zusatzmaterial

Aufgabe 5.16 (*Arbeitsblatt 5.7 (Zusatzmaterial), Zusatzaufgabe 1*)

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und die Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne $A(\vec{u})$, $A(\vec{v})$, $A(\vec{w})$, $A(\vec{p})$.

b) Welche der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{p}$ sind zueinander parallel?

c) Welche der Vektoren $A(\vec{u})$, $A(\vec{v})$, $A(\vec{w})$, $A(\vec{p})$ sind zueinander parallel?

Lösung: **a)** $A(\vec{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$,

$A(\vec{v}) = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$A(\vec{w}) = (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$A(\vec{p}) = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}$, $\vec{p}$ sind parallel, denn $\vec{p} = (-1) \cdot \vec{u}$,
$\vec{v}$, $\vec{w}$ sind parallel, denn $\vec{w} = 4 \cdot \vec{w}$. Offensichtlich sind $\vec{v}$, $\vec{u}$ nicht parallel, denn aus $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$ folgt $\lambda = -1$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ $\lightning$

c) $A(\vec{u})$, $A(\vec{p})$ sind parallel, denn $A(\vec{p}) = (-1) \cdot A(\vec{u})$,
$A(\vec{v})$, $A(\vec{w})$ sind parallel, denn $A(\vec{w}) = 4 \cdot A(\vec{w})$.

> **Anmerkung**
> Die folgenden zwei Sätze konnten leider nicht behandelt werden.

Satz: Sei A eine lineare Abbildung und $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und

$$g : \vec{s}(t) \; = \; t \cdot \vec{v} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.
a) Im Fall $\lambda = 1$ ist g eine Fixpunktgerade von A,
b) Im Fall $\lambda \neq 0$ ist g eine Fixgerade von A,
c) Im Fall $\lambda = 0$ wird die Gerade durch A auf den Nullvektor abgebildet.

Beweis: a) Ist $\vec{w} = t \cdot \vec{v}$ ein Vektor der Geraden, so folgt

$$A(\vec{w}) \; = \; A(t \cdot \vec{v}) \overset{\text{(L2)}}{=} t \cdot A(\vec{v}) \; = \; t \cdot 1 \cdot \vec{v} \; = \; \vec{w}.$$

b) Ist $\vec{w} = t \cdot \vec{v}$ ein Vektor der Geraden, so folgt

$$A(\vec{w}) \;=\; A(t \cdot \vec{v}) \;\overset{\text{(L2)}}{=}\; t \cdot A(\vec{v}) \;=\; t \cdot \lambda \cdot \vec{v} \;=\; (t\lambda) \cdot \vec{v}$$

$\Rightarrow$ $A(\vec{w})$ ist ein Vektor von g.

c) Ist $\vec{w} = t \cdot \vec{v}$ ein Vektor der Geraden, so folgt

$$A(\vec{w}) \;=\; A(t \cdot \vec{v}) \;\overset{\text{(L2)}}{=}\; t \cdot A(\vec{v}) \;=\; t \cdot 0 \cdot \vec{v} \;=\; \vec{0}. \quad \square$$

Satz: Sei A eine lineare Abbildung. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1) Ist $F(f_x \mid f_y)$ ein Fixpunkt von A und F nicht der Ursprung, so ist $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Abbildung A zum Eigenwert $\lambda = 1$. Die Gerade

$$g : \vec{s}(t) \;=\; t \cdot \vec{f} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ist dann eine Fixpunktgerade.

2) Ist

$$h : \vec{s}(t) \;=\; \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

eine Fixgerade, so ist $\vec{u}$ ein Eigenvektor von A.

Beweis: 1) Nach Voraussetzung gilt $A(\vec{f}) = \vec{f}$. Ist $\vec{w} = t \cdot \vec{f}$ ein Vektor der Geraden, so folgt

$$A(\vec{w}) \;=\; A(t \cdot \vec{f}) \;\overset{\text{(L2)}}{=}\; t \cdot A(\vec{f}) \;=\; t \cdot 1 \cdot \vec{f} \;=\; \vec{w}.$$

Somit werden alle Elemente der Geraden g von der Abbildung nicht verändert.

2) Da h eine Fixgerade ist, ist $A(\vec{p}) = A\big(\vec{s}(0)\big)$ ein Vektor der Geraden, und es gibt eine reelle Zahl t_1, so dass

$$A(\vec{p}) \;=\; \vec{p} + t_1 \cdot \vec{u}. \tag{$*$}$$

Für $t = 1$ gilt

$$A\big(\vec{s}(1)\big) \;=\; A\big(\vec{p} + 1 \cdot \vec{u}\big) \;\overset{\text{(L1)}}{=}\; A(\vec{p}) + A(1 \cdot \vec{u}) \;=\; A(\vec{p}) + A(\vec{u}).$$

Da $A\big(\vec{s}(1)\big)$ wieder ein Vektor von h ist, gibt es eine reelle Zahl t_2, so dass $A\big(\vec{s}(1)\big) = \vec{p} + t_2 \cdot \vec{u}$. Es folgt

$$A(\vec{p}) + A(\vec{u}) \;=\; \vec{p} + t_2 \cdot \vec{u}.$$

Nun setzt man $(*)$ ein und erhält

$$\vec{p} + t_1 \cdot \vec{u} + A(\vec{u}) \;=\; \vec{p} + t_2 \cdot \vec{u}.$$

Bringt man $\vec{p} + t_1 \cdot \vec{u}$ auf die rechte Seite, so folgt

$$A(\vec{u}) \;=\; \vec{p} + t_2 \cdot \vec{u} - (\vec{p} + t_1 \cdot \vec{u}) \;=\; (t_2 - t_1) \cdot \vec{u}.$$

Dies zeigt, dass $\vec{u}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = t_2 - t_1$ ist. $\square$

6 Unterrichtseinheit 6 - Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

6.1 Vorbemerkungen

Diese Einheit enthält sehr viel Stoff, im Präsenz-Seminar wurden einige Beweise weggelassen. Nur der Beweis zur Berechnung von Eigenvektoren wurde vorgeführt.

Die Reihenfolge wurde so gewählt, dass als Erstes Eigenvektoren einer Abbildung berechnet werden, für die der Eigenwert bereits bekannt ist, und erst danach die Berechnung von Eigenwerten behandelt wird. Der Grund dafür ist, dass das zugrunde liegende Gleichungssystem so auf eine natürliche Weise ins Spiel kommt und auf dieses dann der Satz über Determinanten und die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen angewandt werden kann. Bei den letzten beiden Aufgaben geht man dann in der normalen Reihenfolge vor, nämlich zunächst Berechnung der Eigenwerte der Abbildung und anschließend Bestimmung von Eigenvektoren.

Eigenvektoren werden hier als Kenngrößen von **Abbildungen** definiert, im Gegensatz zur Sprechweise, dass eine Matrix einen Eigenvektor besitzt. Für die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer linearen Abbildung A ist das zugehörige Matrix-Schema erforderlich.

6.2 Wiederholung

Vorgehen: Beide Aufgaben werden in Einzel- oder Partnerarbeit gelöst.

Aufgabe 6.1 (*Arbeitsblatt 6.1 (Eigenvektoren), Aufgabe 1*)

a) Gib die Eigenvektor-Gleichung für einen Eigenvektor $\vec{v}$ der linearen Abbildung A zum Eigenwert λ an.

b) Beschreibe, was bei der Abbildung eines Eigenvektors mit diesem geschieht.

c) Zeige, dass der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ist. Gib auch den zugehörigen Eigenwert an.

Lösung: **a)** $A(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$.

b) Der Eigenvektor behält seine Richtung und wird mit dem Eigenwert skaliert.

c) $A(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \; A(\vec{v}) = 4 \cdot \vec{v}$
$\Rightarrow \; \vec{v}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 4$.

Anmerkung
In der zweiten Aufgabe wird der Beweis des nächsten Satzes an mit konkreten Zahlen und ausführlicher Anleitung durchgeführt. Dadurch sollen die Schüler:innen dem Beweis leichter folgen können.

Aufgabe 6.2 (*Arbeitsblatt 6.1 (Eigenvektoren), Aufgabe 2*)

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
Die Abbildung A besitzt Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$. Fülle die Lücken in den Teilaufgaben und finde einen Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$.

a) Um einen Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$ zu berechnen, muss folgende Gleichung gelöst werden.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \boxed{2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

b) Nun wird die Matrix auf den Vektor angewandt. Die rechte Seite bleibt unverändert.

$$v_x \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}} \right) + v_y \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} \right) = \boxed{2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

c) Nun kann die rechte Seite geschickt umgeschrieben werden.

$$v_x \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}} \right) + v_y \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} \right) = v_x \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}} \right) + v_y \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}} \right).$$

d) Die Ausdrücke der rechten Seite auf beiden Seiten abziehen.

$$v_x \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}} \right) - v_x \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}} \right) + v_y \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} \right) - v_y \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Die Ausdrücke mit v_x bzw. mit v_y jeweils zusammenfassen.

$$v_x \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}} \right) + v_y \cdot \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

f) Die linke Seite als einen Vektor schreiben.

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 3v_x + 2v_y \\ 3v_x + 2v_y \end{matrix}} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

g) Damit die Gleichung aus f) gilt, müssen die folgenden zwei Gleichungen erfüllt sein.

(i) $\boxed{3v_x + 2v_y} = 0$ und (ii) $\boxed{3v_x + 2v_y} = 0$.

h) Die beiden Gleichungen sind $\boxed{\text{identisch}}$.

i) Errate eine Lösung und gib einen Eigenvektor an. $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}} \right)$.

Lösung: Ist bereits im Aufgabentext enthalten

6.3 Eigenvektoren

Vorgehen: In dieser Einheit werden Eigenvektoren durchgehend mit derselben Farbe geschrieben.

Tafelanschrieb

VI. Eigenvektoren und Eigenwerte

1. Eigenvektoren berechnen

Satz: Ist ein Eigenwert λ einer linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ bekannt, so erhält man die zugehörigen Eigenvektoren als Lösung der Gleichung

$$\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. äquivalent

$$v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x - \lambda \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

D.h. man bestimmt Lösungen v_x, v_y des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & (a_x - \lambda)\, v_x + b_x\, v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & a_y\, v_x + (b_y - \lambda)\, v_y & = & 0 \end{array}$$

Mündlich: Diese Gleichungen sehen sehr kompliziert aus, da viele Variablen drin vorkommen. Wenn wir Eigenvektoren berechnen, dann sind $a_x - \lambda, a_y, b_x, b_y - \lambda$ einfach nur Zahlen, und das Gleichungssystem sieht viel einfacher aus, zum Beispiel so wie in der letzten Aufgabe.

Vorgehen: Der Stern zur Markierung der zweiten Gleichung wird erst nachträglich eingefügt, wenn am Ende des Beweises auf diese Gleichung verwiesen wird.

> **Anmerkung**
> Man kann darüber nachdenken, nur die Gleichungen (i) und (ii) in die Satzaussage aufzunehmen und die ersten beiden Gleichungen wegzulassen. Es ist jedoch wichtig, dass die erste Gleichung mit der Matrix dabei ist. Einerseits wollen wir als Lösungen Vektoren und keine Zahlenpaare erhalten. Andererseits wird genau dieselbe Matrix nachher bei der Berechnung der Eigenwerte benötigt.

Tafelanschrieb

Beweis:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \text{(Eigenvektorgleichung)} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - v_x \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} - v_y \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x - \lambda \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & (*) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.3 (*Arbeitsblatt 6.2 (Berechnung von Eigenvektoren), Aufgabe 3*)

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 8$.

a) Berechne alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Gehe hierzu folgendermaßen vor:

a₁) Setze die gegebenen Daten für $a_x, a_y, b_x, b_y, \lambda$ in die Gleichungen (i) und (ii) aus dem letzten Satz ein.

(i) $\boxed{2}\, v_x + \boxed{-3}\, v_y = 0$

(ii) $\boxed{-2}\, v_x + \boxed{3}\, v_y = 0$

a₂) Löse jede der beiden Gleichungen nach v_x auf. Was beobachtest Du?

(i) $\Leftrightarrow \boxed{2}\, v_x = \boxed{3}\, v_y \Leftrightarrow v_x = \boxed{\frac{3}{2} v_y}$

(ii) $\Leftrightarrow \boxed{-2}\, v_x = \boxed{-3}\, v_y \Leftrightarrow v_x = \boxed{\frac{3}{2} v_y}$

Beobachtung: Es ergibt sich dieselbe Gleichung

a₃) Gib einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ an, dessen Koordinaten die Gleichungen (i) und (ii) erfüllen.

Hinweis: Du kannst z.B. für v_y eine Zahl wählen und dann v_x berechnen.

$\vec{v} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$

a₄) Gib alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ an, deren Koordinaten die Gleichungen (i) und (ii) erfüllen.

Hinweis: Es ist geschickt, $v_y = 2s$ zu setzen, wobei s alle reellen Zahlen durchläuft.

$\vec{v} =$ $s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit beliebigem $s \in \mathbb{R}$

a₅) Welche der Vektoren aus der letzten Teilaufgabe sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$?

Alle Vektoren $\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit beliebigem $s \in \mathbb{R}$ und $s \neq 0$

b) Berechne entsprechend alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$.

Lösung: **b)** Löse

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & -3v_x - 3v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & -2v_x - 2v_y & = & 0 \end{array}$$

Multipliziert man die Gleichung (i) mit $\frac{2}{3}$, so ergibt sich die zweite Gleichung. Also besitzen beide Gleichungen dieselben Lösungen. Man sagt: Die Gleichungen sind äquivalent.

Alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$ sind gegeben durch

$$\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit beliebigem } s \in \mathbb{R} \text{ und } s \neq 0.$$

6.4 Eigenwerte

Tafelanschrieb

2. Determinanten

Satz: Gegeben seien a_x, a_y, b_x, b_y. Gesucht sind alle Lösungen x, y des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mündlich: Genau diese Fragestellung haben wir bei der Berechnung von Eigenvektoren. Wir suchen Vektoren, die so eine Gleichung lösen und nicht der Nullvektor sind.

Tafelanschrieb

bzw. äquivalent

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & a_x\,v_x + b_x\,v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & a_y\,v_x + b_y\,v_y & = & 0 \end{array}.$$

1) Im Fall $a_x b_y - a_y b_x = 0$ besitzt das Gleichungssystem die Lösungen

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ -a_x \end{pmatrix} \qquad \text{mit } s \in \mathbb{R}.$$

2) Im Fall $a_x b_y - a_y b_x \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem nur die Lösung $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Anmerkung

Die Formulierung dieses Satzes suggeriert, dass im Fall 1) nichttriviale Lösungen existieren. Aber im Fall $a_x = b_x = 0$ muss man das noch extra hinschreiben (siehe unten). Der Satz ist völlig korrekt, aber nicht ausreichend für die Folgerung, dass nichttriviale Lösungen existieren. Dies bräuchte man eigentlich für den Beweis am Ende dieser Einheit. Andererseits kann man sich im Unterricht gut auf den angegebenen Fall beschränken.

Ergänzung zum Satz: Sei $a_x = b_x = 0$ vorausgesetzt. Im Fall $a_y \neq 0$ oder $b_y \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem die nichttrivialen Lösungen

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} b_y \\ -a_y \end{pmatrix} \qquad \text{mit } s \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $a_y = b_y = 0$ besteht das Gleichungssystem nur aus zwei Nullzeilen. Dann sind alle Vektoren Lösungen.

Tafelanschrieb

Beweis: 1) Einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & a_x\,(sb_x) + b_x\,(-sa_x) & = & 0 \quad \checkmark \\ \text{(ii)} & a_y\,(sb_x) + b_y\,(-sa_x) & = & s(\underbrace{a_y b_x - b_y a_x}_{=0}) \;=\; 0 \quad \checkmark \end{array}$$

2) Wegen $a_x b_y - a_y b_x \neq 0$ muss $a_x \neq 0$ oder $a_y \neq 0$ gelten.

Fall $a_x \neq 0$: (i) $\Rightarrow\; a_x\, v_x = -b_x\, v_y \;\Rightarrow\; v_x = -\dfrac{b_y}{a_x}\, v_y$

In (ii) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & a_y \cdot \left(-\frac{b_y}{a_x}\, v_y\right) + b_y\, v_y = 0 \\ \Rightarrow\; & -a_y b_x\, v_y + a_x b_y\, v_y = 0 \\ \Rightarrow\; & v_y \cdot (\underbrace{-a_y b_x + a_x b_y}_{\neq 0}) = 0 \\ \Rightarrow\; & v_y = 0 \\ \Rightarrow\; & v_x = -\frac{b_y}{a_x}\, 0 = 0 \\ \Rightarrow\; & \begin{pmatrix} v_x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fall $a_x = 0$: Dann muss $a_y \neq 0$ gelten und man kann (ii) nach v_x auflösen. Rest wie im anderen Fall. $\square$

Tafelanschrieb

Definition: Die Determinante $\det(A)$ einer linearen Abbildung ist definiert durch

$$\det(A) \;=\; \det\left(\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}\right) \;=\; a_x b_y - a_y b_x.$$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$

Wegen $\det(A) \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem $A(\vec{v}) = \vec{0}$ die einzige Lösung $\vec{v} = \vec{0}$.

Aufgabe 6.4 (*Arbeitsblatt 6.3 (Determinanten), Aufgabe 4*)

In jeder Teilaufgabe ist eine lineare Abbildung A mit dem angegebenen Matrix-Schema gegeben. Bestimme jeweils die Determinante $\det(A)$ und gib alle Lösungen der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ an.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, **c)** $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Lösung: **a)** $\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0$; nach dem Satz sind alle Lösungen der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ gegeben.

b) $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 0 = -2 \neq 0$; nach dem Satz besitzt die Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ genau die eine Lösung $\vec{v} = \vec{0}$.

c) $\det\left(\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = (-2)\cdot 0 - 7\cdot 0 = 0$; nach dem Satz sind alle Lösungen der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ durch $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}7\\ 2\end{pmatrix}$ mit $s\in\mathbb{R}$ gegeben.

Auf dem Übungsblatt 6.3 steht vor den nächsten Aufgaben der folgende Text.

Die folgenden beiden Aufgaben behandeln die geometrische Bedeutung der Determinante. Der Wert der Determinante einer linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix}a_x & b_x\\ a_y & b_y\end{bmatrix}$ gibt bis auf Vorzeichen den Flächeninhalt des Parallelogramms an, welches durch die Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_x\\ b_y\end{pmatrix}$ aufgespannt wird (siehe grünes Parallelogramm in der letzten Aufgabe).

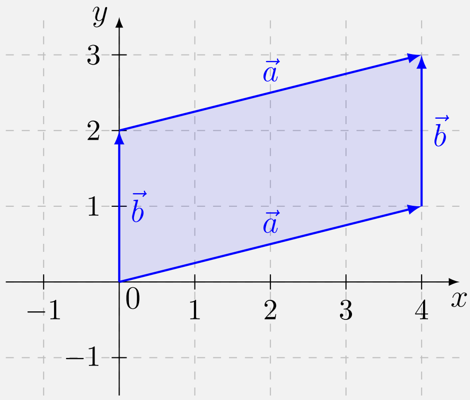
Aufgabe 6.5 (*Arbeitsblatt 6.3 (Determinanten), Aufgabe 5*)

a) Gegeben ist $A = \begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

a$_1$) Berechne die Determinante von A.

a$_2$) Zeichne die Standard-Pfeile der Spaltenvektoren von A in das Koordinatensystem ein und das von ihnen aufgespannte Parallelogramm.

a$_3$) Berechne den Flächeninhalt des gezeichneten Parallelogramms mit der aus der Schule bekannten Formel („Grundseite Mal Höhe“). Wähle die Grundseite geschickt, so dass die passende Höhe leicht abzulesen ist.



b) Nun sei $B = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$.

b$_1$) Beschreibe den Unterschied zwischen den Matrizen von A und von B.

b$_2$) Berechne die Determinante von B. Was beobachtest Du?

Lösung: **a)** **a$_1$)** $\det\left(\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right) = 4\cdot 2 - 1\cdot 0 = 8$

a$_2$) Siehe Graphik oben.

a$_3$) Nimmt man die Strecke von $(0 \mid 0)$ nach $(0 \mid 2)$ als Grundseite, dann ist die Höhe $h = 4$. Die Fläche des Parallelogramms ist $F = 2\cdot 4 = 8$.

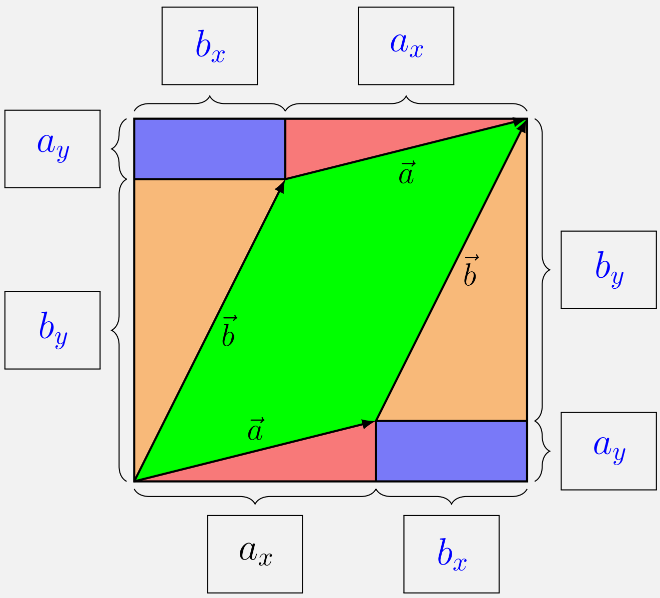
b) **b$_1$)** Die Spalten sind vertauscht.

b$_2$) $\det\left(\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right) = 1\cdot 0 - 4\cdot 2 = -8 = -\det(A)$.
Vertauscht man die Spalten, so wird die Determinante mit -1 multipliziert.

Aufgabe 6.6 (*Arbeitsblatt 6.3 (Determinanten), Aufgabe 6*)

Wir betrachten eine allgemeine lineare Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ mit den Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.

a) Trage in der Graphik die fehlenden Werte in die Kästchen ein.



b) Berechne in Abhängigkeit von a_x, a_y, b_x, b_y:

b₁) Den Flächeninhalt des gesamten großen Rechtecks. Bitte Klammern ausmultiplizieren.

b₂) Den Flächeninhalt der beiden blauen Rechtecke zusammen.

b₃) Den Flächeninhalt der beiden roten Dreiecke zusammen.

b₄) Den Flächeninhalt der beiden orangen Dreiecke zusammen.

b₅) Den Flächeninhalt des grünen Parallelogramms, indem du vom Flächeninhalt des großen Rechtecks die Flächeninhalte der eingezeichneten Dreiecke und Rechtecke abziehst.

c) Vergleiche Dein Ergebnis mit der Formel für die Determinante von A.

Lösung: **a)** Siehe Graphik

b) **b$_1$)** $F_{\text{Rechteck}} = (a_x + b_x) \cdot (a_y + b_y) = a_x a_y + a_x b_y + b_x a_y + b_x b_y$.

b$_2$) $F_{\text{blau}} = 2 a_y b_x$,

b$_3$) $F_{\text{rot}} = a_x a_y$,

b$_4$) $F_{\text{orange}} = b_x b_y$,

b$_5$) $$F_{\text{grün}} = a_x a_y + a_x b_y + b_x a_y + b_x b_y - 2a_y b_x - a_x a_y - b_x b_y = a_x b_y + b_x a_y - 2 a_y b_x = a_x b_y - b_x a_y.$$

c) Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist gleich dem Wert der Determinante.

Tafelanschrieb

3. Eigenwertberechnung

Definition: Das charakteristische Polynom P_A einer linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ ist definiert durch

$$P_a(\lambda) \;=\; \det\left(\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix}\right).$$

Satz: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms P_A sind genau die Eigenwerte von A.

Beweis: $P_A(\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix}\right) \;=\; 0$$

$$\overset{\text{voriger Satz}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ besitzt mindestens eine Lösung } \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{erster Satz}}{\Leftrightarrow} \quad \text{Die Lösung } \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda. \qquad \square$$

Anmerkung

Für die Schüler:innen sind die Variable λ und die Funktion P_A sehr ungewohnt. Daher sollte man ein paar Worte darüber verlieren. Z.B. Aus der Schule kannst Du Funktionen f, die von einer Variablen x abhängen. Hier heißt die Funktion P_A an Stelle von f. Man schreibt den Buchstaben P, weil die Funktion ein Polynom ist, wie wir nachher sehen werden, und im Index A, weil Sie zur Abbildung A gehört. Für verschiedene Abbildungen A ist das Polynom im Allgemeinen verschieden. Und die Variable heißt λ an Stelle von x. Das hat sich so eingebürgert, weil man für Eigenwerte die Bezeichnung λ verwendet.

Tafelanschrieb

Beispiel: Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 1 \\ &= 12 - 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Es ist P_A ein quadratisches Polynom.

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-10}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$.

Die Abbildung A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \dfrac{10}{2} = 5$ und $\lambda_2 = \dfrac{4}{2} = 2$.

EVen zum EW $\lambda_1 = 5$: Löse

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & -2v_x + v_y = 0 \\ \text{(ii)} & 2v_x - v_y = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; (s \in \mathbb{R},\, s \neq 0).$$

EVen zum EW $\lambda_2 = 2$: Löse

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & v_x + v_y = 0 \\ \text{(ii)} & 2v_x + 2v_y = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; (s \in \mathbb{R},\, s \neq 0).$$

Aufgabe 6.7 (*Arbeitsblatt 6.4 (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren), Aufgabe 7*)

a) Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berechne das charakteristische Polynom P_A, gib alle Eigenwerte von A an und bestimme zu jedem der Eigenwerte einen Eigenvektor.

b) Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Berechne das charakteristische Polynom P_B. Was kannst Du über Eigenwerte von B aussagen?

Lösung: **a)**
$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^2 - 4 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 4) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Satz vom Nullprodukt $\Rightarrow$ A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 4$.

EVen zum EW $\lambda_1 = 0$: Löse

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & 2v_x + 4v_y &=& 0 \\ \text{(ii)} & v_x + 2v_y &=& 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$) sind alle EVen zum EW λ_1.

EVen zum EW $\lambda_2 = 4$: Löse

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & -2v_x + 4v_y &=& 0 \\ \text{(ii)} & v_x - 2v_y &=& 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$) sind alle EVen zum EW λ_2.

b) $P_B(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(4-\lambda)^2 + 6 = 4 - 5\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 10$

$P_B(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-40}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{-15}}{2}$

$\Rightarrow$ B hat keine Eigenwerte.

Mündlich: Bei der Besprechung darauf hinweisen, dass man für so ein spezielles Polynom **nie** die Mitternachtsformel oder p-q-Formel verwendet. Dies erzeugt nur Fehler. Dasselbe gilt auch für die nächste Aufgabe.

Aufgabe 6.8 (*Arbeitsblatt 6.4 (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren), Aufgabe 8*)

a) Gegeben ist eine Abbildung D mit dem Matrix-Schema

$$D = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix}.$$

Eine Matrix dieser Form heißt **obere Dreiecksmatrix**. Für diese Aufgabe wird $a_x \neq b_y$ vorausgesetzt.

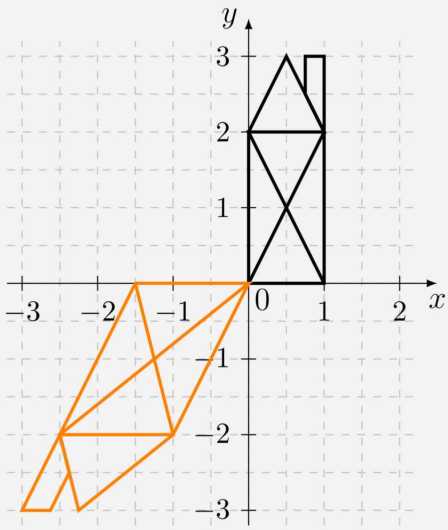
a₁) Berechne das charakteristische Polynom P_D in Abhängigkeit von a_x, b_x, b_y.
Hinweis: Hier ist es sinnvoll, Klammern nicht auszumultiplizieren. Für die nächste Teilaufgabe kann dann der Satz vom Nullprodukt verwendet werden.

a₂) Gib die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 von D in Abhängigkeit von a_x, b_x, b_y an.

b) Gegeben ist die Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet. Wir hatten bereits den Eigenwert $\lambda_1 = -\dfrac{3}{2}$ mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmt. Gib den zweiten Eigenwert λ_2 von A an und bestimme einen zugehörigen Eigenvektor.



Lösung: **a)** **a₁)** $P_D(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ 0 & b_y - \lambda \end{bmatrix}\right) = (a_x - \lambda)(b_y - \lambda) - 0 = (a_x - \lambda)(b_y - \lambda)$

a₂) $P_D(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = a_x$ oder $\lambda_2 = b_y$
$\Rightarrow\;$ D besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = a_x$ und $\lambda_2 = b_y$

b) Die Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix. Also gilt $\lambda_2 = b_y = -1$.

EVen zum EW $\lambda_2 = -1$: Löse

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & -\frac{1}{2}\,v_x - \frac{1}{2}\,v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & 0\,v_x + 0\,v_y & = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow\;\vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$) sind alle EVen zum EW λ_2.

6.5 Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 6.9 (*Arbeitsblatt 6.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 9*)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Trage „w" oder „f" ein.

Aussage	w/f
Null kann Eigenwert einer linearen Abbildung sein.	
Der Nullvektor kann Eigenvektor einer linearen Abbildung sein.	
Ist die Determinante einer Matrix Null, dann hat sie Null als Eigenwert.	
Es gibt lineare Abbildungen, die keinen Eigenwert besitzen.	
Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, dann ist $t \cdot \vec{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $t\lambda$	
Die Determinante einer Matrix ist immer nichtnegativ.	
Jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist Eigenwert von A.	
Die Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ hat immer genau eine Lösung.	
Ist $\vec{v}$ eine Lösung der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$, dann ist auch $t \cdot \vec{v}$ mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Gleichung.	
Eine Abbildung mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ besitzt maximal zwei Eigenwerte.	
Ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, so ist jeder Vektor außer dem Nullvektor ein Eigenvektor von A.	

Aufgabe 6.10 (*Arbeitsblatt 6.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 10*)

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die Determinate $\det(A) = \boxed{}$.

b) Gib alle Lösungen der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ an.

$\boxed{}$.

c) Gib einen Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 0$ an. $\vec{v} = \boxed{}$.

Aufgabe 6.11 (*Arbeitsblatt 6.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 11*)

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Gib das charakteristische Polynom an. Multipliziere alle Klammern aus.

$P_A = \boxed{}$.

b) Berechne die Eigenwerte von A. $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$.

c) Gib zum Eigenwert λ_1 die Gleichungen (i) und (ii) zur Berechnung der Eigenvektoren an.

(i) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$ (ii) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$

d) Gib alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_1 an. $\vec{v} = \boxed{}$.

e) Gib zum Eigenwert λ_2 die Gleichungen (i) und (ii) zur Berechnung der Eigenvektoren an.

(i) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$ (ii) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$

f) Gib alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_2 an. $\vec{v} = \boxed{}$.

Aufgabe 6.12 (*Arbeitsblatt 6.5 (Schriftliche Aufgaben), Aufgabe 12*)

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Gib das charakteristische Polynom an. Multipliziere die Klammern nicht aus!

$P_A = \boxed{}$.

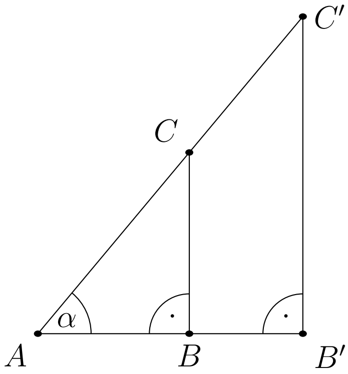
b) Gib die Eigenwerte von A an. $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$.

c) Gib alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_1 an. $\vec{v} = \boxed{}$.

d) Gib alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_2 an. $\vec{v} = \boxed{}$.

7 Anhang 1: Trigonometrie – Skript mit Lösungen

1. Sinus und Cosinus am Dreieck



Die Dreicke ABC und $AB'C'$ sind ähnlich, also gilt:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$
$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Diese Verhältnisse sind bei allen zu ABC ähnlichen Dreiecken gleich und hängen nur vom Winkel α ab.

Für rechtwinklige Dreiecke definiert man Abkürzungen für die Seitenverhältnisse.

Definition: In einem Dreieck ABC mit Winkel $\beta = 90°$ definiert man

Sinus: $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} =: \sin(\alpha)$$

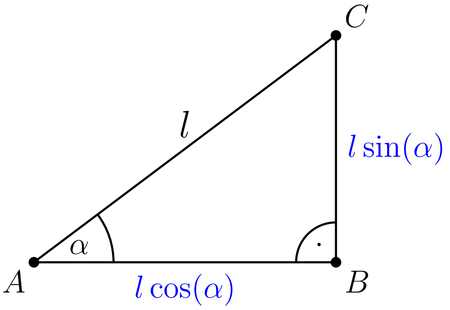
Cosinus: $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} =: \cos(\alpha)$$

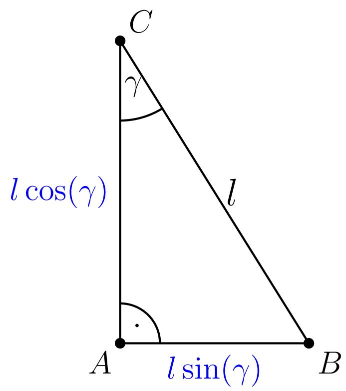
Merke: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

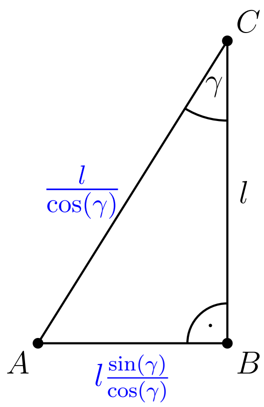
Aufgabe 1

Bei den folgenden Dreiecken ist eine der Seitenlängen l wie angegeben. Schreibe jeweils an die anderen beiden Seiten die Länge in Abhängigkeit von l und dem Sinus bzw. Cosinus des angegebenen Winkels. Achtung: Beim Dreieck ganz rechts ist eine der Kathetenlängen gegeben.

Lösung:

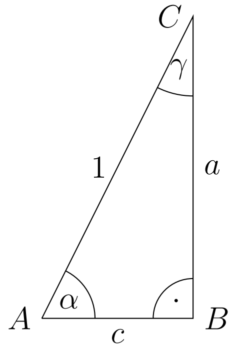






Satz: Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gelten:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & \sin(90^\circ - \alpha) & = & \cos(\alpha) \\ 2) & \cos(90^\circ - \alpha) & = & \sin(\alpha) \\ 3) & \big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 & = & 1 \end{array}$$



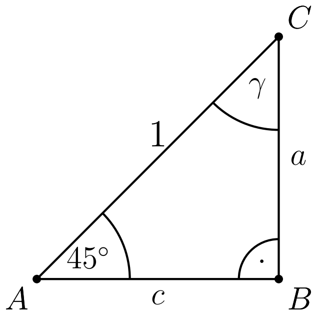
Beweis: Siehe nebenstehende Zeichnung.
$\alpha + 90^\circ + \gamma = 180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 90^\circ - \alpha$
$c = \cos(\alpha) = \sin(\gamma) \overset{\gamma = 90^\circ - \alpha}{\Rightarrow}$ 1)
$a = \sin(\alpha) = \cos(\gamma) \overset{\gamma = 90^\circ - \alpha}{\Rightarrow}$ 2)
Pythagoras $\Rightarrow\; a^2 + c^2 = 1^2 \;\Rightarrow\; \big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1 \;\Rightarrow$ 3) $\square$

Satz: Folgende Werte für Sinus und Cosinus können exakt angegeben werden:

α	30°	45°	60°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Beweis: 1) Aufgrund der Winkelsumme im Dreieck gilt $\gamma = 45^\circ$. Also ist das Dreieck gleichschenklig, es gilt $c = a$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$a^2 + a^2 = 1^2, \text{ also } a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

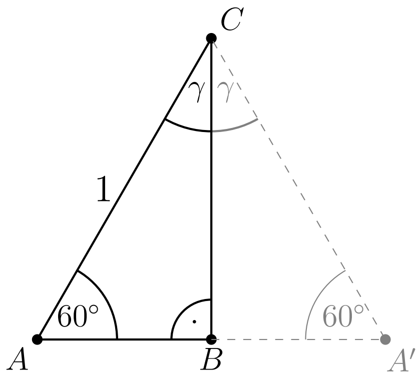


Nach der Definition von Sinus und Kosinus gilt

$$\sin(45^\circ) \;=\; \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(45^\circ) \;=\; \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) $60^\circ + 90^\circ + \gamma = 180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 30^\circ$
$\Rightarrow$ im Dreieck $AA'C$ misst der dritte Winkel ebenfalls 60°.
Also haben alle Seiten des Dreiecks $AA'C$ die Länge 1.

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{1}{2},$$
$$\overline{BC} \overset{\text{Pythagoras}}{=} \sqrt{1 - \overline{AB}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

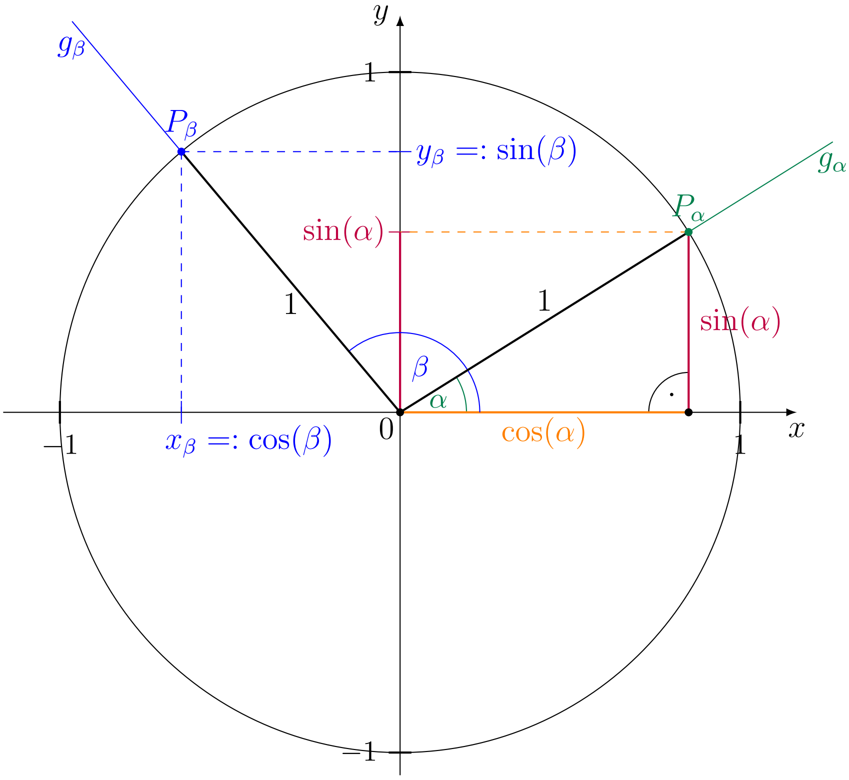


Nach der Definition von Sinus und Kosinus gilt

$$\begin{array}{lcl} \sin(60^\circ) & = & \frac{\overline{BC}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(60^\circ) \;=\; \frac{\overline{AB}}{1} = \frac{1}{2}. \\ \sin(30^\circ) & = & \frac{\overline{AB}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \cos(30^\circ) \;=\; \frac{\overline{BC}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \;\square \end{array}$$

2. Sinus und Cosinus für beliebige Winkel

Satz: Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ sei g_α die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Dann hat der Schnittpunkt P_α von g_α mit dem Einheitskreis die Koordinaten $(x_\alpha \mid y_\alpha)$ mit $x_\alpha = \cos(\alpha)$, $y_\alpha = \sin(\alpha)$.



Definition: Für beliebige Winkel β sei g_β die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel β im Gegenuhrzeigersinn entsteht (für $\beta < 0^\circ$ Drehung mit Winkel $-\beta$ im Uhrzeigersinn). $P_\beta(x_\beta \mid y_\beta)$ sei der Schnittpunkt des Einheitskreises mit g_β. Man definiert

$$\sin(\beta) \;:=\; y_\beta, \qquad \cos(\beta) \;:=\; x_\beta.$$

Bemerkung: Nun sind $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für beliebige Winkel α definiert. Nach dem letzten Satz stimmt diese Definition für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ mit der alten Definition überein.

Folgerung: $\big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1$ für alle Winkel α, denn der Punkt $P_\alpha\big(\cos(\alpha) \mid \sin(\alpha)\big)$ liegt auf dem Einheitskreis.

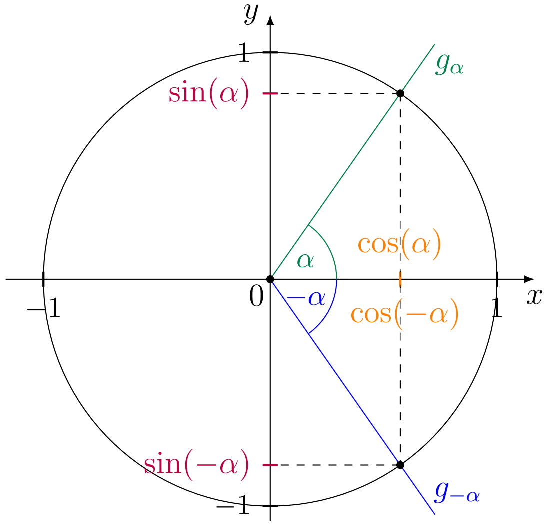
Merktabelle exakter Werte für Sinus und Cosinus:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Satz: Für beliebige Winkel α gelten:

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & \sin(360^\circ + \alpha) & = & \sin\alpha \\
2) & \cos(360^\circ + \alpha) & = & \cos\alpha \\
3) & \sin(-\alpha) & = & -\sin(\alpha) \\
4) & \cos(-\alpha) & = & \cos(\alpha)
\end{array}
$$

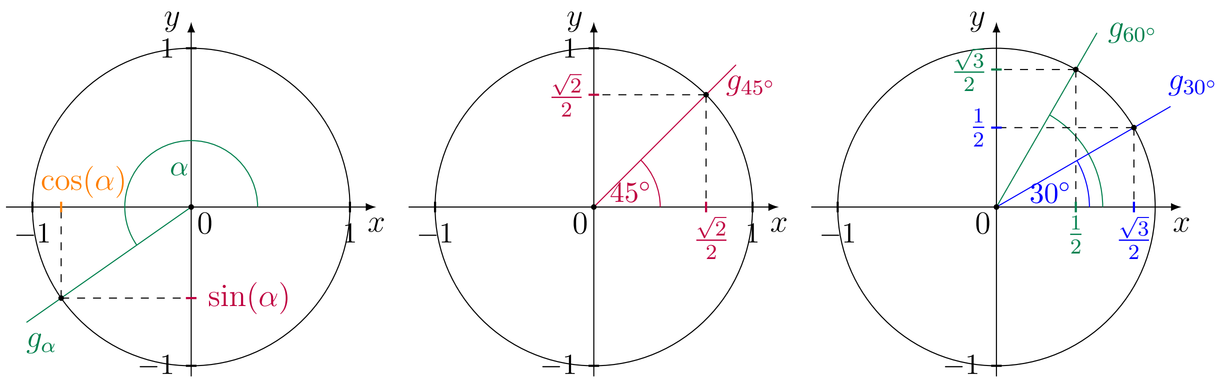
Beweis: 1), 2) klar. Zu 3), 4):



□

Aufgabe 2

Zur Erinnerung sind in den drei folgenden Einheitskreisen die Definition von Sinus und Cosinus und die Werte für spezielle Winkel eingezeichnet, die bereits früher berechnet wurden.



Fülle die folgenden Tabellen aus. Trage exakte Werte ein.

Lösung: **a)**

α	0°	90°	180°	270°	360°	450°	-90°	-180°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0	1	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1	0	0	-1

b)

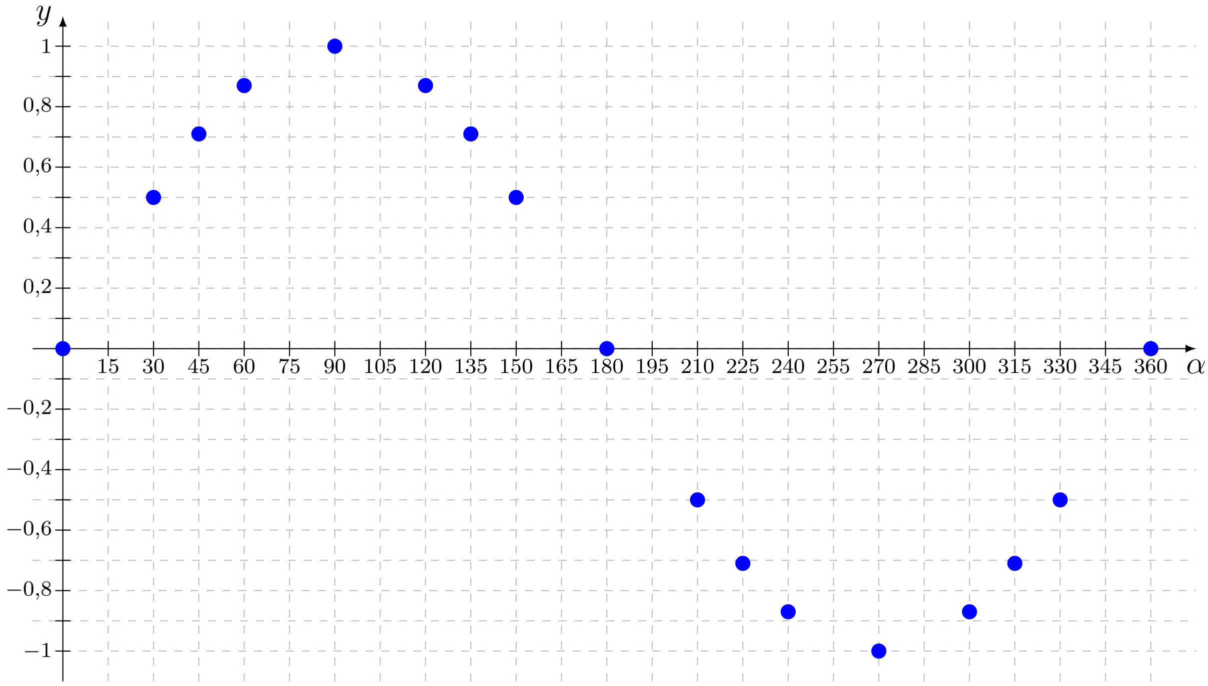
α	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 3

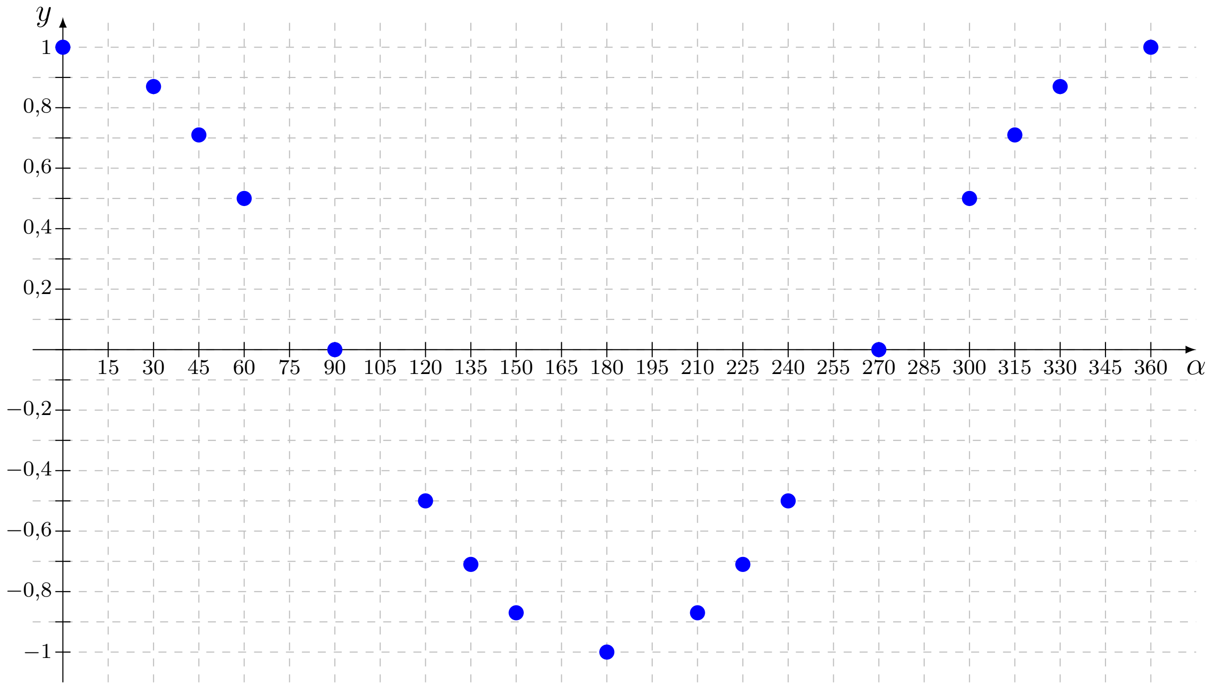
In der letzten Aufgabe wurden die Werte von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für spezielle Winkel α bestimmt.

a) Zeichne für jeden dieser Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ den Punkt $(\alpha \mid \sin(\alpha))$ in das Koordinatensystem ein.

Hinweis: $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.



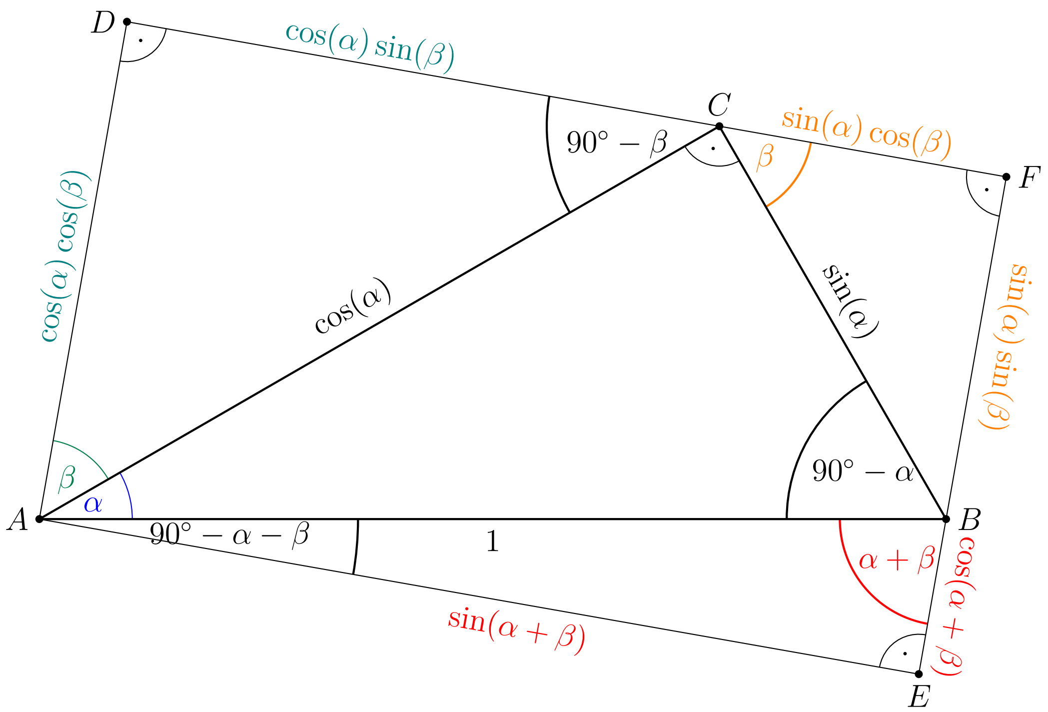
b) Zeichne für jeden dieser Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ den Punkt $(\alpha \mid \cos(\alpha))$ in das Koordinatensystem ein.



3. Die Additionstheoreme

Aufgabe 4

Gegeben sind zwei Winkel α, β mit $0 < \alpha + \beta < 90°$. Das Ziel dieser Aufgabe ist, die Werte von $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ geometrisch aus den Werten von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und $\cos(\beta)$ zu bestimmen. Hierzu wird zunächst ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hypothenusenlänge 1 und dem gegebenen Winkel α beim Punkt A gezeichnet. Beachte, dass der Winkel beim Punkt B im Allgemeinen nicht mit dem gegebenen Winkel β übereinstimmt. Zu diesem Dreieck wird wie in der Zeichnung dargestellt ein Rechteck konstruiert, so dass die Seite AD mit der Dreiecksseite AC den gegebenen Winkel β einschließt und die Dreieckspunkte B, C auf den Rechteckseiten liegen.



a) Wie berechnet sich der Winkel bei B im Dreieck ABC aus dem Winkel α?

b) Gib jeweils die Größe des orange eingezeichneten und des rot eingezeichneten Winkels in Abhängigkeit von α, β an und schreibe die Ergebnisse in die Zeichnung.

c) Schreibe an jede der Strecken die Länge als Funktion von α, β.

Da die gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks $AEFD$ gleich lang sind, folgt

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) + \cos(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Lösung: Siehe oben stehende Graphik.

Satz: Für beliebige Winkel α, β gelten die **Additionstheoreme**

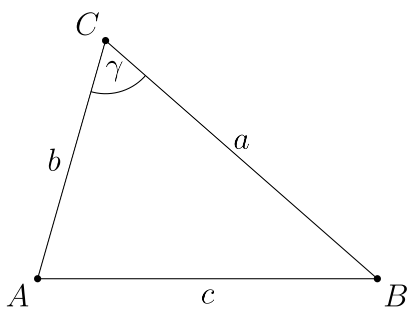
$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \end{aligned}$$

4. Sinussatz und Cosinussatz

Aufgabe 5

Der **Cosinussatz** besagt: In jedem Dreieck ABC gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma). \qquad (1)$$



Hierbei sind für a, b, c die Längen der entsprechend bezeichneten Seiten einzusetzen, γ bezeichnet den von den Seiten a, b eingeschlossenen Winkel.

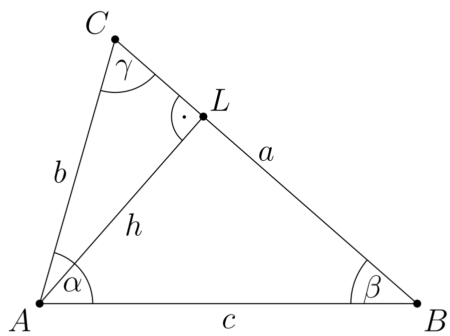
a) Sei $\gamma = 90°$. Zu welcher Gleichung wird (1) in diesem Fall? Wie heißt der entsprechende Satz?

$\cos(90°) = 0 \ \Rightarrow$ (1) wird zu $a^2 + b^2 = c^2$.
Das ist der Satz des Pythagoras.

b) Gegeben ist ein Dreieck durch $a = 4$cm, $b = 3$cm und $\gamma = 60°$. Berechne die Seitenlänge c.

$c^2 = 25 - 24\cos(60°) = 25 - 12 = 13 \ \Rightarrow \ c = \sqrt{13} \approx 3{,}61.$

c) Nun gelte $0° < \alpha, \beta, \gamma < 90°$. Wenn Du die folgenden Teilaufgaben löst, beweist Du den Cosinussatz. In dem neben stehend skizzierten Dreieck sind dazu bereits das Lot h von A auf die Seite a und der Lotfußpunkt L eingezeichnet.



c₁) Drücke die Länge $\overline{LC}$ durch b und γ aus.

$\overline{LC} =$ $b\cos(\gamma)$.

c₂) Welche Gleichung ergibt der Satz des Pythagoras für das Dreieck ALC?

$h^2 + \overline{LC}^2 = b^2$.

c₃) Welche Gleichung ergibt der Satz des Pythagoras für das Dreieck ABL?

$\overline{BL}^2 + h^2 = c^2$.

c₄) Ersetze in der Gleichung aus c₃) $\overline{BL}^2$ durch $(a - \overline{LC})^2$ und quadriere aus.

$a^2 - 2a\overline{LC} + \overline{LC}^2 + h^2 = c^2$.

c₅) Vereinfache die Gleichung aus c₅) durch Verwendung von c₃).

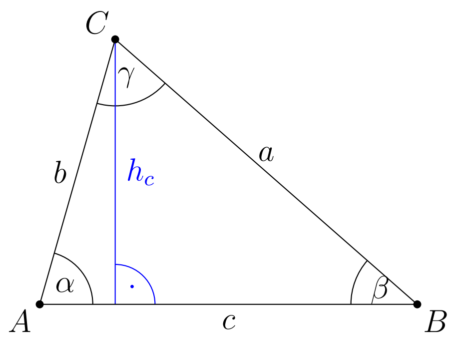
$a^2 - 2a\overline{LC} + b^2 = c^2$.

c₆) Setze das Ergebnis von c₂) in die letzte Gleichung ein. Welche Gleichung folgt?

$a^2 - 2ab\cos(\gamma) + b^2 = c^2$.

Aufgabe 6

Es sei ein Dreieck ABC mit $0 < \alpha, \beta, \gamma < 90°$ gegeben.



a) **a₁)** Zeichne die Höhe h_c auf c ein.

a₂) Drücke die Länge von h_c durch a und β aus.

$h_c = a\sin(\beta)$.

a₃) Drücke die Länge von h_c durch b und α aus.

$h_c = b\sin(\alpha)$.

a₄) Welche Beziehung zwischen a, b, α, β folgt hieraus?

$a\sin(\beta) = b\sin(\alpha)$.

b) Führe die entsprechenden Schritte für die Höhe h_b auf b durch. Welche Beziehung zwischen a, c, α, γ folgt hieraus?

$h_b = c\sin(\alpha) = a\sin(\gamma)$.

c) Welche Beziehung für die Quotienten $\frac{a}{\sin(\alpha)}, \frac{b}{\sin(\beta)}, \frac{c}{\sin(\gamma)}$ folgt aus a) und b)? Diese Beziehung heißt **Sinussatz**.

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

d) Gegeben ist ein Dreieck durch die Angaben $a = 5\text{cm}$, $\alpha = 50°$ und $\beta = 60°$. Berechne den Winkel γ und die Längen der Seiten b und c (Taschenrechner erforderlich).

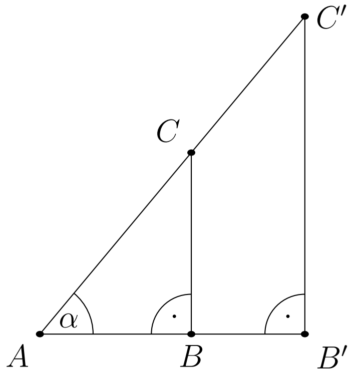
$\gamma =$ $180° - 50° - 60° = 70°$.

Länge von b: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow b = \frac{a\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 5\frac{\sin(60°)}{\sin(50°)} \approx 5{,}65\text{cm}$.

Länge von c: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Rightarrow c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 5\frac{\sin(70°)}{\sin(50°)} \approx 6{,}13\text{cm}$.

8 Anhang 2: Trigonometrie – Mitschreibeskript

1. Sinus und Cosinus am Dreieck



Die Dreicke ABC und $AB'C'$ sind ähnlich, also gilt:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Diese Verhältnisse sind bei allen zu ABC ähnlichen Dreiecken gleich und hängen nur vom Winkel α ab.

Für rechtwinklige Dreiecke definiert man Abkürzungen für die Seitenverhältnisse.

Definition: In einem Dreieck ABC mit Winkel $\beta = 90°$ definiert man

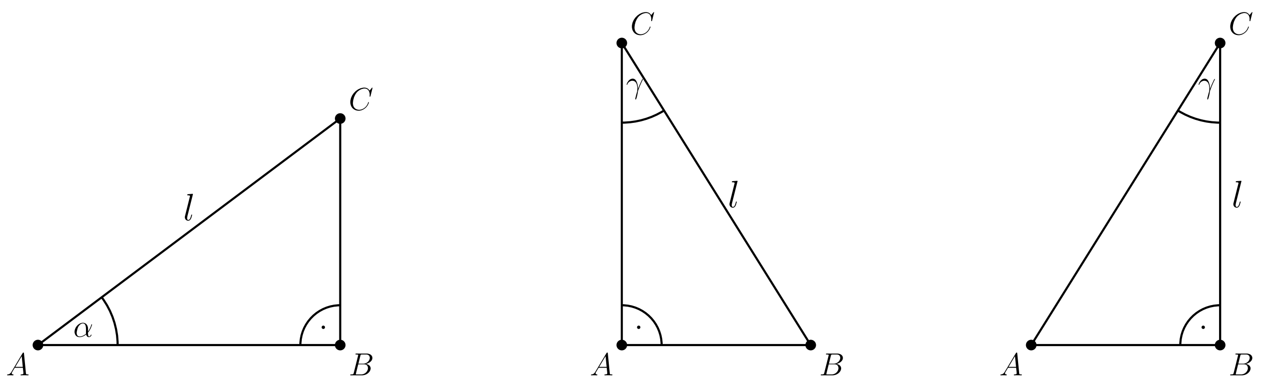
$$\textbf{Sinus:} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} =: \sin(\alpha)$$

$$\textbf{Cosinus:} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} =: \cos(\alpha)$$

Merke: $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Aufgabe 1

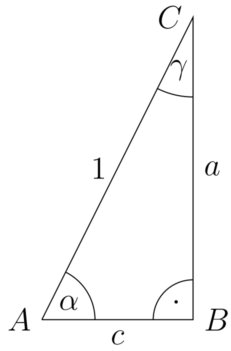
Bei den folgenden Dreiecken ist eine der Seitenlängen l wie angegeben. Schreibe jeweils an die anderen beiden Seiten die Länge in Abhängigkeit von l und dem Sinus bzw. Cosinus des angegebenen Winkels. Achtung: Beim Dreieck ganz rechts ist eine der Kathetenlängen gegeben.



Satz: Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gelten:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & \sin(90^\circ - \alpha) & = & \cos(\alpha) \\ 2) & \cos(90^\circ - \alpha) & = & \sin(\alpha) \\ 3) & \big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 & = & 1 \end{array}$$

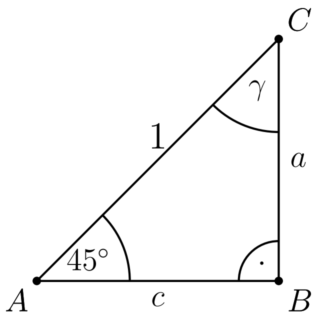
Beweis: Siehe nebenstehende Zeichnung.



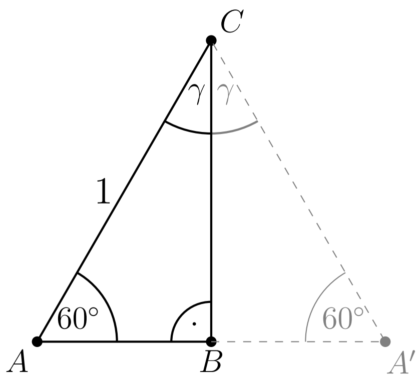
Satz: Folgende Werte für Sinus und Cosinus können exakt angegeben werden:

α	30°	45°	60°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Beweis: 1)

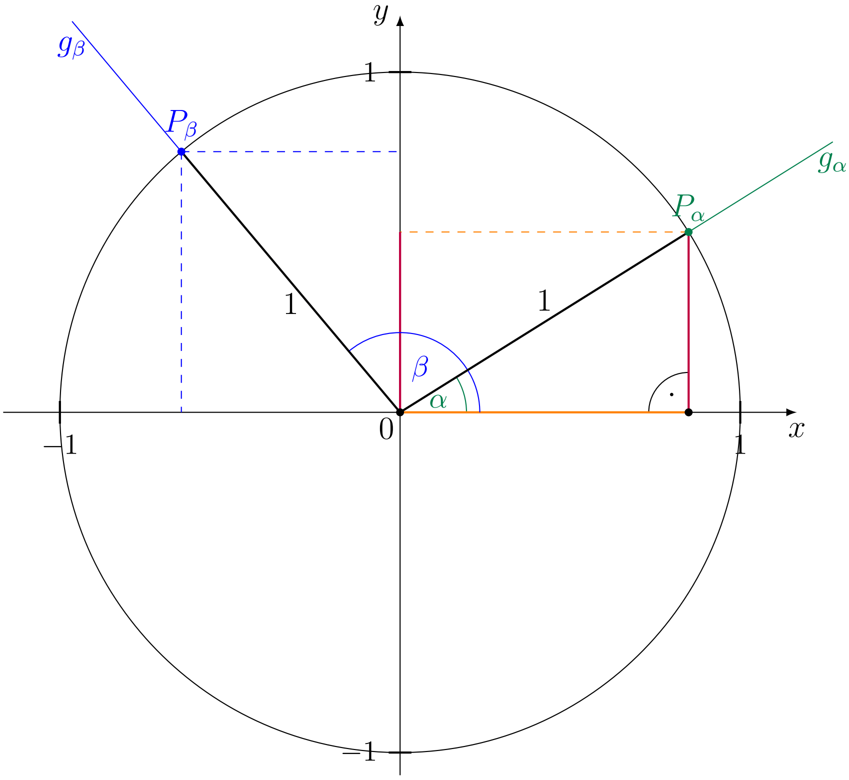


2)



2. Sinus und Cosinus für beliebige Winkel

Satz: Für $0° < \alpha < 90°$ sei g_α die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Dann hat der Schnittpunkt P_α von g_α mit dem Einheitskreis die Koordinaten $(x_\alpha \mid y_\alpha)$ mit $x_\alpha = \cos(\alpha)$, $y_\alpha = \sin(\alpha)$.



Definition: Für beliebige Winkel β sei g_β die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel β im Gegenuhrzeigersinn entsteht (für $\beta < 0°$ Drehung mit Winkel $-\beta$ im Uhrzeigersinn). $P_\beta(x_\beta \mid y_\beta)$ sei der Schnittpunkt des Einheitskreises mit g_β. Man definiert

$$\sin(\beta) \;:=\; y_\beta, \qquad \cos(\beta) \;:=\; x_\beta.$$

Bemerkung: Nun sind $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für beliebige Winkel α definiert. Nach dem letzten Satz stimmt diese Definition für $0° < \alpha < 90°$ mit der alten Definition überein.

Folgerung: $\big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1$ für alle Winkel α, denn der Punkt $P_\alpha\big(\cos(\alpha) \mid \sin(\alpha)\big)$ liegt auf dem Einheitskreis.

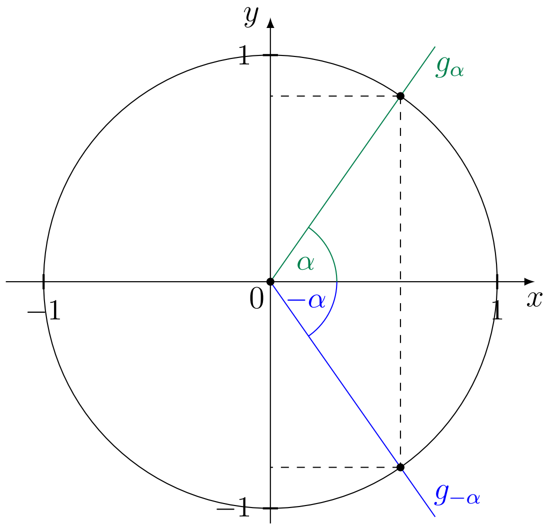
Merktabelle exakter Werte für Sinus und Cosinus:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Satz: Für beliebige Winkel α gelten:

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & \sin(360^\circ+\alpha) & = & \sin\alpha \\
2) & \cos(360^\circ+\alpha) & = & \cos\alpha \\
3) & \sin(-\alpha) & = & -\sin(\alpha) \\
4) & \cos(-\alpha) & = & \cos(\alpha)
\end{array}
$$

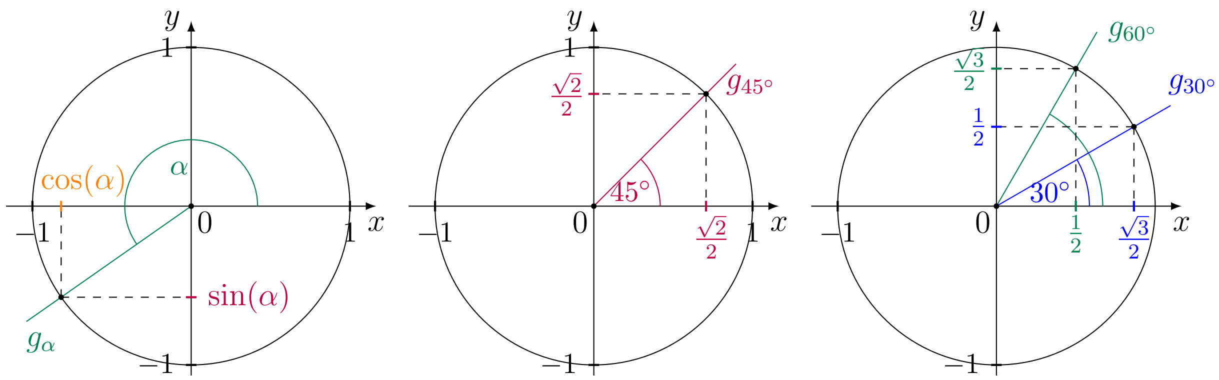
Beweis: 1), 2) klar. Zu 3), 4):



□

Aufgabe 2

Zur Erinnerung sind in den drei folgenden Einheitskreisen die Definition von Sinus und Cosinus und die Werte für spezielle Winkel eingezeichnet, die bereits früher berechnet wurden.



Fülle die folgenden Tabellen aus. Trage exakte Werte ein.

a)

α	0°	90°	180°	270°	360°	450°	-90°	-180°
$\sin(\alpha)$								
$\cos(\alpha)$								

b)

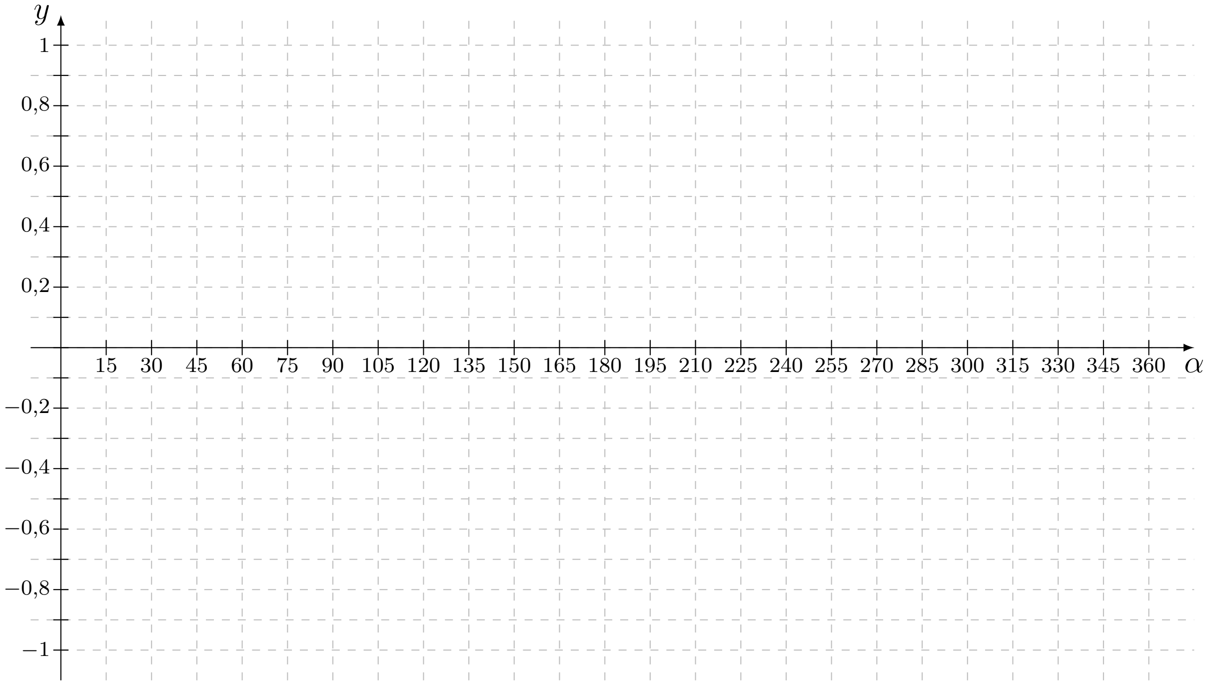
α	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
$\sin(\alpha)$												
$\cos(\alpha)$												

Aufgabe 3

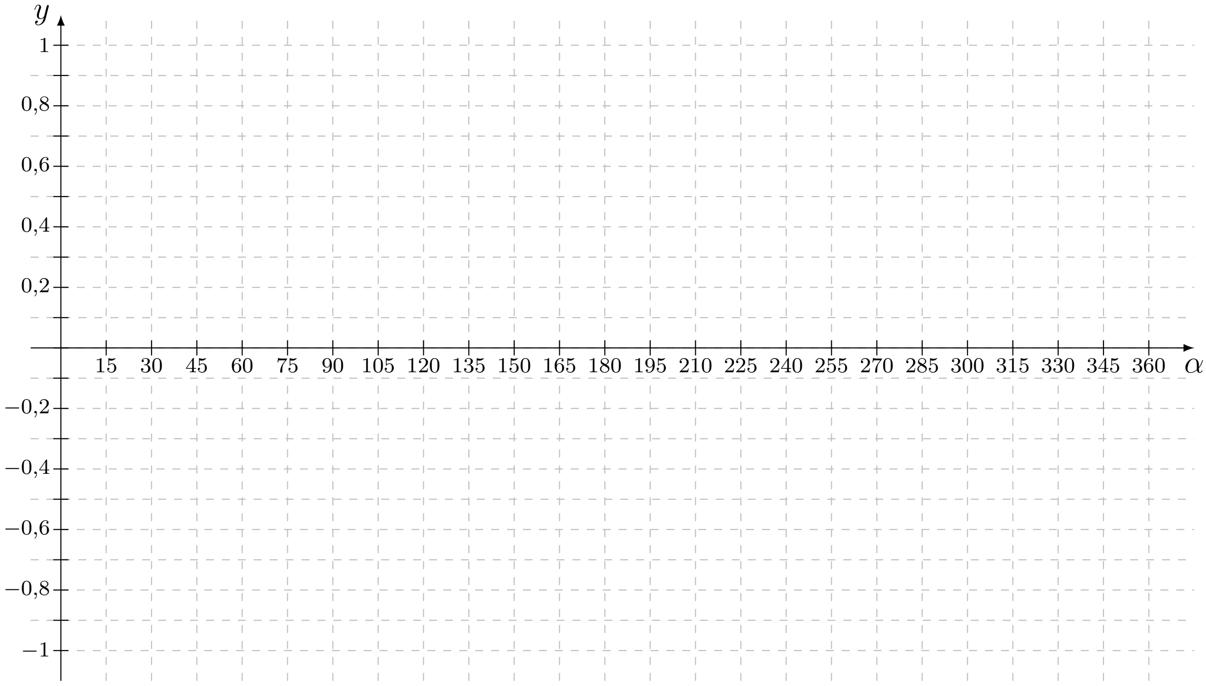
In der letzten Aufgabe wurden die Werte von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für spezielle Winkel α bestimmt.

a) Zeichne für jeden dieser Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ den Punkt $(\alpha \mid \sin(\alpha))$ in das Koordinatensystem ein.

Hinweis: $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.



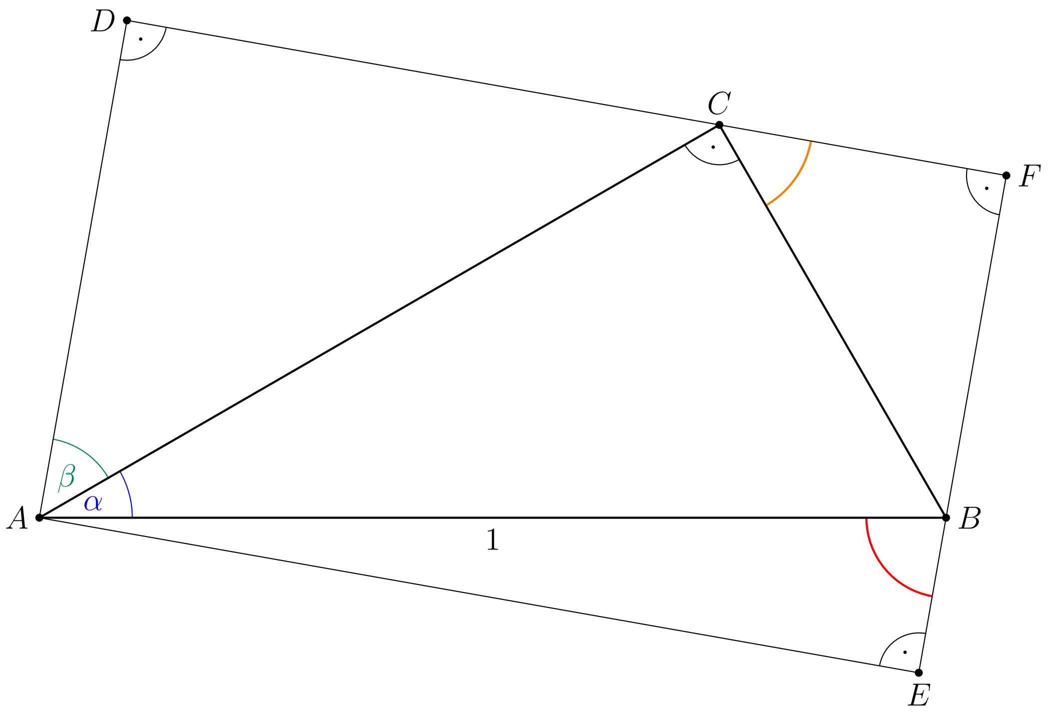
b) Zeichne für jeden dieser Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ den Punkt $(\alpha \mid \cos(\alpha))$ in das Koordinatensystem ein.



3. Die Additionstheoreme

Aufgabe 4

Gegeben sind zwei Winkel α, β mit $0 < \alpha + \beta < 90°$. Das Ziel dieser Aufgabe ist, die Werte von $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ geometrisch aus den Werten von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und $\cos(\beta)$ zu bestimmen. Hierzu wird zunächst ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hypothenusenlänge 1 und dem gegebenen Winkel α beim Punkt A gezeichnet. Beachte, dass der Winkel beim Punkt B im Allgemeinen nicht mit dem gegebenen Winkel β übereinstimmt. Zu diesem Dreieck wird wie in der Zeichnung dargestellt ein Rechteck konstruiert, so dass die Seite AD mit der Dreiecksseite AC den gegebenen Winkel β einschließt und die Dreieckspunkte B, C auf den Rechteckseiten liegen.



a) Wie berechnet sich der Winkel bei B im Dreieck ABC aus dem Winkel α?

b) Gib jeweils die Größe des orange eingezeichneten und des rot eingezeichneten Winkels in Abhängigkeit von α, β an und schreibe die Ergebnisse in die Zeichnung.

c) Schreibe an jede der Strecken die Länge als Funktion von α, β.

Da die gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks $AEFD$ gleich lang sind, folgt

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) =$$

Satz: Für beliebige Winkel α, β gelten die **Additionstheoreme**

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

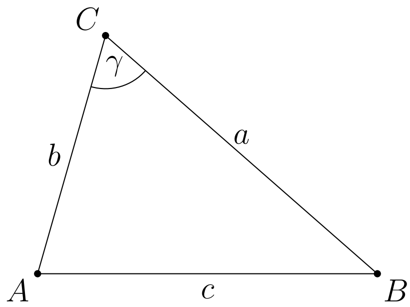
$$\cos(\alpha + \beta) =$$

4. Sinussatz und Cosinussatz

Aufgabe 5

Der **Cosinussatz** besagt: In jedem Dreieck ABC gilt

$$c^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma). \qquad (1)$$

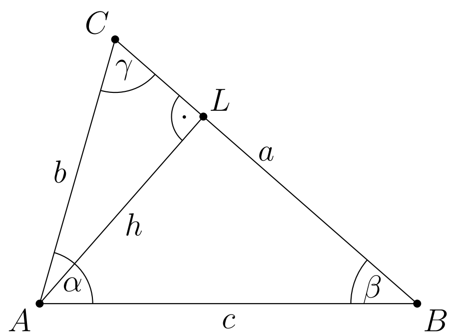


Hierbei sind für a, b, c die Längen der entsprechend bezeichneten Seiten einzusetzen, γ bezeichnet den von den Seiten a, b eingeschlossenen Winkel.

a) Sei $\gamma = 90°$. Zu welcher Gleichung wird (1) in diesem Fall? Wie heißt der entsprechende Satz?

b) Gegeben ist ein Dreieck durch $a = 4$cm, $b = 3$cm und $\gamma = 60°$. Berechne die Seitenlänge c.

c) Nun gelte $0° < \alpha, \beta, \gamma < 90°$. Wenn Du die folgenden Teilaufgaben löst, beweist Du den Cosinussatz. In dem neben stehend skizzierten Dreieck sind dazu bereits das Lot h von A auf die Seite a und der Lotfußpunkt L eingezeichnet.



c₁) Drücke die Länge $\overline{LC}$ durch b und γ aus.

$\overline{LC} =$

c₂) Welche Gleichung ergibt der Satz des Pythagoras für das Dreieck ALC?

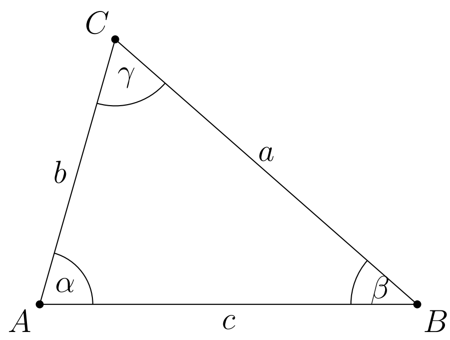
c₃) Welche Gleichung ergibt der Satz des Pythagoras für das Dreieck ABL?

c₄) Ersetze in der Gleichung aus c₃) $\overline{BL}^2$ durch $(a - \overline{LC})^2$ und quadriere aus.

c₅) Vereinfache die Gleichung aus c₅) durch Verwendung von c₃).

c₆) Setze das Ergebnis von c₂) in die letzte Gleichung ein. Welche Gleichung folgt?

Aufgabe 6



Es sei ein Dreieck ABC mit $0 < \alpha, \beta, \gamma < 90°$ gegeben.

a) **a$_1$)** Zeichne die Höhe h_c auf c ein.

a$_2$) Drücke die Länge von h_c durch a und β aus.

a$_3$) Drücke die Länge von h_c durch b und α aus.

a$_4$) Welche Beziehung zwischen a, b, α, β folgt hieraus?

b) Führe die entsprechenden Schritte für die Höhe h_b auf b durch. Welche Beziehung zwischen a, c, α, γ folgt hieraus?

c) Welche Beziehung für die Quotienten $\frac{a}{\sin(\alpha)}, \frac{b}{\sin(\beta)}, \frac{c}{\sin(\gamma)}$ folgt aus a) und b)? Diese Beziehung heißt **Sinussatz**.

Sinussatz:

d) Gegeben ist ein Dreieck durch die Angaben $a = 5\text{cm}$, $\alpha = 50°$ und $\beta = 60°$. Berechne den Winkel γ und die Längen der Seiten b und c (Taschenrechner erforderlich).

$\gamma =$

Länge von b:

Länge von c:

9 Heftaufschrieb

Einheit 1

Hier wurde Arbeitsblatt 1.1 (Trigonometrische Grundlagen) ausgegeben.

I. Vektoren

1. Definition von Vektoren

Definition: 1) Ein Vektor $\vec{v}$ ist eine Verschiebungsvorschrift in der Ebene.

Hier wurde Arbeitsblatt 1.2 (Definition von Vektoren) ausgegeben.

2) Vektoren kann man durch ihre Pfeile darstellen. Ist v_x die Verschiebung in x-Richtung, v_y die Verschiebung in y-Richtung, so schreibt man

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

3) Die Menge aller Vektoren bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2$.

4) Derjenige Pfeil des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, der im Ursprung $(0 \mid 0)$ startet, heißt Standard-Pfeil von $\vec{v}$. Er zeigt auf den zu $\vec{v}$ gehörenden Punkt $(v_x \mid v_y)$.

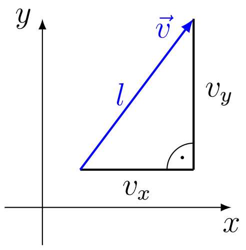
2. Norm von Vektoren

Definition: Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Die Norm von $\vec{v}$ definiert man durch

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Satz: Die Norm des Vektors $\vec{v}$ entspricht der Länge jedes seiner Pfeile.

Beweis:



Pythagoras: $l^2 = v_x^2 + v_y^2$
$\Rightarrow \ l = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \|\vec{v}\|$

$\square$

3. Rechnen mit Vektoren

Definition: 1) Addition zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$

2) Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 6 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Hier wurde Arbeitsblatt 1.3 (Rechenoperationen - Geometrische Interpretation) ausgegeben.

Hier wurde Arbeitsblatt 1.4 (Rechenoperationen und Norm) ausgegeben.

4. Skalarprodukt und Winkel

Definition: Das Skalarprodukt von $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} := v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y.$$

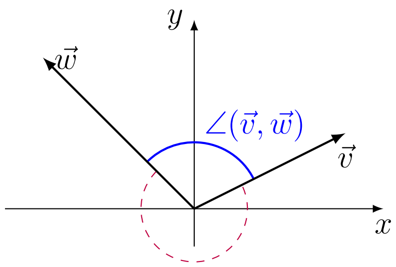
Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 5$

Hilfssatz: $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

Beweis:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y \\ &= v_x^2 + v_y^2 \\ &= \|\vec{v}\|^2 \qquad \square \end{aligned}$$

Definition: Seien $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$.

1) Der Winkel $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist das Minimum der eingeschlossenen Winkel ihrer Standard-Pfeile.



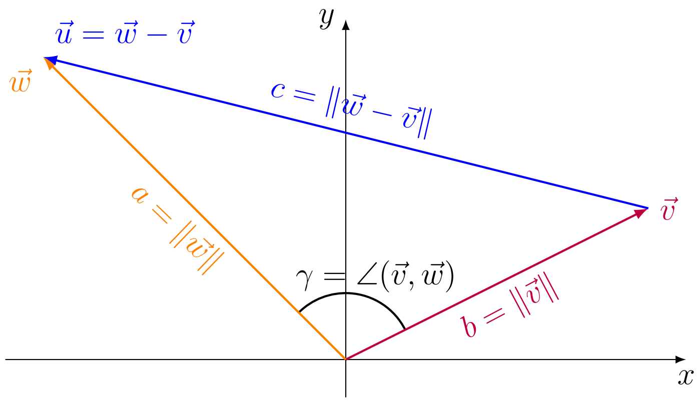
Es gilt also $0° \leq \angle(\vec{v}, \vec{w}) \leq 180°$

2) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen orthogonal, falls $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90°$.

Satz (Skalarprodukt-Winkel-Formel): Seien $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Dann

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\left(\angle(\vec{v}, \vec{w})\right).$$

Beweis:



Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} = (\vec{w} - \vec{v}) \bullet (\vec{w} - \vec{v}) \\ &= \vec{w} \bullet \vec{w} - \vec{v} \bullet \vec{w} - \vec{w} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} \\ &= \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \bullet \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

In die Gleichung des Cosinussatzes eingesetzt:

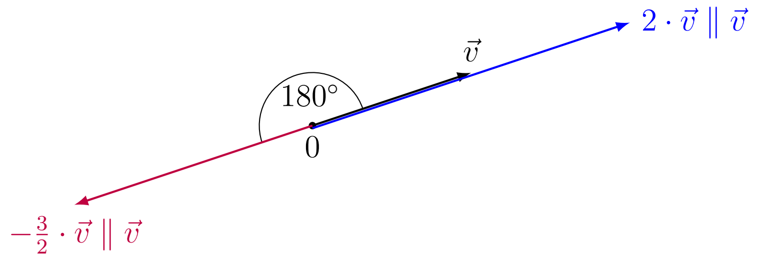
$$\begin{array}{rrcl} & \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \bullet \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 & = & \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow & -2\vec{v} \bullet \vec{w} & = & -2\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow & \vec{v} \bullet \vec{w} & = & \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \qquad \square \end{array}$$

Spezialfall: $\vec{v}, \vec{w}$ orthogonal
$\Leftrightarrow \ \angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90°$
$\Leftrightarrow \ \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$ und $\vec{v}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hier wurde Arbeitsblatt 1.5 (Winkel zwischen Vektoren) ausgegeben.

Definition: Zwei Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ heißen parallel, falls $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 0°$ oder $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 180°$ gilt. Schreibe $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

Bemerkung: $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt.



Einheit 2

Hier wurde Arbeitsblatt 2.1 (Darstellung von Geraden) ausgegeben.

5. Geraden

Definition: Eine Gerade g ist festgelegt durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man schreibt

$$g: \quad \vec{s}(t) \ = \ \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Durch $\vec{s}(t)$ sind alle zu Geradenpunkten gehörenden Vektoren gegeben.

Hier wurde Arbeitsblatt 2.2 (Geraden) ausgegeben.

II. Drehungen

1. Lineare Abbildungen und Matrizen

Wir betrachten Abbildungen (Funktionen) von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Eine solche Abbildung A ordnet also jedem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ wieder einen Vektor $A(\vec{v}) \in \mathbb{R}^2$ zu, den Abbildungswert.

Beispiel: $A(\vec{v}) = A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x + 6v_y \\ 3v_x \end{pmatrix}$.
Z.B. $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \end{pmatrix}$

Definition: Ist eine Abbildung A von der Form

$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{a} + v_y \cdot \vec{b}$$

mit festen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, dann nennt man A linear.

Beispiel: Die Abbildung A des letzten Beispiels ist linear:

$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x + 6v_y \\ 3v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x \\ 3v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6v_y \\ 0 \end{pmatrix} = v_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + v_y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

Definition: Eine lineare Abbildung ist durch die beiden Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt. Man schreibt die Vektoren in ein Schema, um A anzugeben:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a} \; \vec{b} \end{bmatrix}.$$

Dieses Schema heißt Matrix.

Im obigen Beispiel $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Z.B. $A\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -3 \end{pmatrix}$

Hier wurde Arbeitsblatt 2.3 (Lineare Abbildungen und Matrizen) ausgegeben.

Satz: Ist $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, so gelten

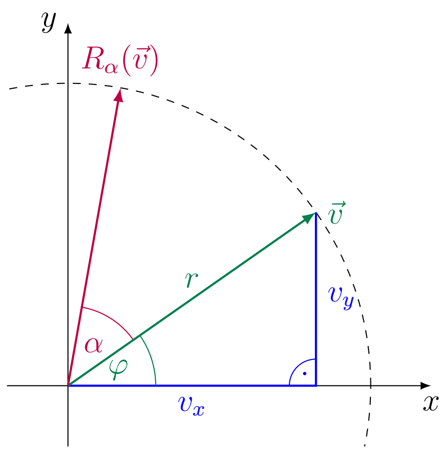
(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$

für beliebige $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis: Letzte Aufgabe.

2. Drehungen

Sei α ein beliebiger Winkel und R_α die Abbildung, die jeden Vektor $\vec{v}$ um α dreht.
Damit meinen wir im Folgenden immer, dass der zugehörige Standard-Pfeil von $\vec{v}$ um α im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung gegedreht wird.



$$\cos(\varphi) = \frac{v_x}{r} \Rightarrow v_x = r\cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{v_y}{r} \Rightarrow v_y = r\sin(\varphi)$$

Also $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ (∗)

$$\begin{aligned}
\text{Analog}\quad R_\alpha(\vec{v}) &= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\alpha) \\ r\sin(\varphi+\alpha) \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Additionstheoreme}}{=} \begin{pmatrix} r\big(\cos(\varphi)\cos(\alpha) - \sin(\varphi)\sin(\alpha)\big) \\ r\big(\cos(\varphi)\sin(\alpha) + \sin(\varphi)\cos(\alpha)\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\alpha) - r\sin(\varphi)\sin(\alpha) \\ r\cos(\varphi)\sin(\alpha) + r\sin(\varphi)\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} v_x\cos(\alpha) - v_y\sin(\alpha) \\ v_x\sin(\alpha) + v_y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_x\cos(\alpha) \\ v_x\sin(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_y\sin(\alpha) \\ v_y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= v_x \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Satz: R_α ist eine lineare Abbildung und es gilt

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Hier wurde Arbeitsblatt 2.4 (Drehungen) ausgegeben.

Einheit 3

Zur Wiederholung wurde Arbeitsblatt 3.1 (Winkel, Geraden, lineare Abbildungen) ausgegeben.

Hier wurde Arbeitsblatt 3.2 (Geradenspiegelung) ausgegeben und die Vektoren eingezeichnet.

III. Geradenspiegelung

1. Berechnung von $\vec{w}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|} \;\Leftrightarrow\; \|\vec{w}\| = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{v}\|$$

Skalarprodukt-Winkel-Formel:

$$\vec{v}\bullet\vec{u} = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{v}\bullet\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \cos(\alpha)\cdot\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \|\vec{w}\|\cdot \underbrace{\frac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\vec{u}}_{\text{Vektor der Länge } 1} = \frac{\vec{v}\bullet\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u}$$

Definition: $\vec{w}$ heißt Projektion des Vektors $\vec{v}$ auf g.

Hier wurden die Berechnungen auf Arbeitsblatt 3.2 gemeinsam durchgeführt.

2. Berechnung von $S_g(\vec{v})$:

$$\begin{aligned}
S_g(\vec{v}) &= \vec{v} + 2\cdot\vec{d} = \vec{v} + 2\cdot(\vec{w}-\vec{v}) \\
&= 2\cdot\vec{w} - \vec{v} = 2\cdot\frac{\vec{v}\bullet\vec{u}}{\|u\|^2}\cdot\vec{u} - \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{v} \\
&= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\left(2\cdot\vec{v}\bullet\vec{u}\cdot\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} - \|\vec{u}\|^2\cdot\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 2(v_x u_x + v_y u_y) u_x - (u_x^2 + u_y^2) v_x \\ 2(v_x u_x + v_y u_y) u_y - (u_x^2 + u_y^2) v_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{2} v_x u_x^2 + 2 v_y u_y u_x - \cancel{u_x^2 v_x} - u_y^2 v_x \\ 2 v_x u_x u_y + \cancel{2} v_y u_y^2 - u_x^2 v_y - \cancel{u_y^2 v_y} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \cdot \begin{pmatrix} (u_x^2 - u_y^2) v_x + 2 v_y u_y u_x \\ 2 v_x u_x u_y + (u_y^2 - u_x^2) v_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} v_x + \frac{2 u_y u_x}{u_x^2 + u_y^2} v_y \\ \frac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} v_x + \frac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} v_y \end{pmatrix}$$

$$= v_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + v_y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

$\Rightarrow$ S_g ist linear, $S_g = \begin{bmatrix} \frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} & \frac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} & \frac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{bmatrix}$

Beispiel: Für die Gerade g mit $\vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{4-1}{4+1} & \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{4+1} \\ \ldots & -\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$S_g \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} + \frac{36}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{27}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{5} \\ \frac{-15}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hier wurde Arbeitsblatt 3.3 ausgegeben.

Einheit 4

Zur Wiederholung wurde Arbeitsblatt 4.1 (Verschiedene lineare Abbildungen) ausgegeben.

IV. Fixpunkt, Fixgerade, Streckung

1. Geradentreue

Satz: Seien A eine lineare Abbildung und g eine Gerade. Die Menge der Abbildungswerte der Vektoren der Geraden bildet eine Gerade oder sie besteht aus einem einzigen Vektor.

Beweis: Sei

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R}.)$$

Es folgt

$$A\big(\vec{s}(t)\big) = A\big(\vec{p} + t \cdot \vec{u}\big) = A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}).$$

Im Fall $A(\vec{u}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildet die Menge aller Abbildungswerte eine Gerade.

Im Fall $A(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $A\big(\vec{s}(t)\big) = A(\vec{p})$. Die Menge aller Abbildungswerte enthält genau ein Element, nämlich den Vektor $A(\vec{p})$. $\square$

Hier wurde Arbeitsblatt 4.2 (Spiegelung) ausgegeben.

2. Fixpunkt und Fixgerade

Definition: Sei A eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

1) Ein Punkt $P(v_x \mid v_y)$ heißt Fixpunkt von A, wenn der zugehörige Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ von A unverändert gelassen wird. D.h. es gilt $A(\vec{v}) = \vec{v}$.
2) Eine Gerade heißt Fixpunktgerade, wenn alle ihre Punkte Fixpunkte sind.
3) Eine Gerade g heißt Fixgerade von A, wenn sie durch A wieder auf sich abgebildet wird. Jede Fixpunktgerade ist eine Fixgerade, aber die Umkehrung gilt nicht.

Beispiele: 1) Die Spiegelung an einer Geraden g besitzt die Fixpunktgerade g. Alle Geraden, die senkrecht auf g stehen, sind Fixgeraden, aber keine Fixpunktgeraden.

2) Ist A eine lineare Abbildung, so ist $(0 \mid 0)$ ein Fixpunkt, denn

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Eine Drehung um $(0 \mid 0)$ mit Winkel $0° < \alpha < 360°$ hat nur den Fixpunkt $(0 \mid 0)$.

Hier wurde Arbeitsblatt 4.3 (Fixpunkt und Fixgerade) ausgegeben.

3. Streckungen

Definition: Sei k eine positive reelle Zahl außer 1. Die lineare Abbildung Z mit der Matrix

$$Z = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

heißt zentrische Streckung, k heißt Streckfaktor.

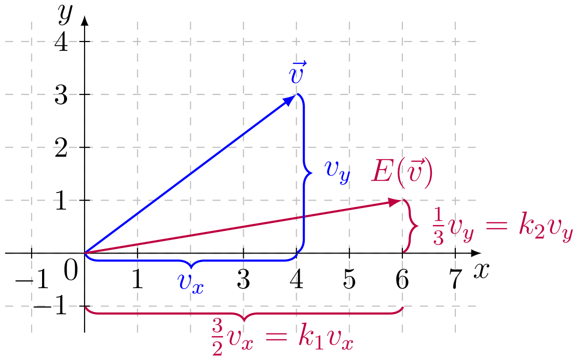
Hier wurde Arbeitsblatt 4.4 (Zentrische Streckung) ausgegeben.

Definition: Seien k_1, k_2 verschiedene positive reelle Zahlen. Die lineare Abbildung E mit der Matrix

$$E = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

heißt Eulerabbildung.

Beispiel: $E = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Hier wurde Arbeitsblatt 4.5 (Eulerabbildungen) ausgegeben.

Einheit 5

Nach einer Wiederholung wurde Arbeitsblatt 5.1 (Geraden, Matrizen) bearbeitet.

V. Geometrische Veranschaulichung linearer Abbildungen

1. Geometrische Bedeutung der Matrix

Definition: Die Vektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ heißen Einheitsvektoren. Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullvektor.

Merksatz: Ist A eine lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema

$$\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix},$$

so sind die Spalten $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ die Bilder der Einheitsvektoren. Das bedeutet, es gilt

$$A \;=\; \left[A(\vec{e}_x)\; A(\vec{e}_y)\right] \;=\; \left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Hier wurde Arbeitsblatt 5.2 (Matrizen aufstellen) ausgegeben.

Satz: Ist A eine Abbildung der Ebene, die die Eigenschaften

(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ und
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$.

besitzt, so ist sie linear. Damit sind die Eigenschaften (L1) und (L2) äquivalent zur Definition linearer Abbildungen.

Beweis: Letzte Übungsaufgabe.

Hier wurde Arbeitsblatt 5.3 (Abbildungswert des Nullvektors) ausgegeben.

2. Geometrische Eigenschaften

Definition: Zwei Geraden

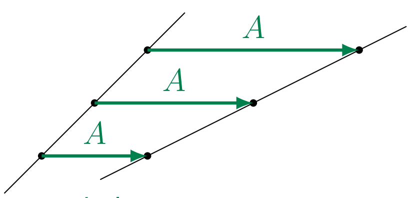
$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u}, \quad h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \vec{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

heißen parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind, d.h. wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$ gilt. Dann kann h auch mit dem Richtungsvektor von g geschrieben werden:

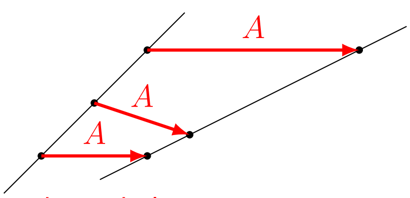
$$h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \lambda \cdot \vec{u} = \vec{q} + t' \cdot \vec{u} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Satz: Eine lineare Abbildung A besitzt folgende geometrische Eigenschaften.

Zentriertheit:	A fixiert den Ursprung, d.h. es gilt $A(\vec{0}) = \vec{0}$.
Geradentreue:	Jede Gerade wird durch A entweder verhältnistreu auf eine Gerade oder auf einen Vektor abgebildet.
Parallelentreue:	Werden zwei parallele Geraden wieder auf Geraden abgebildet, so sind die Bildgeraden wieder parallel oder gleich.



A ist verhältnistreu



A ist nicht verhältnistreu

Hier wurde Arbeitsblatt 5.4 (Linearität) ausgegeben.

Beweis: 1) Zentriertheit: Siehe Aufgabe 6.

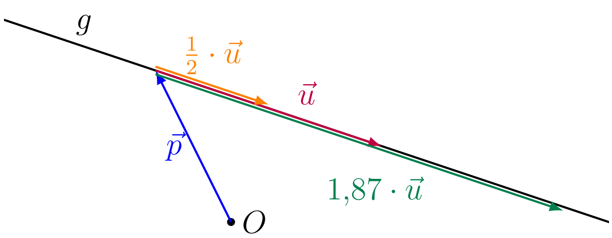
2) Geradentreue: Die Gerade

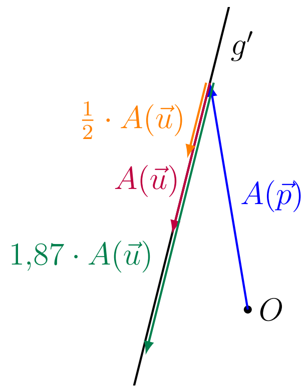
$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

wird auf

$$g' : \vec{r}(t) = A\big(\vec{s}(t)\big) = A(\vec{p} + t \cdot \vec{u}) \overset{\text{(L1)}}{=} A(\vec{p}) + A(t \cdot \vec{u}) \overset{\text{(L2)}}{=} A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

abgebildet.
Im Fall $A(\vec{u}) = \vec{0}$ besteht g' nur aus einem Vektor.
Im Fall $A(\vec{u}) \neq \vec{0}$ ist g' eine Gerade.





Außerdem sieht man: Zwei Punkte im Abstand $1 \cdot \|\vec{u}\|$ (oder $\frac{1}{2} \cdot \|\vec{u}\|$ oder $1{,}87 \cdot \|\vec{u}\|$) werden auf Punkte im Abstand $1 \cdot \|A(\vec{u})\|$ (oder $\frac{1}{2} \cdot \|A(\vec{u})\|$ oder $1{,}87 \cdot \|A(\vec{u})\|$) abgebildet. Daher ist die Abbildung verhältnistreu.

3) Parallelentreue: Sind $g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ und $h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \vec{u}$ parallele Geraden, dann sind die Bildgeraden

$$g' : \vec{s}(t) = A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}) \text{ und } h' : \vec{s}(t) = A(\vec{q}) + t \cdot A(\vec{u})$$

wieder parallel oder identisch, falls z.B. $A(\vec{p}) = A(\vec{q})$ gilt. $\square$

3. Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition: Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt Eigenvektor (EV) der linearen Abbildung A, wenn

$$A(\vec{v}) \;=\; \lambda \cdot \vec{v}$$

für eine reelle Zahl λ gilt. Dann heißt λ Eigenwert (EW) von A zum Eigenvektor $\vec{v}$.
Eigenvektoren behalten unter der Abbildung A ihre Richtung bei und werden dabei mit ihrem Eigenwert λ gestreckt (Achtung: Im Fall $\lambda < 0$ wird die Pfeilrichtung umgedreht).

Bemerkung: Ist $\vec{v}$ ein EV von A zum EW λ, dann ist auch jeder Vektor $s \cdot \vec{v}$ mit $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, ein EV von A zum EW λ, denn

$$A(\underbrace{s \cdot \vec{v}}) \overset{\text{L2}}{=} s \cdot A(\vec{v}) = s \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\underbrace{s \cdot \vec{v}})$$

Hier wurde Arbeitsblatt 5.5 (Eigenvektoren und Eigenwerte) ausgegeben.

Einheit 6

Zur Wiederholung wurde Arbeitsblatt 6.1 (Eigenvektoren) ausgegeben.

VI. Eigenvektoren und Eigenwerte

1. Eigenvektoren berechnen

Satz: Ist ein Eigenwert λ einer linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ bekannt, so erhält man die zugehörigen Eigenvektoren als Lösung der Gleichung

$$\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. äquivalent

$$v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x - \lambda \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

D.h. man bestimmt Lösungen v_x, v_y des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{llcl} \text{(i)} & (a_x - \lambda)\, v_x + b_x\, v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & a_y\, v_x + (b_y - \lambda)\, v_y & = & 0 \end{array}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \text{(Eigenvektorgleichung)} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - v_x \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} - v_y \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x - \lambda \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & (*) \end{aligned}$$

$\square$

Hier wurde Arbeitsblatt 6.2 (Berechnung von Eigenvektoren) ausgegeben.

2. Determinanten

Satz: Gegeben seien a_x, a_y, b_x, b_y. Gesucht sind alle Lösungen x, y des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. äquivalent

$$\begin{array}{llcl} \text{(i)} & a_x\, v_x + b_x\, v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & a_y\, v_x + b_y\, v_y & = & 0 \end{array}.$$

1) Im Fall $a_x b_y - a_y b_x = 0$ besitzt das Gleichungssystem die Lösungen

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ -a_x \end{pmatrix} \qquad \text{mit } s \in \mathbb{R}.$$

2) Im Fall $a_x b_y - a_y b_x \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem nur die Lösung $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beweis: 1) Einsetzen:

$$\begin{array}{lrcll} \text{(i)} & a_x\,(sb_x) + b_x\,(-sa_x) & = & 0 & \checkmark \\ \text{(ii)} & a_y\,(sb_x) + b_y\,(-sa_x) & = & s(\underbrace{a_y b_x - b_y a_x}_{=0}) \;=\; 0 & \checkmark \end{array}$$

2) Wegen $a_x b_y - a_y b_x \neq 0$ muss $a_x \neq 0$ oder $a_y \neq 0$ gelten.

Fall $a_x \neq 0$: (i) $\Rightarrow\; a_x\,v_x = -b_x\,v_y \;\Rightarrow\; v_x = -\dfrac{b_y}{a_x}\,v_y$

In (ii) eingesetzt: $\quad a_y \cdot \left(-\dfrac{b_y}{a_x}\,v_y\right) + b_y\,v_y = 0$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow & -a_y b_x\,v_y + a_x b_y\,v_y = 0 \\ \Rightarrow & v_y \cdot (\underbrace{-a_y b_x + a_x b_y}_{\neq 0}) = 0 \\ \Rightarrow & v_y = 0 \\ \Rightarrow & v_x = -\dfrac{b_y}{a_x}\,0 = 0 \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} v_x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fall $a_x = 0$: Dann muss $a_y \neq 0$ gelten und man kann (ii) nach v_x auflösen. Rest wie im anderen Fall. $\square$

Definition: Die Determinante $\det(A)$ einer linearen Abbildung ist definiert durch

$$\det(A) \;=\; \det\left(\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}\right) \;=\; a_x b_y - a_y b_x.$$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$

Wegen $\det(A) \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem $A(\vec{v}) = \vec{0}$ die einzige Lösung $\vec{v} = \vec{0}$.

Hier wurde Arbeitsblatt 6.3 (Determinanten) ausgegeben.

3. Eigenwertberechnung

Definition: Das charakteristische Polynom P_A einer linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ ist definiert durch

$$P_a(\lambda) \;=\; \det\left(\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix}\right).$$

Satz: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms P_A sind genau die Eigenwerte von A.

Beweis: $P_A(\lambda) = 0$

$$\begin{array}{cl} \Leftrightarrow & \det\left(\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix}\right) \;=\; 0 \\ \overset{\text{voriger Satz}}{\Leftrightarrow} & \begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ besitzt mindestens eine Lösung } \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overset{\text{erster Satz}}{\Leftrightarrow} & \text{Die Lösung } \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda. \end{array}$$

$\square$

Beispiel: Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 1 \\ &= 12 - 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Es ist P_A ein quadratisches Polynom.

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-10}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$.

Die Abbildung A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{10}{2} = 5$ und $\lambda_2 = \frac{4}{2} = 2$.

EVen zum EW $\lambda_1 = 5$: Löse

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & -2v_x + v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & 2v_x - v_y & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ (s \in \mathbb{R},\ s \neq 0).$$

EVen zum EW $\lambda_2 = 2$: Löse

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & v_x + v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & 2v_x + 2v_y & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (s \in \mathbb{R},\ s \neq 0).$$

Hier wurde Arbeitsblatt 6.4 (Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren) ausgegeben.

10 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 1: Vektoren

10.1 Tafelanschriebe Einheit 1: Vektoren

Arbeitsblatt 1.1: Informationen zu Sinus und Cosinus (Gemeinsam, Tafel)

I. Vektoren

1. Definition von Vektoren

Definition: 1) Ein Vektor $\vec{v}$ ist eine Verschiebungsvorschrift in der Ebene.

Arbeitsblatt 1.2: Definition von Vektoren (Gemeinsam, Tafel)

2) Vektoren kann man durch ihre Pfeile darstellen. Ist v_x die Verschiebung in x-Richtung, v_y die Verschiebung in y-Richtung, so schreibt man

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

3) Die Menge aller Vektoren bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2$.

4) Derjenige Pfeil des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, der im Ursprung $(0 \mid 0)$ startet, heißt Standard-Pfeil von $\vec{v}$. Er zeigt auf den zu $\vec{v}$ gehörenden Punkt $(v_x \mid v_y)$.

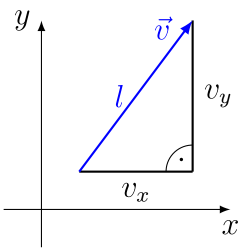
2. Norm von Vektoren

Definition: Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Die Norm von $\vec{v}$ definiert man durch

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Satz: Die Norm des Vektors $\vec{v}$ entspricht der Länge jedes seiner Pfeile.

Beweis:



Pythagoras: $l^2 = v_x^2 + v_y^2$

$\Rightarrow \; l = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \|\vec{v}\|$

$\square$

3. Rechnen mit Vektoren

Definition: 1) Addition zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2) Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot 6 \\ -\frac{1}{2} \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Arbeitsblatt 1.3: Rechenoperationen - Geometrische Interpretation (Gemeinsam, Tafel)

Arbeitsblatt 1.4: Rechenoperationen und Norm (Besprechung an Tafel)

4. Skalarprodukt und Winkel

Definition: Das Skalarprodukt von $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} := v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y.$$

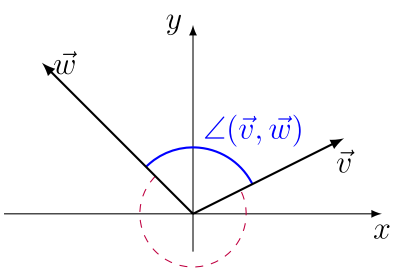
Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 5$

Hilfssatz: $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$.

Beweis:
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y \\ &= v_x^2 + v_y^2 \\ &= \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$
$\square$

Definition: Seien $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$.

1) Der Winkel $\angle(\vec{v}, \vec{w})$ zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist das Minimum der eingeschlossenen Winkel ihrer Standard-Pfeile.



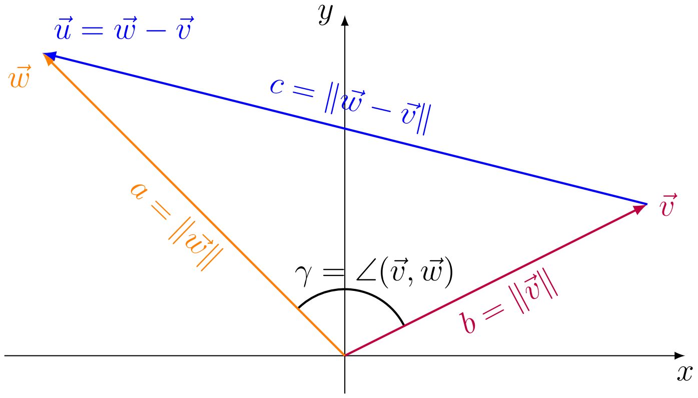
Es gilt also $0° \leq \angle(\vec{v}, \vec{w}) \leq 180°$

2) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen orthogonal, falls $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90°$.

Satz (Skalarprodukt-Winkel-Formel): Seien $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Dann

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big).$$

Beweis:



Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} = (\vec{w} - \vec{v}) \bullet (\vec{w} - \vec{v}) \\ &= \vec{w} \bullet \vec{w} - \vec{v} \bullet \vec{w} - \vec{w} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{v} \\ &= \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \bullet \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

In die Gleichung des Cosinussatzes eingesetzt:

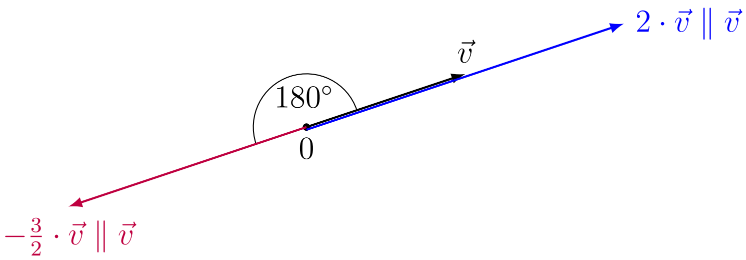
$$\begin{aligned} & \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \bullet \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 &=& \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow\ & -2\vec{v} \bullet \vec{w} &=& -2\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow\ & \vec{v} \bullet \vec{w} &=& \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\gamma) \qquad \square \end{aligned}$$

Spezialfall: $\vec{v}, \vec{w}$ orthogonal
$\Leftrightarrow \angle(\vec{v}, \vec{w}) = 90^\circ$
$\Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{w} = 0$ und $\vec{v}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Arbeitsblatt 1.5: Winkel zwischen Vektoren (Besprechung an Tafel)

Definition: Zwei Vektoren $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ heißen parallel, falls $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 0^\circ$ oder $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 180^\circ$ gilt. Schreibe $\vec{v} \parallel \vec{w}$.

Bemerkung: $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$ gilt.



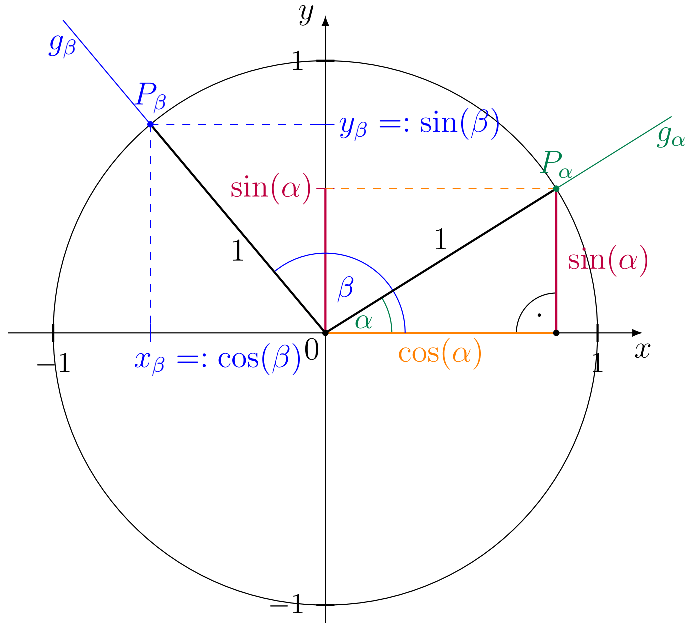
10.2 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Informationen zu Sinus und Cosinus

Definition: Für beliebige Winkel α sei g_α die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht (für $\alpha < 0°$ Drehung mit Winkel $|\alpha|$ im Uhrzeigersinn). $P_\alpha(x_\alpha \mid y_\alpha)$ sei der Schnittpunkt des Einheitskreises mit g_α. Man definiert

$$\sin(\alpha) := y_\alpha, \qquad \cos(\alpha) := x_\alpha.$$



Satz: Für beliebige Winkel α gelten:

$$\begin{array}{rrcl}
1) & \sin(360° + \alpha) & = & \sin\alpha, \\
2) & \cos(360° + \alpha) & = & \cos\alpha \\
3) & \sin(-\alpha) & = & -\sin(\alpha) \\
4) & \cos(-\alpha) & = & \cos(\alpha) \\
5) & \big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 & = & 1
\end{array}$$

Tabelle exakter Werte für Sinus und Cosinus:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

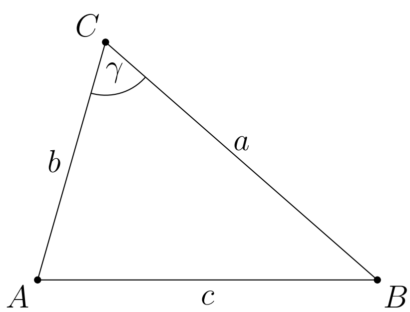
Satz: Für beliebige Winkel α, β gelten die **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)
\end{aligned}$$

Cosinussatz: In jedem Dreieck ABC gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma).$$

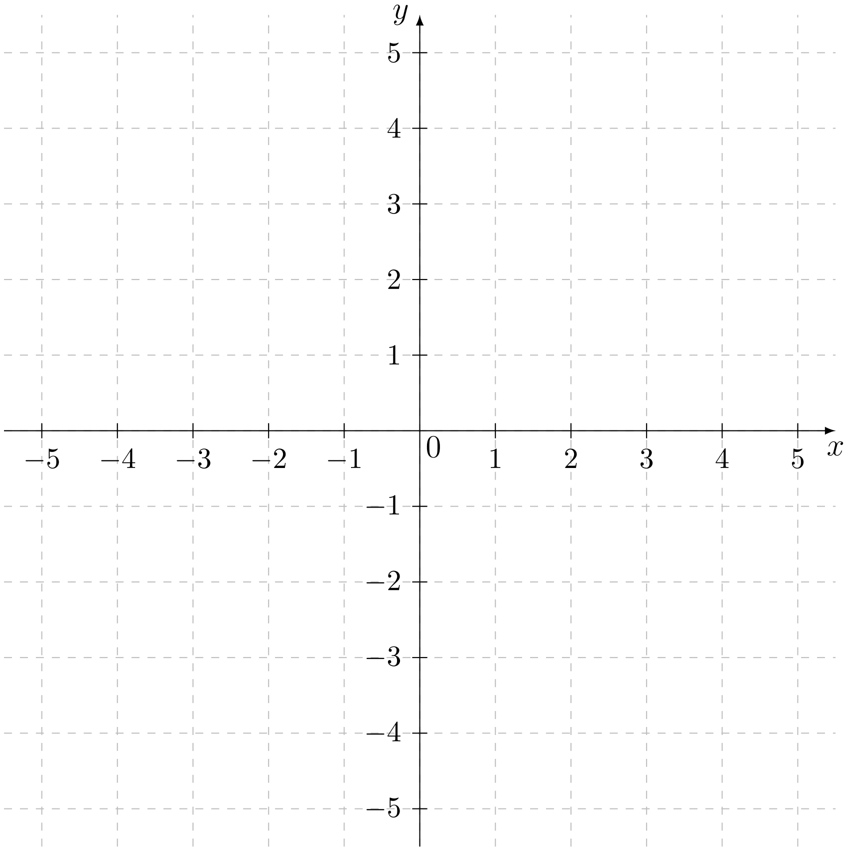
Hierbei sind für a, b, c die Längen der entsprechend bezeichneten Seiten einzusetzen, γ bezeichnet den von den Seiten a, b eingeschlossenen Winkel.



Definition von Vektoren

Aufgabe 1

Wir zeichnen verschiedene Pfeile des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.



Der Standard-Pfeil zeigt auf den Punkt $(\quad | \quad)$.

Rechenoperationen - Geometrische Interpretation

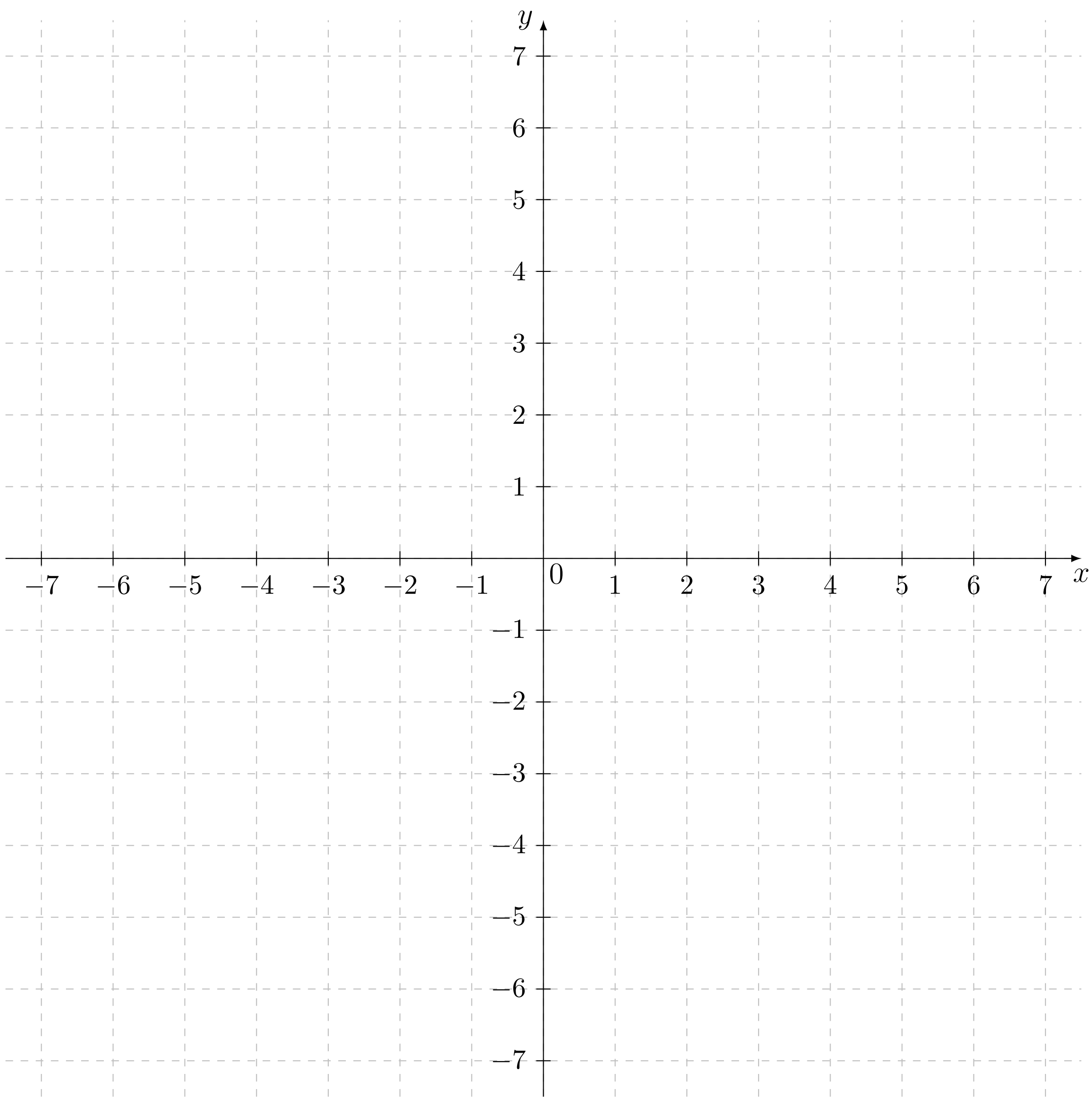
Aufgabe 2

a) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne **ohne** vorherige Rechnung die Standard-Pfeile von $\vec{v} + \vec{w}$, $2 \cdot \vec{v}$ und $\vec{v} - \vec{w}$ ein.

c) Berechne die Vektoren aus b) direkt und vergleiche mit deiner Zeichnung.

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \qquad 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}.$$



Rechenoperationen und Norm

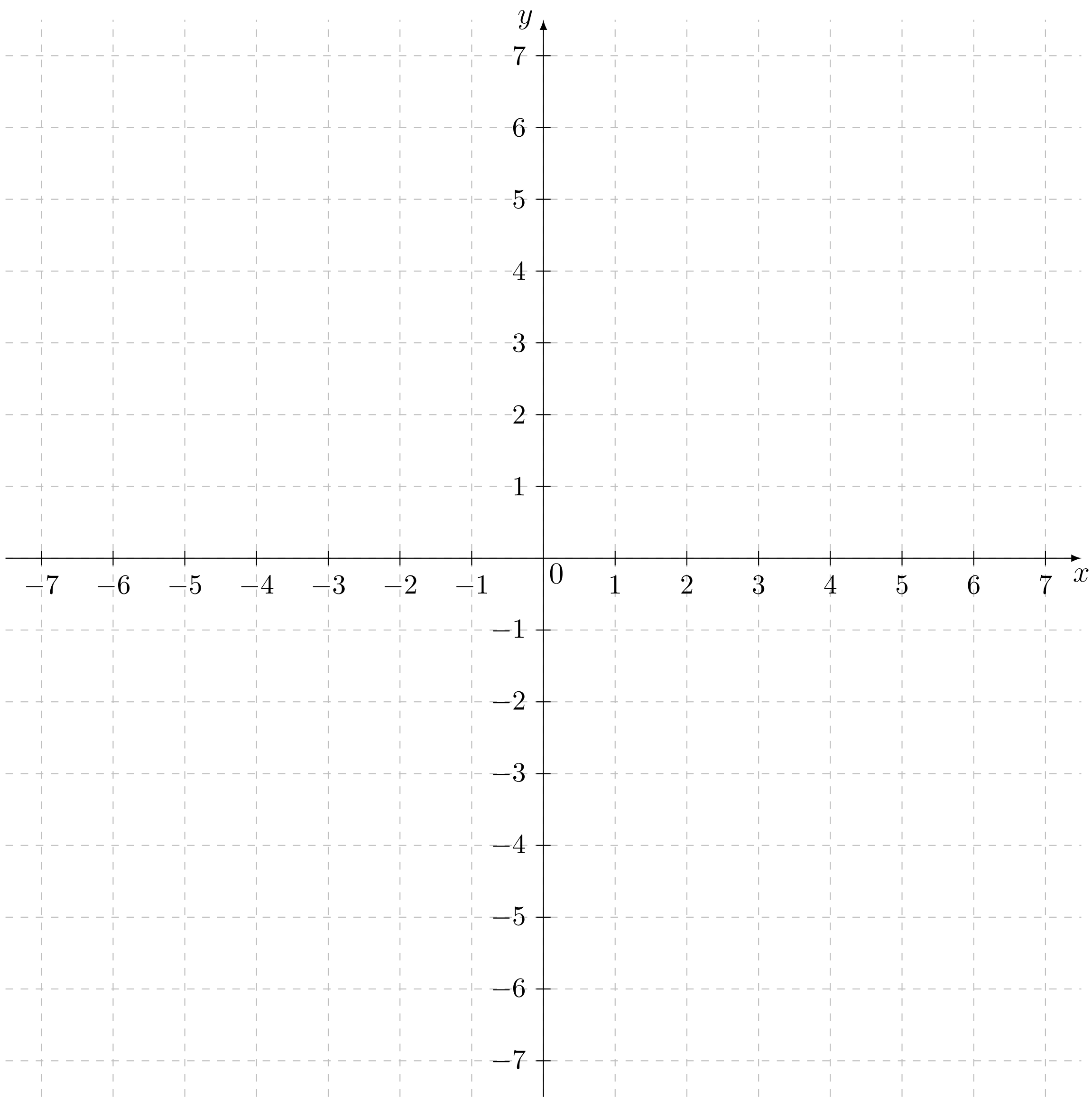
Aufgabe 3

a) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a} + \vec{b}$, $-\frac{4}{3} \cdot \vec{a}$ und $\vec{b} - \frac{4}{3} \cdot \vec{a}$ ein, **ohne** diese Vektoren zu berechnen.

c) Berechne die Vektoren aus b) direkt und kontrolliere damit deine Zeichnung.

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, $\qquad -\frac{4}{3} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, $\qquad \vec{b} - \frac{4}{3} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.



Weiter auf Seite 2

Aufgabe 4

a) Berechne für die beiden Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ jeweils die Norm.

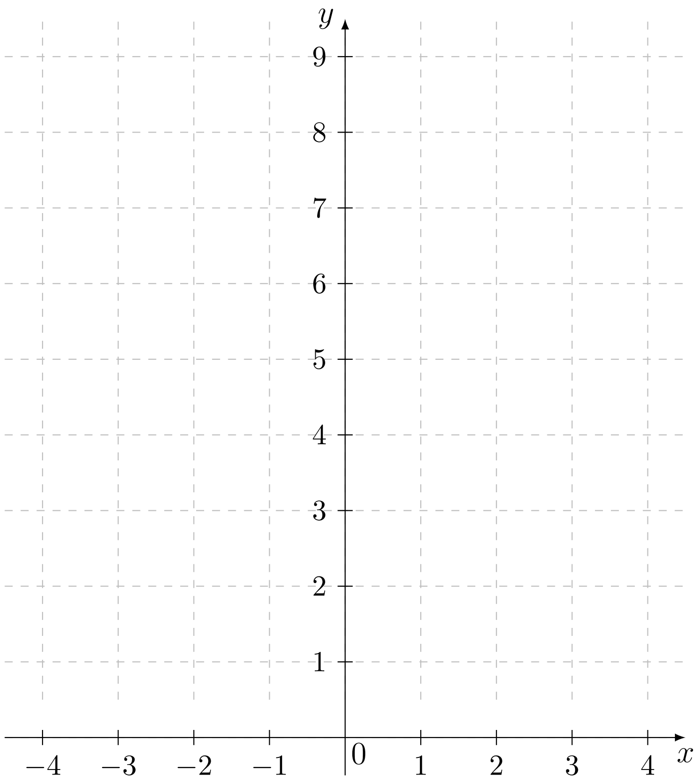
$\|\vec{v}\| =$ $\|\vec{w}\| =$

b) Berechne die Norm von $\vec{v} + \vec{w}$.

$\|\vec{v} + \vec{w}\| =$

c) Formuliere eine kurze geometrische Begründung, warum hier $\|\vec{v} + \vec{w}\| \neq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ gilt. Konstruiere dafür zunächst die Vektorsumme $\vec{v} + \vec{w}$.

Konstruktion:



Geometrische Begründung:

d) Gib an, welche Bedingung zwei beliebige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$ erfüllen müssen, so dass die Gleichheit $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ doch gilt.

Winkel zwischen Vektoren

Aufgabe 5

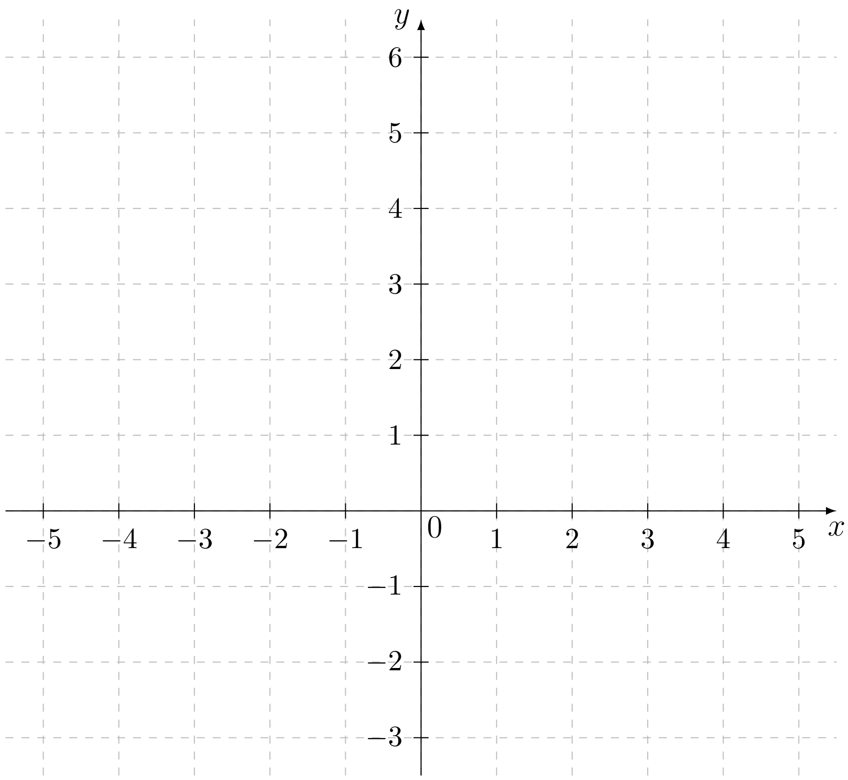
a) Gegeben sind $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechne $\vec{v} \bullet \vec{w}$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\cos\big(\angle(\vec{v}, \vec{w})\big)$ und $\angle(\vec{v}, \vec{w})$.
Hinweis: Tabelle exakter Werte für Sinus und Cosinus.

b) Bestimme, welche der folgenden Vektoren orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

c) Finde rechnerisch **alle** Vektoren $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$, die orthogonal zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind.

d) Zeichne $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und drei verschiedene zu $\vec{v}$ orthogonale Vektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ in das Koordinatensystem ein.

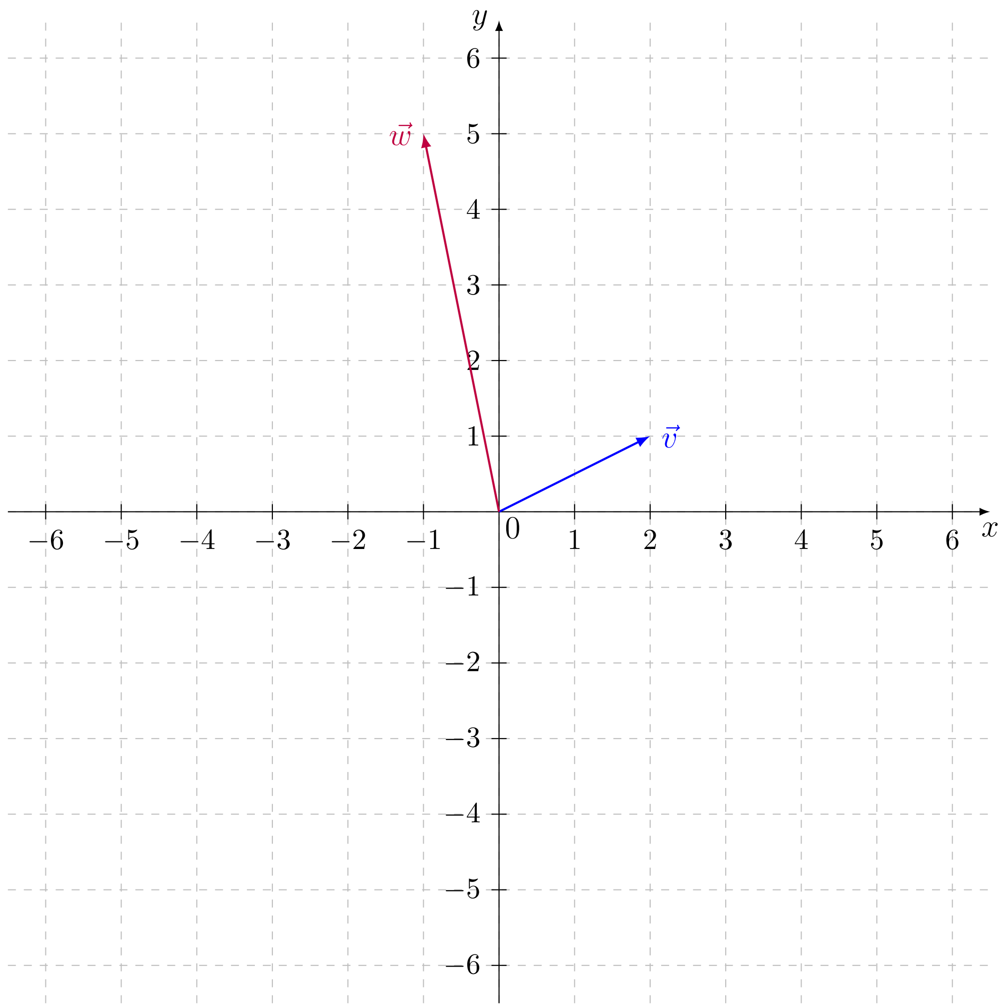


Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 6

In der unten stehenden Graphik sind die Standard-Pfeile von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingezeichnet. Konstruiere $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $3 \cdot \vec{v}$.



Weiter auf Seite 2

Aufgabe 7

Berechne:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{}$,

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{}$,

c) $\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right\| = \boxed{}$,

d) $\left\| \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \boxed{}$,

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{}$,

f) $\angle\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}\right) \approx \boxed{}$.

(Taschenrechner, zwei Nachkommastellen)

Aufgabe 8

Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Gib einen Vektor $\vec{a}$ an, der orthogonal zu $\vec{v}$ ist.

$\vec{a} = \boxed{}$,

b) Gib einen Vektor $\vec{b} \neq \vec{v}$ an, so dass $\angle(\vec{v}, \vec{b}) = 0°$ gilt.

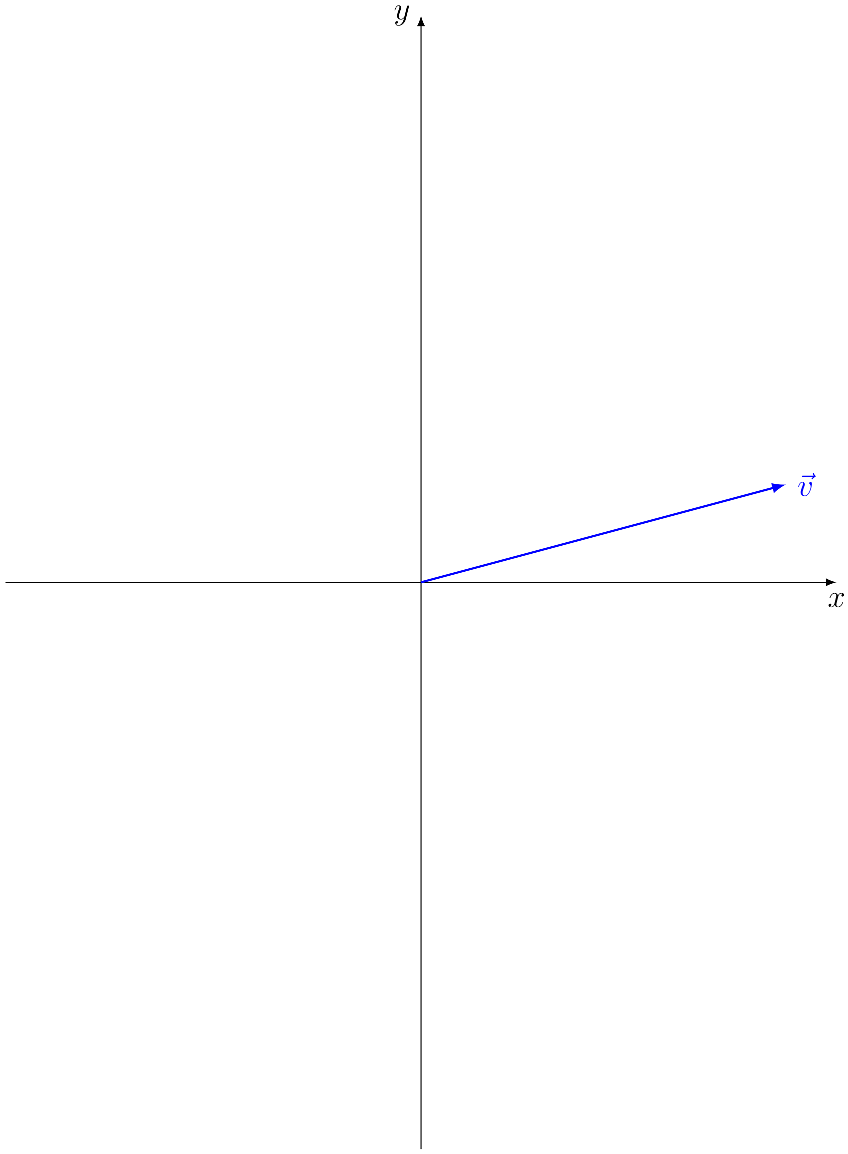
$\vec{b} = \boxed{}$,

c) Gib einen Vektor $\vec{c}$ an, so dass $\angle(\vec{v}, \vec{c}) = 180°$ gilt.

$\vec{c} = \boxed{}$.

Weiter auf Seite 3

Aufgabe 9



In der Graphik ist der Standard-Pfeil des Vektors $\vec{v}$ eingezeichnet.

a) Zeichne den Standard-Pfeil eines Vektor $\vec{w}$ ein, für den $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = 35^\circ$ gilt (Geodreieck erforderlich).

b) Zeichne den Standard-Pfeil des Vektors $-\vec{w}$ ein, wobei $\vec{w}$ den Vektor bezeichnet, dessen Standard-Pfeil du im Teil a) gezeichnet hast.

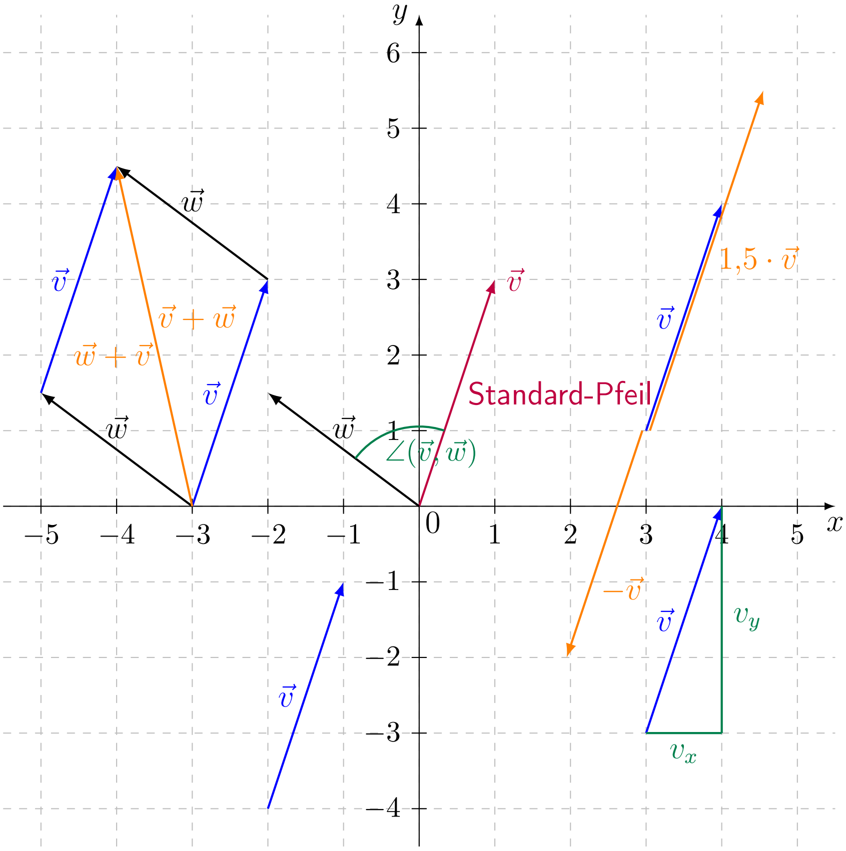
c) Bestimme $\angle(\vec{v}, -\vec{w}) = \boxed{}$.

11 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 2: Gerade, Drehung

11.1 Tafelanschriebe Einheit 2: Gerade, Drehung

Schüler:innen schreiben die Wiederholung nicht mit.

Wiederholung



$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Addition: $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \end{pmatrix}$.

Multiplikation mit Zahl: $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix}$

Norm: $\left\| \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Winkel: $\angle(\vec{v}, \vec{w}) =$ Minimum der eingeschlossenen Winkel der Standard-Pfeile.

Skalarprodukt: $\vec{v} \bullet \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\left(\angle(\vec{v}, \vec{w})\right)$.

Arbeitsblatt 2.1: Darstellung von Geraden (Gemeinsam, Tafel)

5. Geraden

Definition: Eine Gerade g ist festgelegt durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man schreibt

$$g: \quad \vec{s}(t) \; = \; \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Durch $\vec{s}(t)$ sind alle zu Geradenpunkten gehörenden Vektoren gegeben.

Arbeitsblatt 2.2: Geraden (Besprechung an Tafel)

II. Drehungen

1. Lineare Abbildungen und Matrizen

Wir betrachten Abbildungen (Funktionen) von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Eine solche Abbildung A ordnet also jedem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ wieder einen Vektor $A(\vec{v}) \in \mathbb{R}^2$ zu, den Abbildungswert.

Beispiel: $A(\vec{v}) = A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x + 6v_y \\ 3v_x \end{pmatrix}$.

Z.B. $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 12 \end{pmatrix}$

Definition: Ist eine Abbildung A von der Form

$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \; = \; v_x \cdot \vec{a} + v_y \cdot \vec{b}$$

mit festen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, dann nennt man A linear.

Beispiel: Die Abbildung A des letzten Beispiels ist linear:

$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x + 6v_y \\ 3v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_x \\ 3v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6v_y \\ 0 \end{pmatrix} = v_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + v_y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

Definition: Eine lineare Abbildung ist durch die beiden Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ eindeutig bestimmt. Man schreibt die Vektoren in ein Schema, um A anzugeben:

$$A \; = \; \begin{bmatrix} \vec{a} \; \vec{b} \end{bmatrix}.$$

Dieses Schema heißt Matrix.

Im obigen Beispiel $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Z.B. $A\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -3 \end{pmatrix}$

Arbeitsblatt 2.3: Lineare Abbildungen und Matrizen (Besprechung an Tafel)

Satz: Ist $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, so gelten

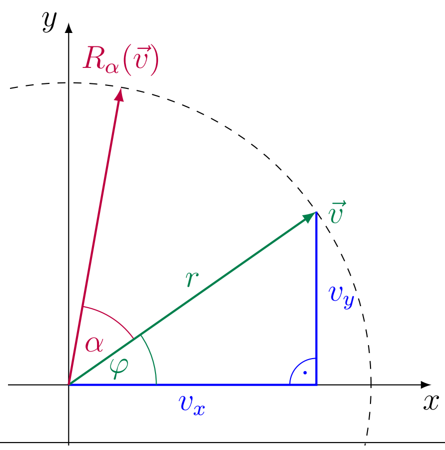
(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$

für beliebige $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis: Letzte Aufgabe.

2. Drehungen

Sei α ein beliebiger Winkel und R_α die Abbildung, die jeden Vektor $\vec{v}$ um α dreht.
Damit meinen wir im Folgenden immer, dass der zugehörige Standard-Pfeil von $\vec{v}$ um α im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung gegedreht wird.



$$\cos(\varphi) = \frac{v_x}{r} \Rightarrow v_x = r\cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{v_y}{r} \Rightarrow v_y = r\sin(\varphi)$$

Also $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ $\qquad (*)$

Analog
$$\begin{aligned}
R_\alpha(\vec{v}) &= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\alpha) \\ r\sin(\varphi+\alpha) \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Additionstheoreme}}{=} \begin{pmatrix} r\big(\cos(\varphi)\cos(\alpha) - \sin(\varphi)\sin(\alpha)\big) \\ r\big(\cos(\varphi)\sin(\alpha) + \sin(\varphi)\cos(\alpha)\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\alpha) - r\sin(\varphi)\sin(\alpha) \\ r\cos(\varphi)\sin(\alpha) + r\sin(\varphi)\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} v_x\cos(\alpha) - v_y\sin(\alpha) \\ v_x\sin(\alpha) + v_y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_x\cos(\alpha) \\ v_x\sin(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_y\sin(\alpha) \\ v_y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\
&= v_x \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Satz: R_α ist eine lineare Abbildung und es gilt

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Arbeitsblatt 2.4: Drehungen (Besprechung an Tafel)

11.2 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Darstellung von Geraden

Aufgabe 1

Erinnerung aus der Schule: Eine Gerade kann durch eine Gleichung der Form

$$y = mx + c$$

angegeben werden. Diese Form heißt auch $\boxed{}$.

Hierbei nennt man m die $\boxed{}$ und c den $\boxed{}$.

Die Gerade besteht aus allen Punkten $(x \mid y)$, die diese Gleichung erfüllen.

Beispiel: Gerade g mit der Gleichung

$$y = \frac{1}{3}x + 4.$$

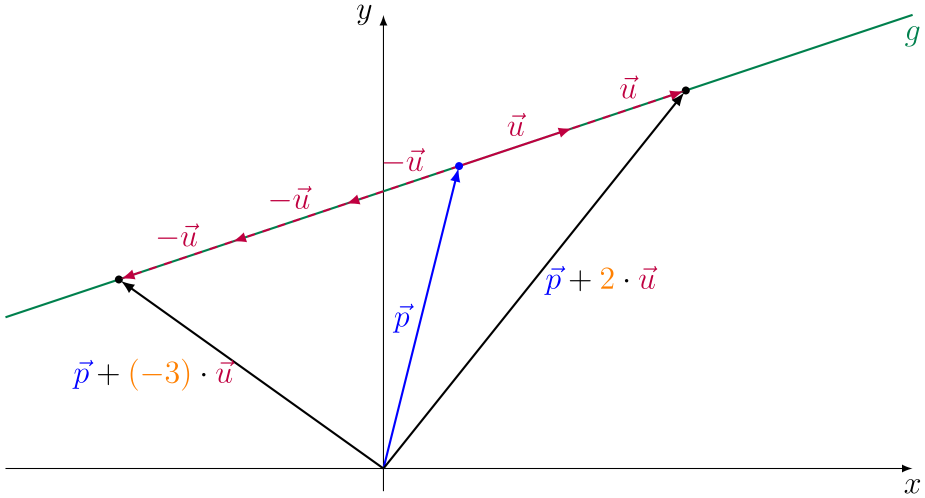
Punkte auf g: $(0 \mid \quad)$, $(6 \mid \quad)$, $(9 \mid \quad)$,

Alternativ kann man auch alle zugehörigen Vektoren angeben, um g zu beschreiben.

In unserem Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 \\ \end{pmatrix}$.

Deren Standard-Pfeile zeigen dann auf $\boxed{}$ von g.

Geradengleichung in Vektorform:



Alle zu der Geraden g gehörenden Vektoren werden angegeben durch

$$\vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Man nennt $\vec{p}$ einen $\boxed{}$ und $\vec{u}$ einen $\boxed{}$.

Geraden

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 2x - 1$.

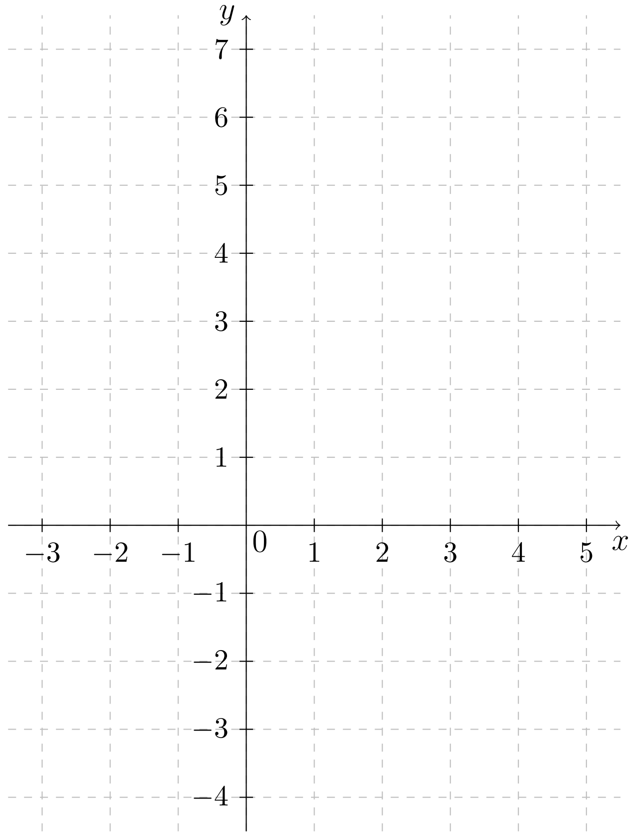
a) Zeichne die Gerade in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne einen möglichen Stützvektor $\vec{p}$ und einen möglichen Richtungsvektor $\vec{u}$ ein und gib sie dann an.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}.$$

c) Gib mit b) die Geradengleichung in Vektorform an.

$\vec{s}(t) =$



d) An der Steigungsform sieht man: Für $x = 3$ ist $y = 5$, also liegt der Punkt $P(3 \mid 5)$ auf g. Bestimme rechnerisch den Wert von t_0, für den der Standard-Pfeil von $\vec{s}(t_0)$ auf P zeigt.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Aufgabe 3

a) Sei B die lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$. Berechne folgende Abbildungswerte.

$$B\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{}, \qquad B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{}.$$

b) Sei C die Abbildung mit $C(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4v_x + v_y \\ 5v_x - 6v_y \end{pmatrix}$ für alle $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

b₁) Begründe, dass C linear ist.

$$\boxed{}.$$

b₂) Gib zu der linearen Abbildung C das Matrix-Schema an.

$$C = \boxed{}.$$

Zusatzaufgabe 1

Sei A eine beliebige lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix}$. Zeige eine (oder beide) der folgenden Aussagen.

(L1) Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt $A(\vec{v}+\vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$.

(L2) Für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$.

Drehungen

Hinweis: Du kannst dir am Einheitskreis überlegen, welche Werte der Sinus und der Cosinus für die Winkel $180°$ bzw. $90°$ hat (vgl. Arbeitsblatt 1.1 der ersten Einheit).

Aufgabe 4

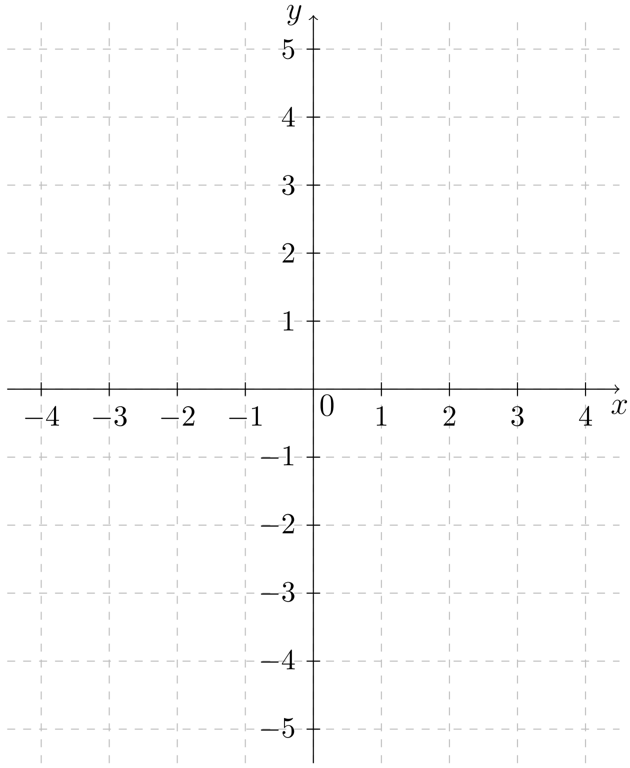
a) Gib das Matrix-Schema für $R_{180°}$ an.

b) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechne $R_{180°}(\vec{v})$ und $R_{180°}(\vec{w})$.

c) Zeichne $\vec{v}$, $R_{180°}(\vec{v})$, $\vec{w}$ und $R_{180°}(\vec{w})$ in das Koordinatensystem ein.



Aufgabe 5

a) Gib das Matrix-Schema für $R_{90°}$ an.

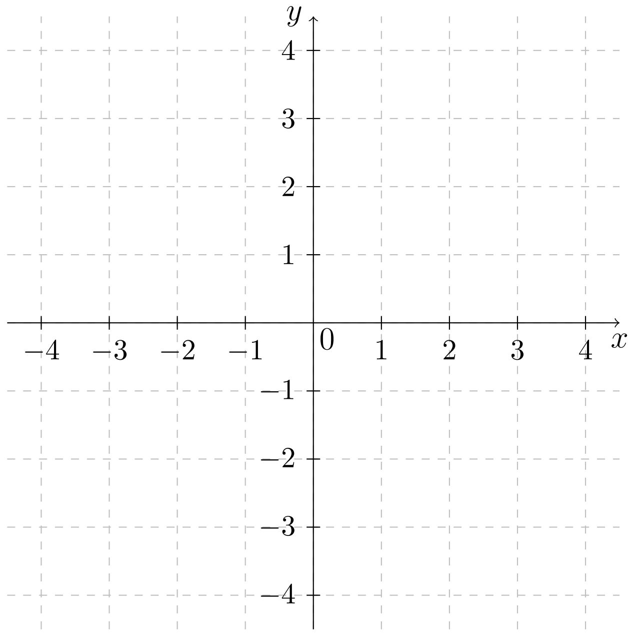
b) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Berechne $R_{90°}(\vec{v})$ und $R_{90°}(\vec{w})$.

c) Zeichne $\vec{v}$, $R_{90°}(\vec{v})$, $\vec{w}$ und $R_{90°}(\vec{w})$ in das Koordinatensystem ein.

d) Überprüfe mit Hilfe des Skalarprodukts, dass $\vec{v}$ und $R_{90°}(\vec{v})$ orthogonal sind und dass $\vec{w}$ und $R_{90°}(\vec{w})$ orthogonal sind.



Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 6

a) Sei A die lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$. Berechne folgende Abbildungswerte.

$A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$, $\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \boxed{}$.

b) Sei B die Abbildung mit $B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -3v_y \\ 2v_x + v_y \end{pmatrix}$ für alle $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

b_1) Begründe, dass B linear ist.

$\boxed{}$.

b_2) Gib zu der linearen Abbildung B das Matrix-Schema an.

$B = \boxed{}$.

Aufgabe 7

a) Gib jeweils das Matrix-Schema der angegebenen Drehung R_α um den Winkel α an (exakte Werte eintragen, benütze die Tabelle von Arbeitsblatt 1.1).

$R_{45^\circ} = \boxed{}$ $\quad R_{135^\circ} = \boxed{}$

b) Die lineare Abbildung $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ stellt eine Drehung dar. Gib den Drehwinkel α an.

$\alpha = \boxed{}$

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 8

Kreuze jeweils an, ob die gegebene Abbildung B linear ist oder nicht.

Abbildung	linear	nicht linear
$B\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_y^2 \\ 7v_y \end{pmatrix}$		
$B\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y - 10v_x \\ v_x - 3v_y \end{pmatrix}$		
$B\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \end{pmatrix}$		
$B\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + v_y \\ 4 \end{pmatrix}$		

Aufgabe 9

a) Gib die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus an.

$\sin(\alpha + \beta) =$

$\cos(\alpha + \beta) =$

b) Bestimme mit Hilfe der Additionstheoreme exakte Werte für Sinus und Cosinus. Verwende dazu die exakten Werte aus der Tabelle von Arbeitsblatt 1.1.

$\sin(75^\circ) = \sin(30^\circ + 45^\circ) =$

$\cos(75^\circ) = \cos(30^\circ + 45^\circ) =$

12 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 3: Spiegelungen

12.1 Tafelanschriebe Einheit 3: Spiegelungen

Arbeitsblatt 3.1: Winkel, Geraden, lineare Abbildungen (Besprechung an Tafel)

Arbeitsblatt 3.2: Geradenspiegelung (Gemeinsam Vektoren einzeichnen, OH oder Tafel)

III. Geradenspiegelung

1. Berechnung von $\vec{w}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|} \Leftrightarrow \|\vec{w}\| = \cos(\alpha) \cdot \|\vec{v}\|$$

Skalarprodukt-Winkel-Formel:

$$\vec{v} \bullet \vec{u} = \cos(\alpha) \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \cos(\alpha) \cdot \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \|\vec{w}\| \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}}_{\text{Vektor der Länge } 1} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$$

Definition: $\vec{w}$ heißt Projektion des Vektors $\vec{v}$ auf g.

Arbeitsblatt 3.2: Geradenspiegelung (Gemeinsam Berechnungen durchführen, OH oder Tafel)

2. Berechnung von $S_g(\vec{v})$:

$$\begin{aligned}
S_g(\vec{v}) &= \vec{v} + 2 \cdot \vec{d} = \vec{v} + 2 \cdot (\vec{w} - \vec{v}) \\
&= 2 \cdot \vec{w} - \vec{v} = 2 \cdot \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|u\|^2} \cdot \vec{u} - \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{v} \\
&= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \left(2 \cdot \vec{v} \bullet \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} - \|\vec{u}\|^2 \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 2(v_x u_x + v_y u_y) u_x - (u_x^2 + u_y^2) v_x \\ 2(v_x u_x + v_y u_y) u_y - (u_x^2 + u_y^2) v_y \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{2} v_x u_x^2 + 2 v_y u_y u_x - \cancel{u_x^2 v_x} - u_y^2 v_x \\ 2 v_x u_x u_y + \cancel{2} v_y u_y^2 - u_x^2 v_y - \cancel{u_y^2 v_y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \cdot \begin{pmatrix} (u_x^2 - u_y^2) v_x + 2 v_y u_y u_x \\ 2 v_x u_x u_y + (u_y^2 - u_x^2) v_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} v_x + \frac{2 u_y u_x}{u_x^2 + u_y^2} v_y \\ \frac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} v_x + \frac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} v_y \end{pmatrix} \\
&= v_x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + v_y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2 u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ S_g ist linear, $S_g = \begin{bmatrix} \frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} & \frac{2u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ \frac{2u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} & \frac{u_y^2 - u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{bmatrix}$

<u>Beispiel:</u> Für die Gerade g mit $\vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{4-1}{4+1} & \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{4+1} \\ \ldots & -\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$S_g \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} + \frac{36}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{27}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{5} \\ \frac{-15}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Arbeitsblatt 3.3: Spiegelung geometrisch und analytisch (Besprechung an Tafel)

12.2 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Winkel, Geraden, lineare Abbildungen

Aufgabe 1

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

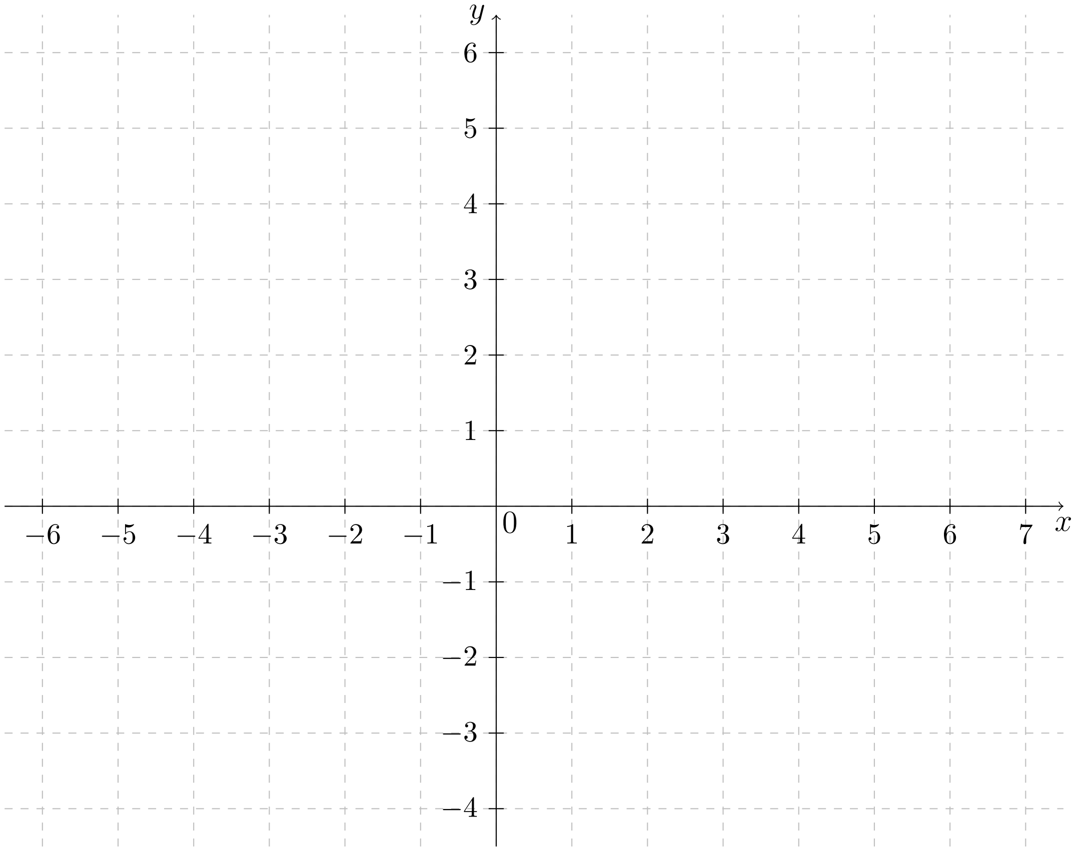
Berechne das Skalarprodukt $\vec{v} \bullet \vec{w}$, die Normen $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ und den Winkel zwischen den Vektoren.
Hinweise: Skalarprodukt-Winkel-Formel, Taschenrechner erforderlich.

Aufgabe 2

Gegeben sind die drei Geraden

$$\begin{aligned}
g_1: \quad \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\
g_2: \quad \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\
g_3: \quad \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Zeichne die drei Geraden in das Koordinatensystem ein.



Weiter auf Seite 2

Aufgabe 3

Gegeben ist die lineare Abbildung

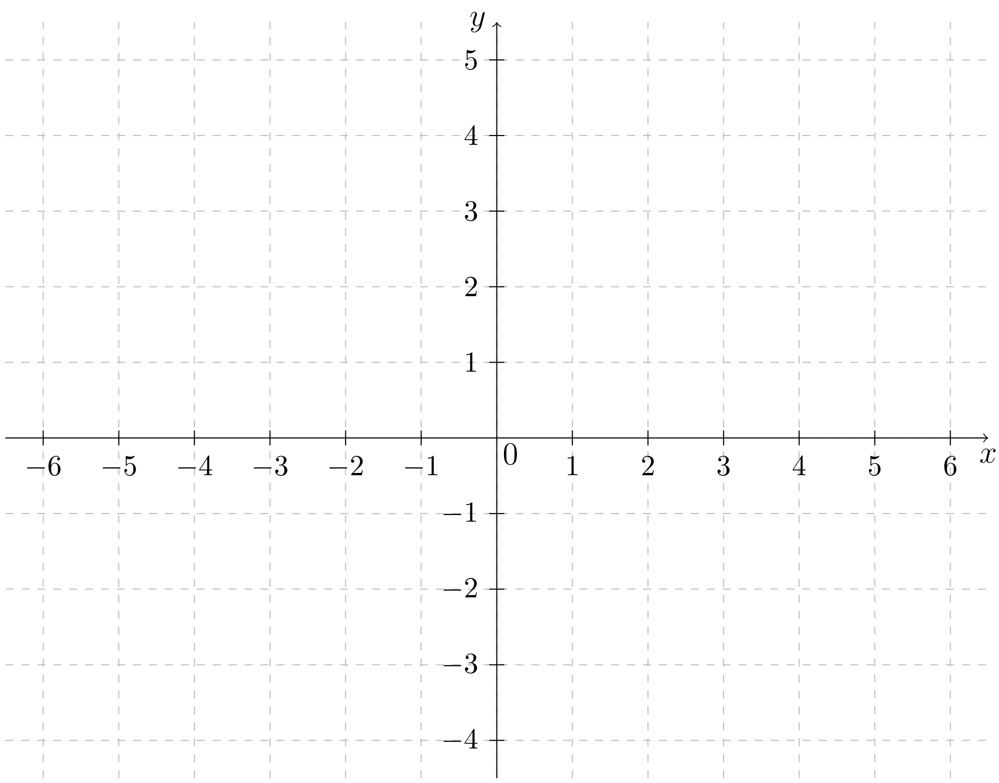
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne $A\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $A(\vec{v})$, $A(\vec{w})$ und $A(\vec{u})$ in das Koordinatensystem ein.

c) Berechne $A(\vec{v})$ für einen allgemeinen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

d) Kannst Du die Abbildung A geometrisch beschreiben?



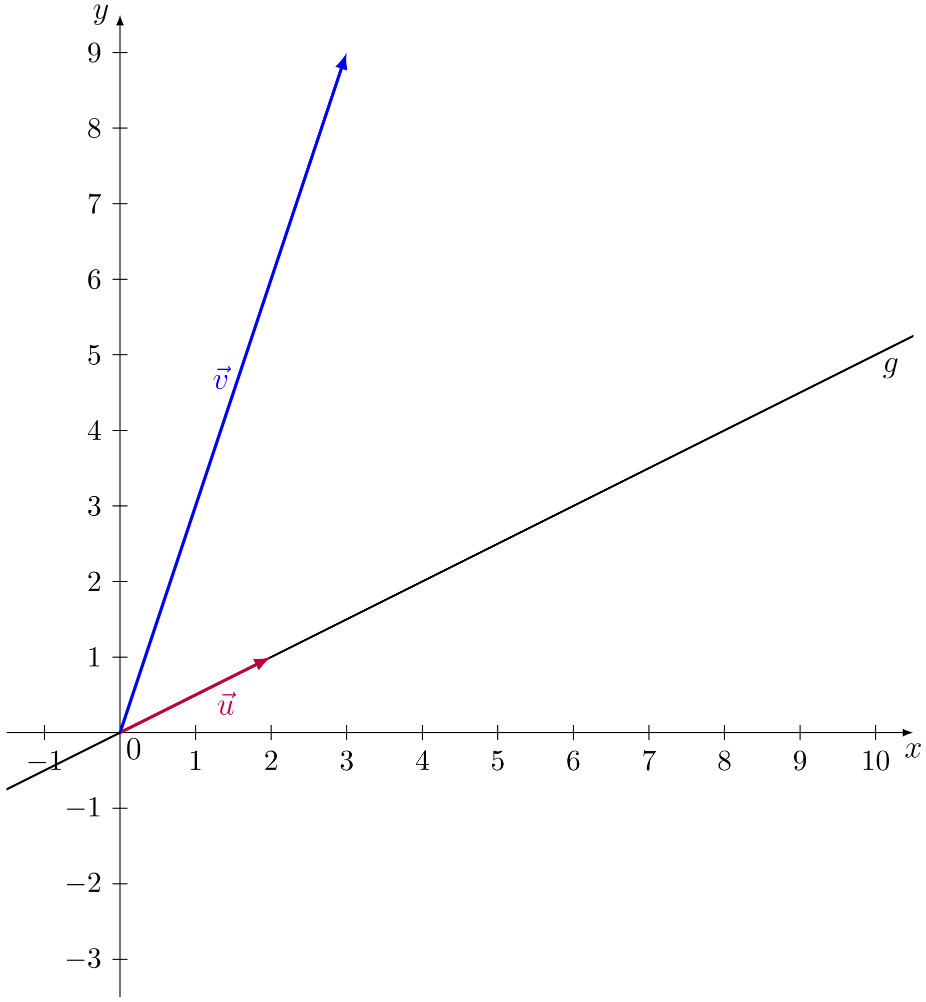
Geradenspiegelung

Aufgabe 4

Gegeben sind die Gerade g durch

$$\vec{s}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{p}\text{ (Stützvektor)}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}\text{ (Richtungsvektor)}} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$. Der Standard-Pfeil von $\vec{v}$ soll an g gespiegelt werden.



$\vec{v} \bullet \vec{u} \quad =$

$\|\vec{u}\| \quad =$

$\vec{w} \quad =$

$\vec{d} \quad =$

$S_g(\vec{v}) \quad =$

Spiegelung geometrisch und analytisch

Aufgabe 5

Gegeben sind

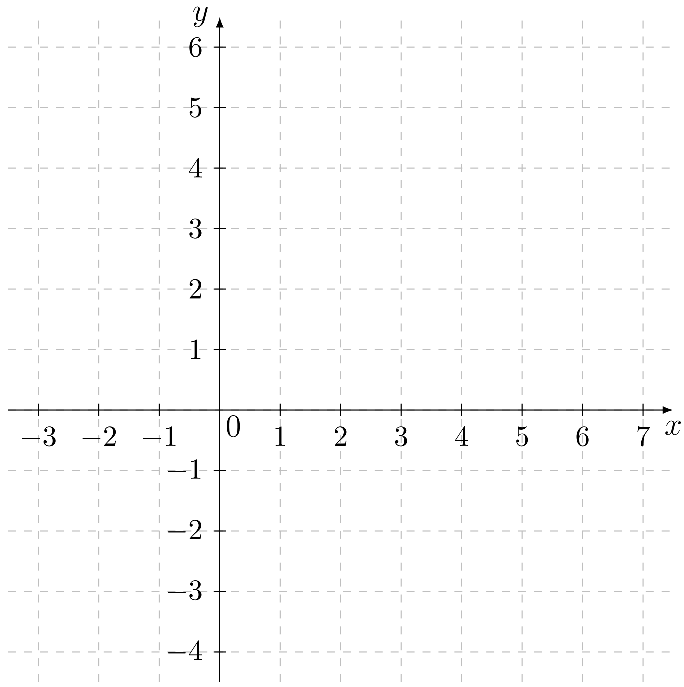
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix},\ g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbb{R}).$$

a) Zeichne die Gerade g und die Standard-Pfeile von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in das Koordinatensystem ein.

b) Konstruiere mit dem Geodreieck die gespiegelten Vektoren $S_g(\vec{a})$, $S_g(\vec{b})$ und $S_g(\vec{c})$.

c) Berechne die Spiegelungsmatrix zu g.

$S_g =$



d) Berechne die Abbildungswerte $S_g(\vec{a})$, $S_g(\vec{b})$, $S_g(\vec{c})$.

$S_g(\vec{a}) =$

$S_g(\vec{b}) =$

$S_g(\vec{c}) =$

e) Überprüfe, ob die berechneten Abbildungswerte mit den konstruierten Vektoren übereinstimmen.

Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 6

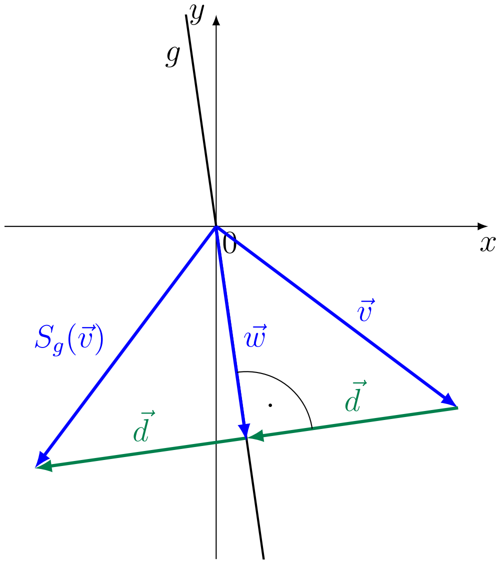
Gegeben sind die Gerade $g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$ und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Berechne die in der Graphik eingezeichneten Vektoren.

$\vec{w} =$

$\vec{d} =$

$S_g(\vec{v}) =$



Aufgabe 7

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.

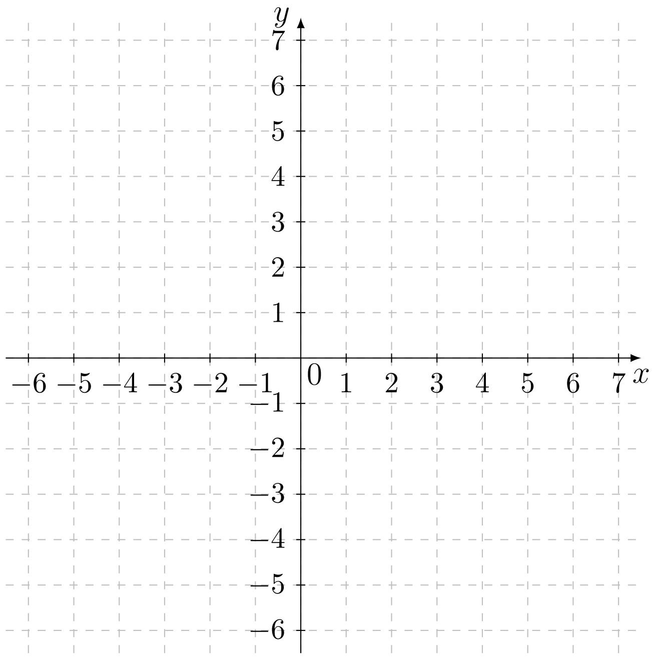
a) Berechne die Matrix für die Spiegelung an g.

$S_g =$

b) Berechne die Abbildungswerte für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix}$.

$S_g(\vec{a}) =$

$S_g(\vec{b}) =$



c) Zeichne die Gerade g, die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und ihre Abbildungswerte in die Graphik ein.

Weiter auf Seite 2

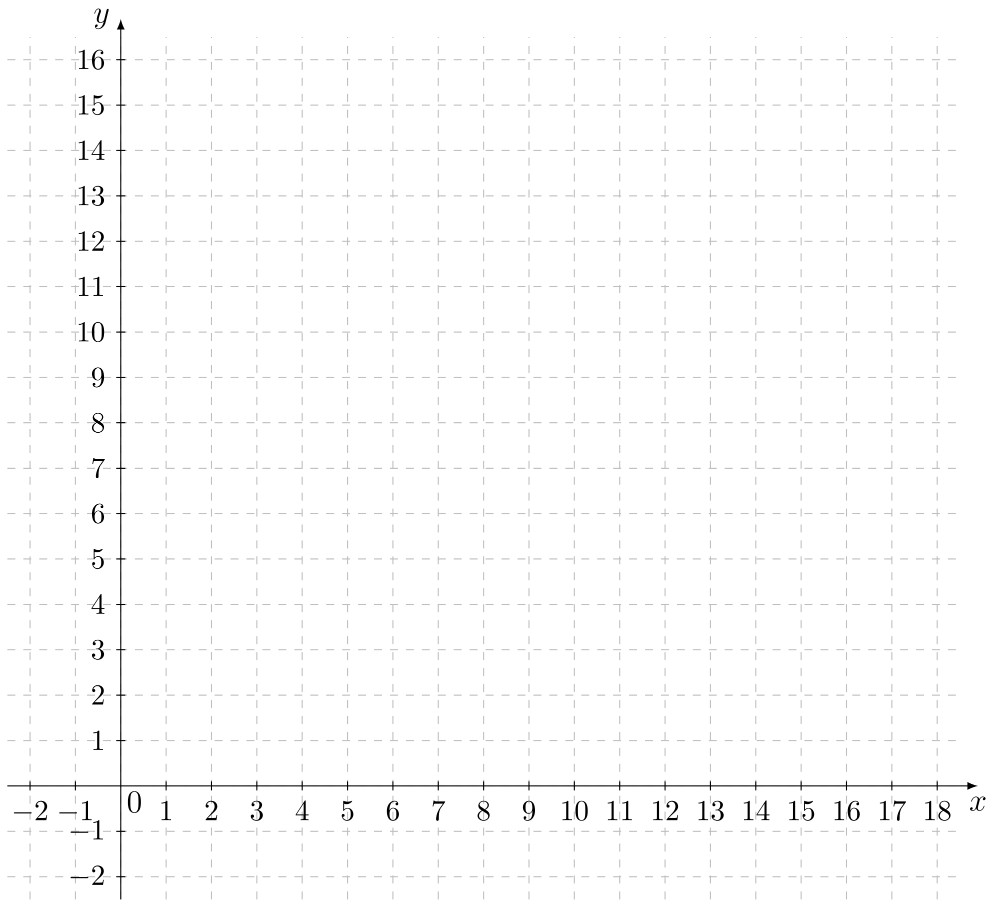
Aufgabe 8

Gegeben ist die Geradenspiegelung $S_g = \begin{bmatrix} \frac{8}{17} & \frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \end{bmatrix}$ an einer Geraden g.

Die zugehörige Gerade g soll bestimmt werden.

a) Berechne für den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Abbildungswert. $S_g(\vec{a}) =$

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a}$ und $S_g(\vec{a})$ in das Koordinatensystem ein.



c) Welcher Punkt P auf der Verbindungsstrecke der Pfeilspitzen $\vec{a}$ und $S_g(\vec{a})$ muss auf der Geraden g liegen? Gib die Koordinaten des Punktes an. P

d) Gib die Gerade g an, zu der die Geradenspiegelung S_g gehört.

$g : \vec{s}(t) =$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

13 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 4: Fixpunkt, Fixgerade, Streckung

13.1 Tafelanschriebe Einheit 4: Fixpunkt, Fixgerade, Streckung

Arbeitsblatt 4.1: Verschiedene lineare Abbildungen (Besprechung an Tafel)

IV. Fixpunkt, Fixgerade, Streckung

1. Geradentreue

Satz: Seien A eine lineare Abbildung und g eine Gerade. Die Menge der Abbildungswerte der Vektoren der Geraden bildet eine Gerade oder sie besteht aus einem einzigen Vektor.

Beweis: Sei

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R}.)$$

Es folgt

$$A\big(\vec{s}(t)\big) = A\big(\vec{p} + t \cdot \vec{u}\big) = A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}).$$

Im Fall $A(\vec{u}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildet die Menge aller Abbildungswerte eine Gerade.

Im Fall $A(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $A\big(\vec{s}(t)\big) = A(\vec{p})$. Die Menge aller Abbildungswerte enthält genau ein Element, nämlich den Vektor $A(\vec{p})$. $\square$

Arbeitsblatt 4.2: Spiegelung (Besprechung an Tafel)

2. Fixpunkt und Fixgerade

Definition: Sei A eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

1) Ein Punkt $P(v_x \mid v_y)$ heißt Fixpunkt von A, wenn der zugehörige Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ von A unverändert gelassen wird. D.h. es gilt $A(\vec{v}) = \vec{v}$.
2) Eine Gerade heißt Fixpunktgerade, wenn alle ihre Punkte Fixpunkte sind.
3) Eine Gerade g heißt Fixgerade von A, wenn sie durch A wieder auf sich abgebildet wird. Jede Fixpunktgerade ist eine Fixgerade, aber die Umkehrung gilt nicht.

Beispiele: 1) Die Spiegelung an einer Geraden g besitzt die Fixpunktgerade g. Alle Geraden, die senkrecht auf g stehen, sind Fixgeraden, aber keine Fixpunktgeraden.

2) Ist A eine lineare Abbildung, so ist $(0 \mid 0)$ ein Fixpunkt, denn

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) Eine Drehung um $(0 \mid 0)$ mit Winkel $0° < \alpha < 360°$ hat nur den Fixpunkt $(0 \mid 0)$.

Arbeitsblatt 4.3: Fixpunkt und Fixgerade (Gemeinsames Lösen, Tafel)

3. Streckungen

Definition: Sei k eine positive reelle Zahl außer 1. Die lineare Abbildung Z mit der Matrix

$$Z = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

heißt zentrische Streckung, k heißt Streckfaktor.

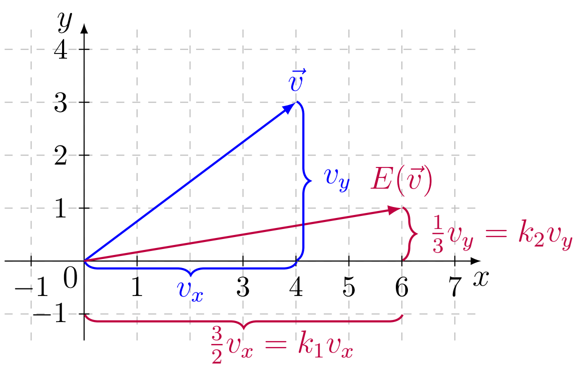
Arbeitsblatt 4.4: Zentrische Streckung (Besprechung an Tafel)

Definition: Seien k_1, k_2 verschiedene positive reelle Zahlen. Die lineare Abbildung E mit der Matrix

$$E = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

heißt Eulerabbildung.

Beispiel: $E = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Arbeitsblatt 4.5: Eulerabbildungen (Besprechung an Tafel)

13.2 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Verschiedene lineare Abbildungen

Aufgabe 1

Vervollständige die nebenstehende Tabelle.

$\alpha =$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$
$\sin(\alpha) =$				
$\cos(\alpha) =$				

Aufgabe 2

Die Matrix einer Drehung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung ist durch

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

gegeben, die Matrix der Spiegelung an der Geraden $g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ durch

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} & 2\frac{u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} \\ 2\frac{u_x u_y}{u_x^2 + u_y^2} & -\frac{u_x^2 - u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} \end{bmatrix}$$

Gegeben sind lineare Abbildungen $A_1, \ldots, A_6$ durch ihre Matrizen. Kreuze jeweils an, ob die gegebene Abbildung eine Drehung, eine Geradenspiegelung oder keines von beiden ist.

	Drehung	Geradenspiegelung	Weder Drehung noch Spiegelung
$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$			
$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$			
$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$			
$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$			
$A_5 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$			
$A_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$			

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 3

Gegeben sind die lineare Abbildung

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Geraden

$$g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

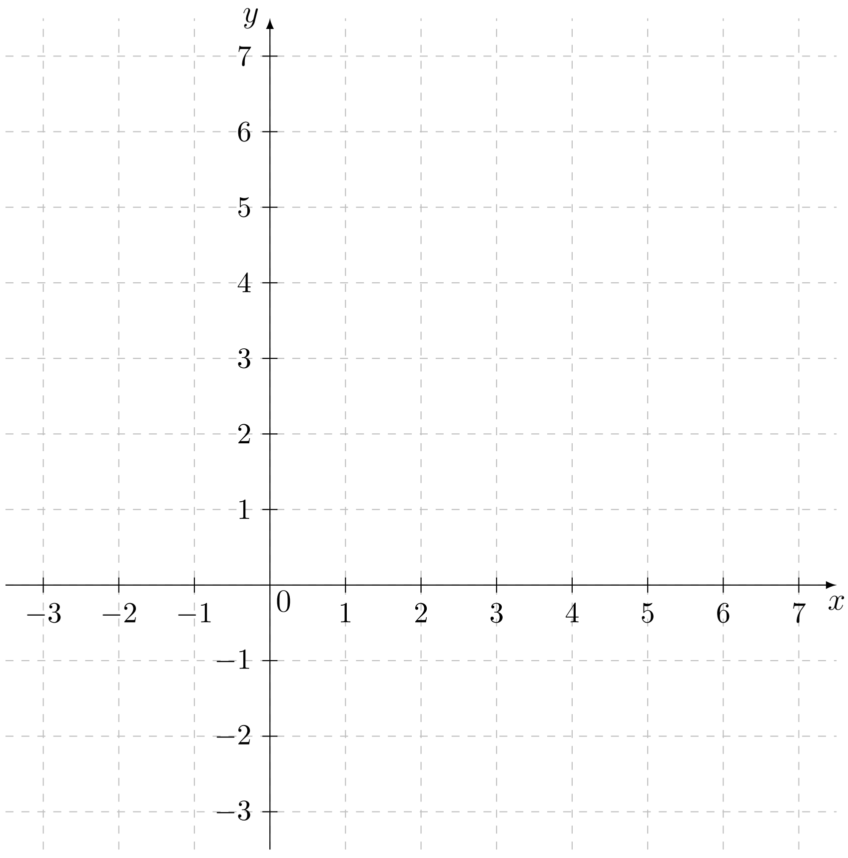
a) Berechne $A\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Berechne für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ den Abbildungswert $A\big(\vec{s}(t)\big)$.

c) Berechne für jedes feste $t \in \mathbb{R}$ den Abbildungswert $A\big(\vec{r}(t)\big)$.

d) Zeichne die Geraden g und h in das Koordinatensystem ein und auch die Menge aller Abbildungswerte $A\big(\vec{s}(t)\big)$ und die Menge aller Abbildungswerte $A\big(\vec{r}(t)\big)$ für $t \in \mathbb{R}$.

e) Was beobachtest Du?



Spiegelung

Aufgabe 4

Gegeben sind die Ursprungsgerade $g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und die Geradenspiegelung an g durch

$$S_g = \begin{bmatrix} \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \end{bmatrix}.$$

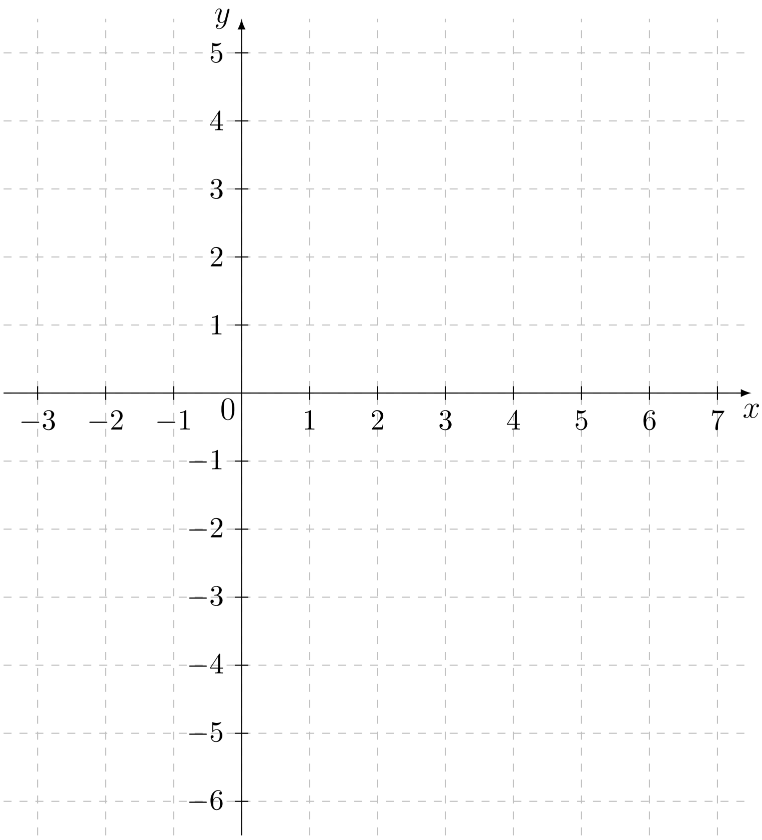
a) Zeichne g in das Koordinatensystem ein. Welche Vektoren werden durch die Spiegelung an g auf sich selbst abgebildet? Überlege geometrisch!

b) Gegeben ist die Gerade $h : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. Zeichne h in das Koordinatensystem ein.

c) Berechne das Skalarprodukt der Richtungsvektoren von g und h. Welchen Winkel schließen die Vektoren ein?

d) Berechne $S_g \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $S_g \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zeichne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $S_g(\vec{a})$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $S_g(\vec{b})$ in das Koordinatensystem ein.
Hinweis: Die Ergebnisse haben ganzzahlige Koordinaten.

e) Berechne für jeden festen Wert von t den gespiegelten Vektor $S_g\big(\vec{r}(t)\big)$. Zeichne die Bildgerade $\tilde{h} : \vec{v}(t) = S_g\big(\vec{r}(t)\big)$ $(t \in \mathbb{R})$ in das Koordinatensystem ein. Was beobachtest Du?



Fixpunkt und Fixgerade

Aufgabe 5

Gegeben ist die lineare Abbildung A durch

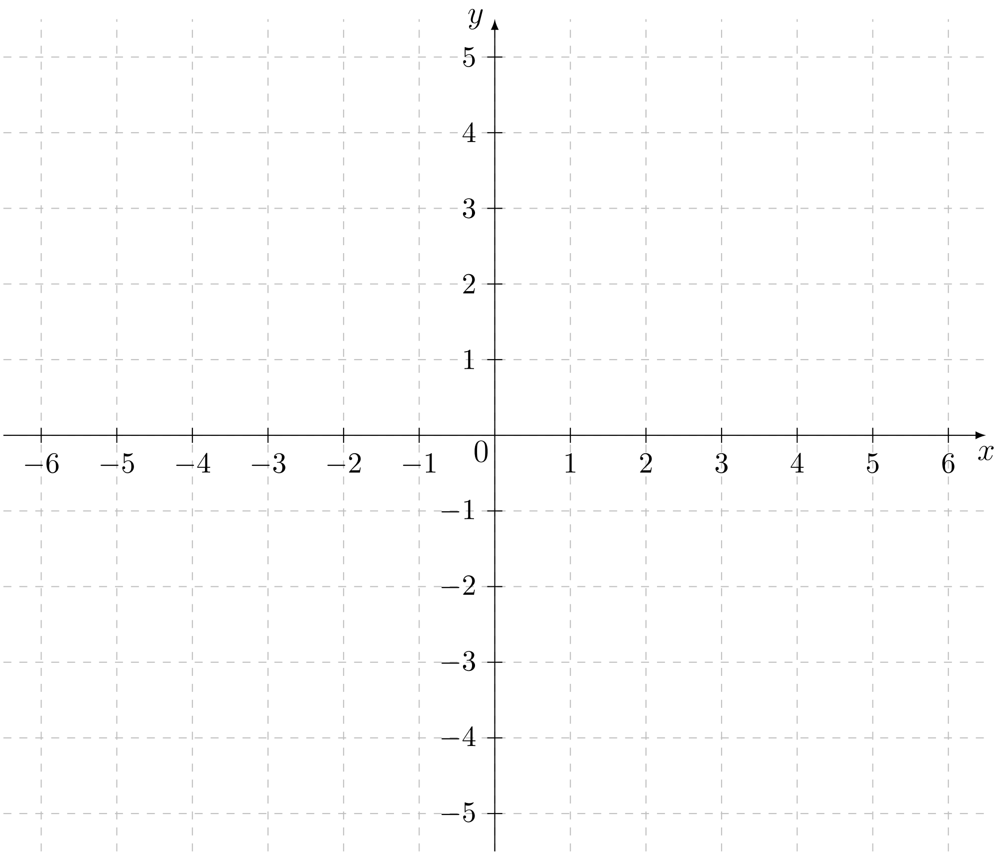
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Bestimme die Menge M_1 aller Fixpunkte.
Hinweis: Ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, der zu einem Fixpunkt $(v_x \mid v_y)$ gehört, ist Lösung der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{v}$.

b) Bestimme die Menge M_2 aller Vektoren $\vec{v}$, für die $A(\vec{v}) = 5 \cdot \vec{v}$ gilt.

c) Zeichne die beiden Mengen in das Koordinatensystem ein.

d) Gib drei verschiedene Fixgeraden h_1, h_2, h_3 von A in der Form $h_j : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ an ($j = 1, 2, 3$). Zeichne die drei Fixgeraden in das Koordinatensystem ein.
Hinweis: Bei Fixgeraden ist es geschickt, als Stützvektor $\vec{p}$ einen Vektor zu verwenden, der zu einem Fixpunkt gehört.



Zentrische Streckung

Aufgabe 6

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die zentrische Streckung

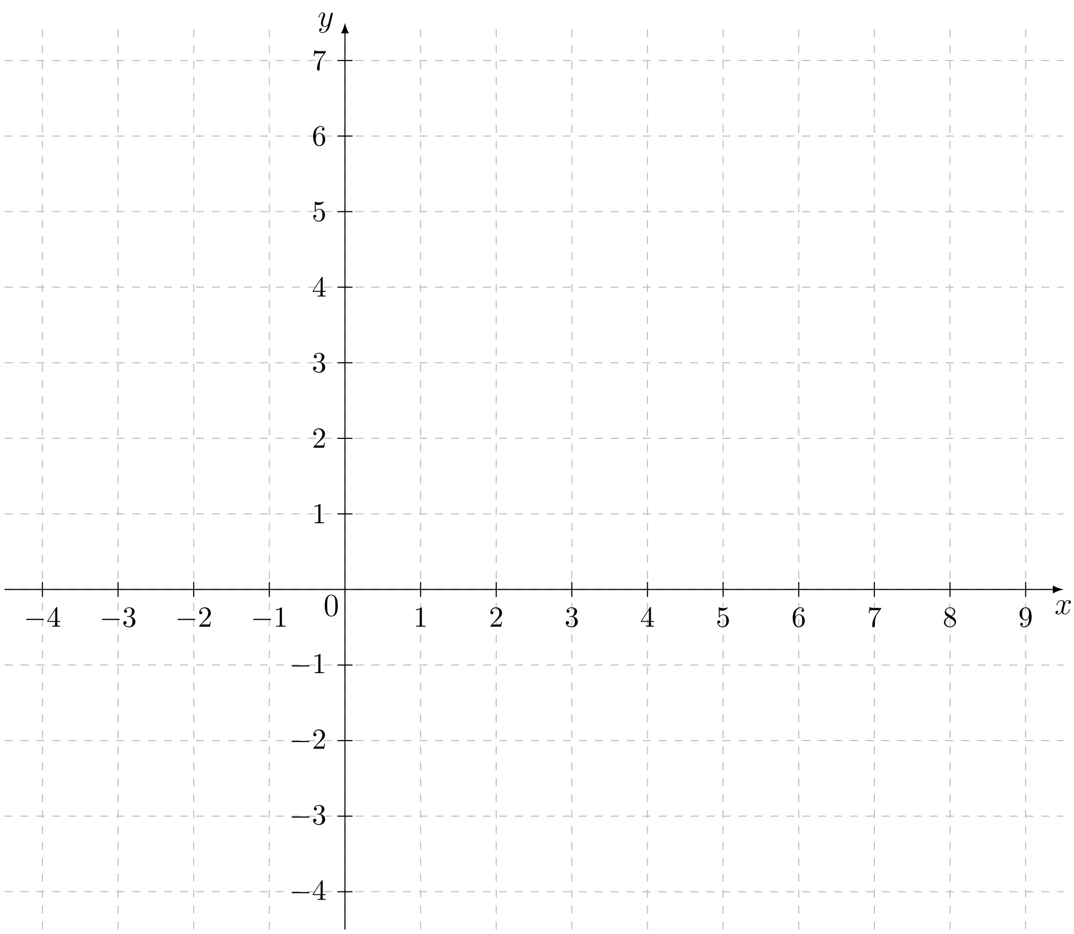
$$Z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die gestreckten Vektoren $Z(\vec{a})$, $Z(\vec{b})$ und $Z(\vec{c})$.

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in das Koordinatensystem ein und das Dreieck ABC, das durch die zugehörigen Punkte gegeben ist.

c) Zeichne die Standard-Pfeile von $Z(\vec{a}), Z(\vec{b}), Z(\vec{c})$ in das Koordinatensystem ein und das Dreieck $A'B'C'$, das durch die zugehörigen Punkte gegeben ist.

d) Was kannst Du anhand deiner Zeichnung bezüglich der Winkel und der Längen der beiden Dreiecke über die Abbildung Z aussagen? Bleiben Winkel und Längen erhalten?



Eulerabbildungen

Aufgabe 7

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die lineare Abbildung E mit dem Matrix-Schema

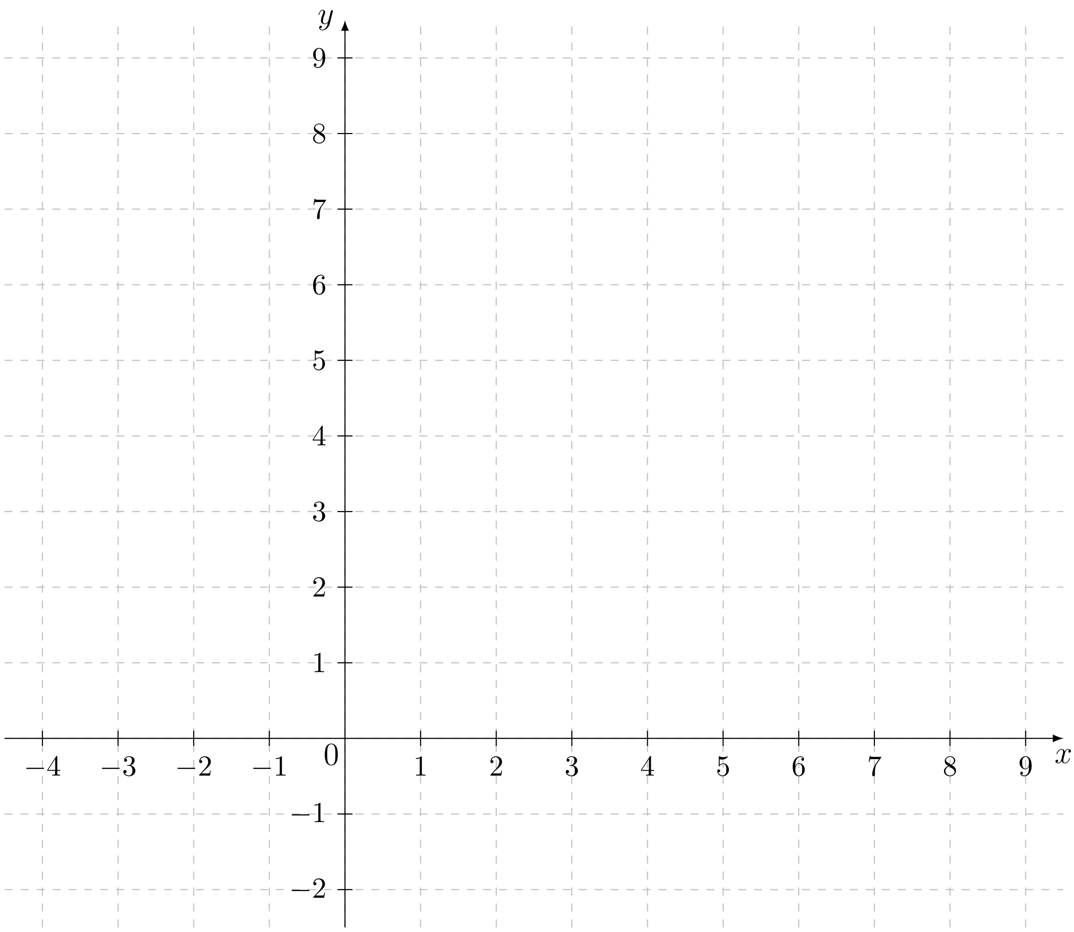
$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die Abbildungswerte $E(\vec{a})$, $E(\vec{b})$ und $E(\vec{c})$.

b) Zeichne die Standard-Pfeile von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in das Koordinatensystem ein und das Dreieck ABC, das durch die zugehörigen Punkte gegeben ist.

c) Zeichne die Standard-Pfeile von $E(\vec{a}), E(\vec{b}), E(\vec{c})$ in das Koordinatensystem ein und das Dreieck $A'B'C'$, das durch die zugehörigen Punkte gegeben ist.

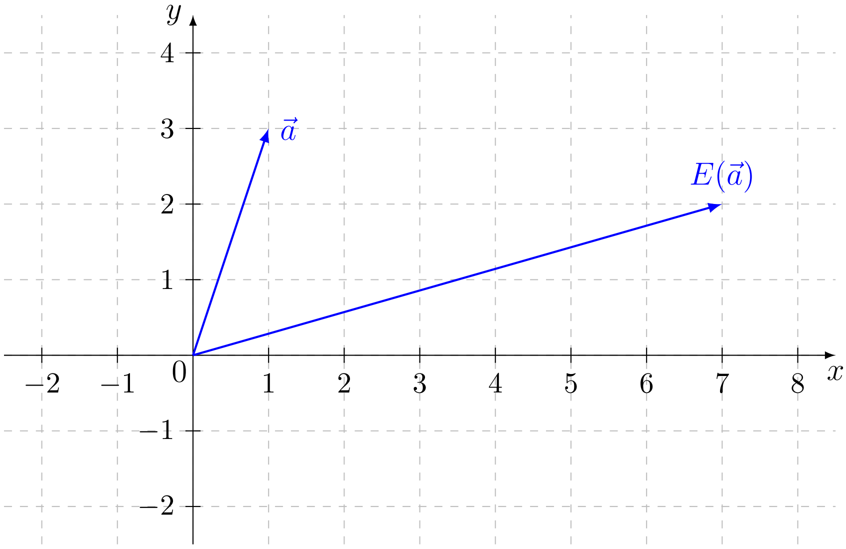
d) Was kannst Du anhand deiner Zeichnung bezüglich der Winkel und der Längen der beiden Dreiecke über die Abbildung E aussagen? Bleiben Winkel und Längen erhalten?



Weiter auf Seite 2

Aufgabe 8

Im Koordinatensystem sind der Vektor $\vec{a}$ und sein Abbildungswert $E(\vec{a})$ eingezeichnet. E ist eine Eulerabbildung.



a) Bestimme anhand der Graphik die Matrix von E. $E = \begin{bmatrix} \boxed{} & 0 \\ 0 & \boxed{} \end{bmatrix}$

b) Überprüfe deine Matrix, indem du $E(\vec{a})$ mit deiner Matrix ausrechnest und mit der Graphik vergleichst.

c) Bestimme rechnerisch alle Fixpunkte von E. Löse dazu die Gleichung $E\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

d) Gegeben ist die Gerade $g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. Berechne $E\big(\vec{s}(t)\big)$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Zeichne g und die Bildgerade $\tilde{g} : \vec{r}(t) = E\big(\vec{s}(t)\big)$ $(t \in \mathbb{R})$ in das Koordinatensystem ein. Was beobachtest Du?

Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 9

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Trage „w“ oder „f“ ein.

Aussage	w/f
Jede lineare Abbildung bildet Geraden auf Geraden ab.	
Jede lineare Abbildung hat mindestens den Fixpunkt $(0 \mid 0)$.	
Es gibt lineare Abbildungen, die nur einen Fixpunkt haben.	
Jede Fixpunktgerade ist eine Fixgerade	
Jede Fixgerade ist eine Fixpunktgerade	
Jede Geradenspiegelung hat unendlich viele Fixpunktgeraden.	
Jede Geradenspiegelung hat unendlich viele Fixgeraden.	
Jede Geradenspiegelung hat unendlich viele Fixpunkte.	
Ist Z eine zentrische Streckung, dann sind alle Ursprungsgeraden Fixgeraden von Z.	
Ist E eine Eulerabbildung, dann sind alle Ursprungsgeraden Fixgeraden von E.	
Ist D_α eine Drehung um $(0 \mid 0)$ mit Winkel α, $0° < \alpha < 360°$, dann sind alle Ursprungsgeraden Fixgeraden von D_α.	

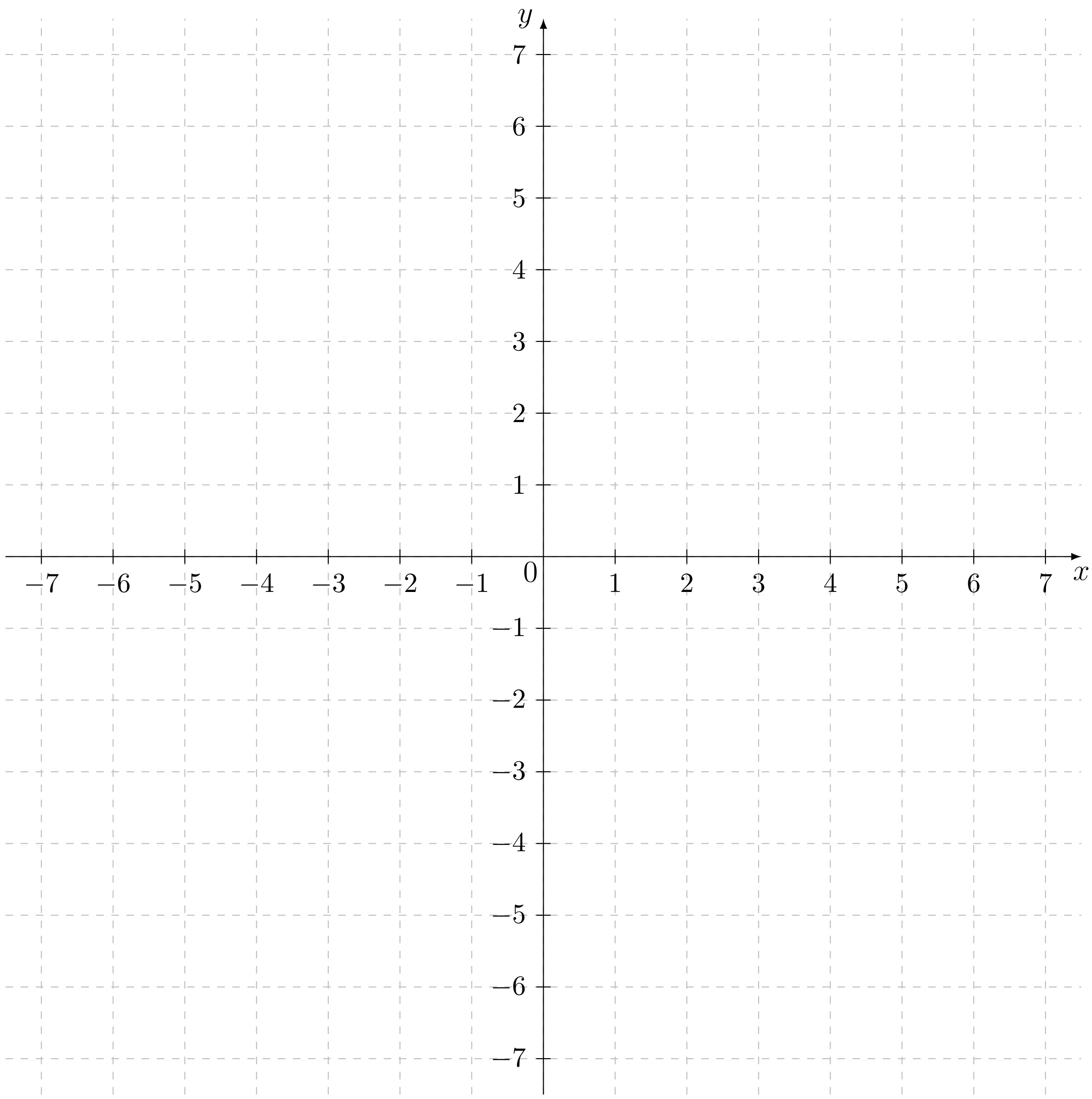
Weiter auf Seite 2

Aufgabe 10

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. Mit S_g sei die Spiegelung an g bezeichnet.

a) Zeichne g in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne in das Koordinatensystem drei verschiedene Fixgeraden h_1, h_2, h_3 von S_g ein, die keine Fixpunktgeraden von S_g sind.



Weiter auf Seite 3

Aufgabe 11

Gegeben ist die Eulerabbildung E mit der Matrixdarstellung

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Gib einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an, der die Gleichung $E(\vec{v}) = \vec{v}$ löst. $\vec{v} =$ $\boxed{}$

b) Gib die Fixpunktgerade von E an. $g : \vec{s}(t) =$ $\boxed{}$

c) Gib eine Fixgerade h_1 von E an, die keine Fixpunktgerade von E ist.

$$h_1 : \vec{s}(t) = \boxed{}$$

d) Da E eine Fixpunktgerade besitzt, gibt es noch mehr Fixgeraden von E. Gib eine weitere Fixgerade $h_2 \neq h_1$ von E an, die keine Fixpunktgerade von E ist.
Hinweis: Verwende als Stützvektor einen Vektor, der zu einem Fixpunkt von E gehört.

$$h_2 : \vec{s}(t) = \boxed{}$$

Weiter auf Seite 4

Aufgabe 12

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit der Matrixdarstellung

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die folgenden Abbildungswerte.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{}, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{}.$$

b) Gib einen Fixpunkt P von A an. P $\boxed{}$

c) Gib eine Fixpunktgerade von A an. $g : \vec{s}(t) = \boxed{}$

d) Gib einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ an, für den $A(\vec{v}) = 3 \cdot \vec{v}$ gilt. $\vec{v} = \boxed{}$

e) Gib eine Fixgerade von A an, die keine Fixpunktgerade von A ist.

$$h : \vec{s}(t) = \boxed{}$$

14 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 5: Geometrische Veranschaulichung linearer Abbildungen

14.1 Tafelanschriebe Einheit 5: Geometrische Veranschaulichung linearer Abbildungen

Schüler:innen schreiben die Wiederholung nicht mit.

Wiederholung

Definition: Eine Abbildung A heißt linear, wenn sie von der Form

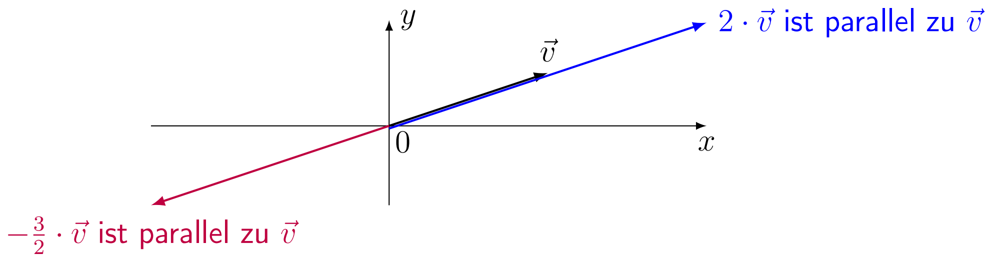
$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{a} + v_y \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

mit festen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ist.

Algebraische Eigenschaften: Für jede lineare Abbildung A gelten

(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ und
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$.

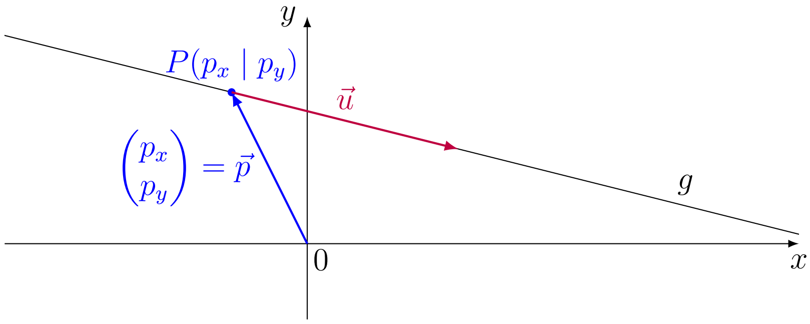
Parallelität: Zwei Vektoren $\vec{0} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$.



Geraden: Eine Gerade g ist durch

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

gegeben. Der Vektor $\vec{p}$ heißt Stützvektor und $\vec{u} \neq \vec{0}$ heißt Richtungsvektor.



Ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$, dann besteht die Gerade g aus dem Punkt $P(p_x \mid p_y)$ und aus allen Punkten, die durch Verschiebung des Punktes P mit beliebigem Vielfachen des Richtungsvektors entstehen.

Arbeitsblatt 5.1: Geraden, Matrizen (Besprechung an Tafel)

V. Geometrische Veranschaulichung linearer Abbildungen

1. Geometrische Bedeutung der Matrix

Definition: Die Vektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ heißen Einheitsvektoren. Der Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullvektor.

Merksatz: Ist A eine lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema

$$\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix},$$

so sind die Spalten $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ die Bilder der Einheitsvektoren. Das bedeutet, es gilt

$$A = [A(\vec{e}_x)\ A(\vec{e}_y)] = \left[A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

Arbeitsblatt 5.2: Matrizen aufstellen (Erste Aufgabe gemeinsam lösen, Besprechung an Tafel)

Satz: Ist A eine Abbildung der Ebene, die die Eigenschaften

(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ und
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$.

besitzt, so ist sie linear. Damit sind die Eigenschaften (L1) und (L2) äquivalent zur Definition linearer Abbildungen.

Beweis: Letzte Übungsaufgabe.

Arbeitsblatt 5.3: Abbildungswert des Nullvektors (Besprechung an Tafel)

2. Geometrische Eigenschaften

Definition: Zwei Geraden

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u}, \quad h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \vec{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

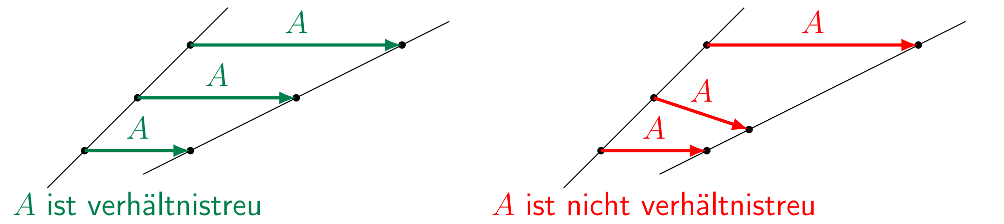
heißen parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind, d.h. wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$ gilt. Dann kann h auch mit dem Richtungsvektor von g geschrieben werden:

$$h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \lambda \cdot \vec{u} = \vec{q} + t' \cdot \vec{u} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Satz: Eine lineare Abbildung A besitzt folgende geometrische Eigenschaften.

Zentriertheit:	A fixiert den Ursprung, d.h. es gilt $A(\vec{0}) = \vec{0}$.
Geradentreue:	Jede Gerade wird durch A entweder verhältnistreu auf eine Gerade oder auf einen Vektor abgebildet.
Parallelentreue:	Werden zwei parallele Geraden wieder auf Geraden abgebildet, so sind die Bildgeraden wieder parallel oder gleich.

Verhältnistreue am Gummiband demonstrieren.



Arbeitsblatt 5.4: Linearität (Erste Aufgabe gemeinsam lösen, Besprechung an Tafel)

Beweis: 1) Zentriertheit: Siehe Aufgabe 6.

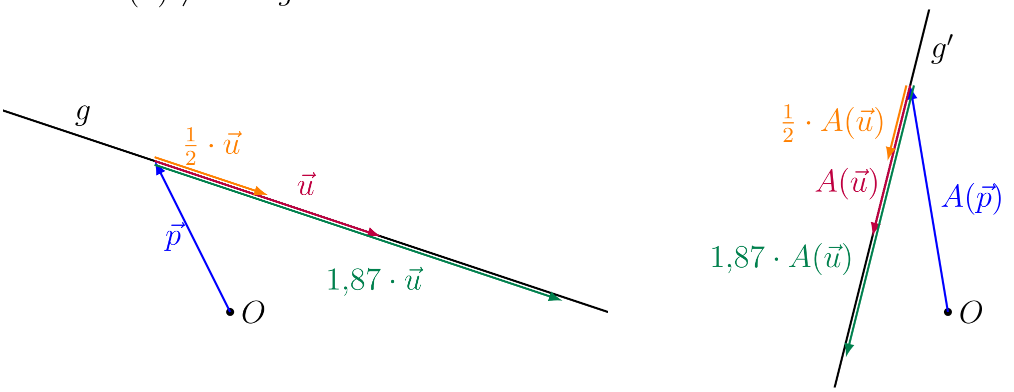
2) Geradentreue: Die Gerade

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

wird auf

$$g' : \vec{r}(t) = A\big(\vec{s}(t)\big) = A(\vec{p} + t \cdot \vec{u}) \overset{\text{(L1)}}{=} A(\vec{p}) + A(t \cdot \vec{u}) \overset{\text{(L2)}}{=} A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

abgebildet.
Im Fall $A(\vec{u}) = \vec{0}$ besteht g' nur aus einem Vektor.
Im Fall $A(\vec{u}) \neq \vec{0}$ ist g' eine Gerade.



Außerdem sieht man: Zwei Punkte im Abstand $1 \cdot \|\vec{u}\|$ (oder $\frac{1}{2} \cdot \|\vec{u}\|$ oder $1{,}87 \cdot \|\vec{u}\|$) werden auf Punkte im Abstand $1 \cdot \|A(\vec{u})\|$ (oder $\frac{1}{2} \cdot \|A(\vec{u})\|$ oder $1{,}87 \cdot \|A(\vec{u})\|$) abgebildet. Daher ist die Abbildung verhältnistreu.

3) Parallelentreue: Sind $g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ und $h : \vec{s}(t) = \vec{q} + t \cdot \vec{u}$ parallele Geraden, dann sind die Bildgeraden

$$g' : \vec{s}(t) = A(\vec{p}) + t \cdot A(\vec{u}) \text{ und } h' : \vec{s}(t) = A(\vec{q}) + t \cdot A(\vec{u})$$

wieder parallel oder identisch, falls z.B. $A(\vec{p}) = A(\vec{q})$ gilt. □

3. Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition: Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heißt Eigenvektor (EV) der linearen Abbildung A, wenn

$$A(\vec{v}) \;=\; \lambda \cdot \vec{v}$$

für eine reelle Zahl λ gilt. Dann heißt λ Eigenwert (EW) von A zum Eigenvektor $\vec{v}$.
Eigenvektoren behalten unter der Abbildung A ihre Richtung bei und werden dabei mit ihrem Eigenwert λ gestreckt (Achtung: Im Fall $\lambda < 0$ wird die Pfeilrichtung umgedreht).

Bemerkung: Ist $\vec{v}$ ein EV von A zum EW λ, dann ist auch jeder Vektor $s \cdot \vec{v}$ mit $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, ein EV von A zum EW λ, denn

$$A(\underbrace{s \cdot \vec{v}}) \overset{\text{L2}}{=} s \cdot A(\vec{v}) = s \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\underbrace{s \cdot \vec{v}})$$

Arbeitsblatt 5.5: Eigenvektoren und Eigenwerte (Erste Aufgabe gemeinsam lösen, Besprechung an Tafel)

14.2 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Geraden, Matrizen

Wiederholung

Definition: Eine Abbildung A heißt linear, wenn sie von der Form

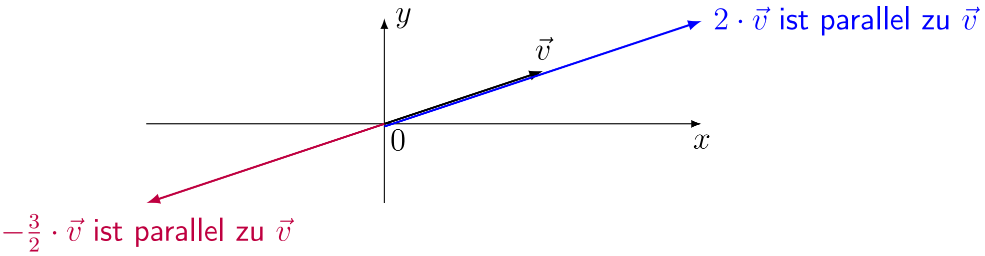
$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{a} + v_y \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

mit festen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ist.

Algebraische Eigenschaften: Für jede lineare Abbildung A gelten

(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ und
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$.

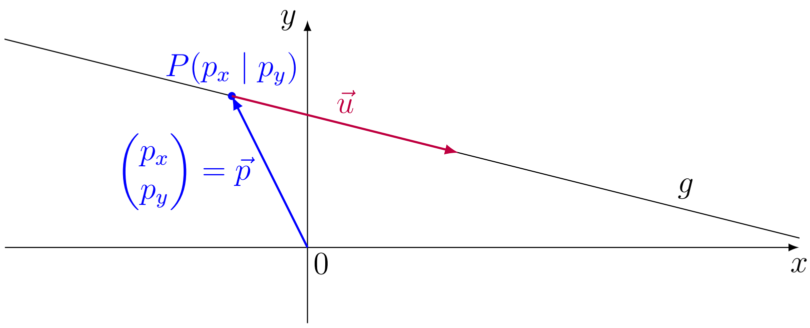
Parallelität: Zwei Vektoren $\vec{0} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$.



Geraden: Eine Gerade g ist durch

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

gegeben. Der Vektor $\vec{p}$ heißt Stützvektor und $\vec{u} \neq \vec{0}$ heißt Richtungsvektor.



Ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$, dann besteht die Gerade g aus dem Punkt $P(p_x \mid p_y)$ und aus allen Punkten, die durch Verschiebung des Punktes P mit beliebigem Vielfachen des Richtungsvektors entstehen.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 1

Gegeben sind die Geraden

$$g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad h : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

und die Abbildung A mit dem Matrix-Schema

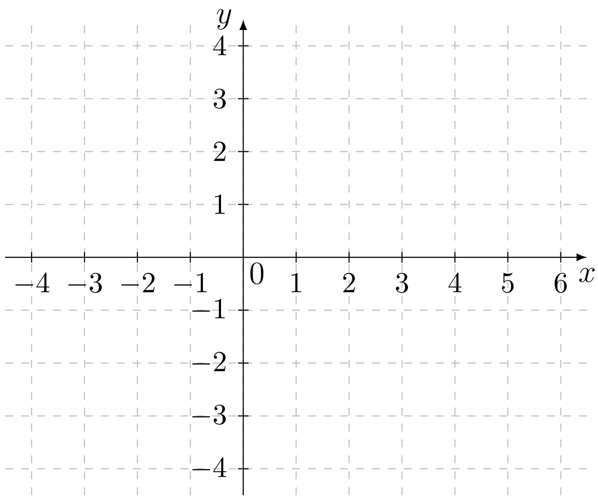
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

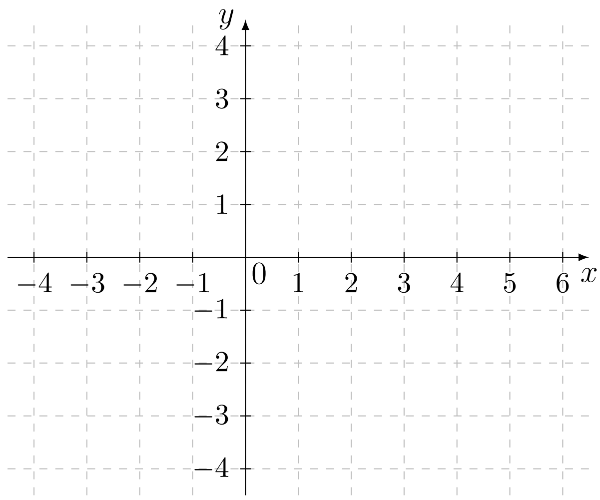
a) Zeichne die Geraden in das linke Koordinatensystem ein. Warum sind die Geraden parallel?

b) Die Geraden werden mit der Abbildung A abgebildet. Berechne die Bildgeraden.

$$g' : \vec{s}(t) = \boxed{\quad\quad} + t\cdot \boxed{\quad\quad} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad h' : \vec{s}(t) = \boxed{\quad\quad} + t\cdot \boxed{\quad\quad} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Zeichne die Bildgeraden g', h' in das rechte Koordinatensystem ein. Sind sie parallel?





Aufgabe 2

Es seien $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsvektoren und A eine lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ (a_x, a_y, b_x, b_y sind irgendwelche reellen Zahlen).

a) Berechne die Abbildungswerte der Einheitsvektoren und gib sie mit Hilfe der Einträge a_x, a_y, b_x, b_y an.

$$A(\vec{e}_x) = \boxed{\quad\quad}, \quad A(\vec{e}_y) = \boxed{\quad\quad}.$$

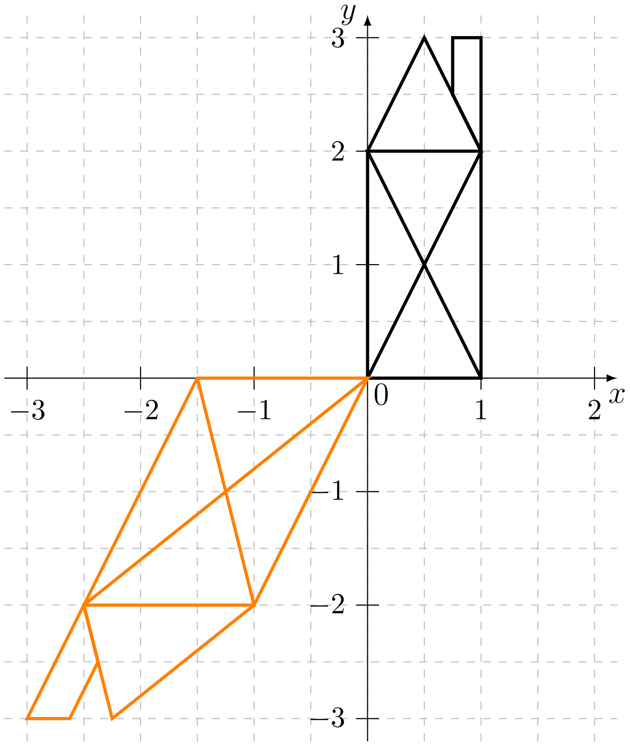
b) Ergänze mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil a) die Formeln im folgenden Satz.
Im Matrix-Schema der Abbildung A steht in der ersten Spalte der Vektor

$\vec{a} = \boxed{\quad\quad}$ und in der zweiten Spalte der Vektor $\vec{b} = \boxed{\quad\quad}$.

Matrizen aufstellen

Aufgabe 3

A sei die lineare Abbildung, die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet. Lies aus der Graphik $A(\vec{e}_x)$, $A(\vec{e}_y)$ ab und gib das Matrix-Schema von A an.



Weiter auf Seite 2

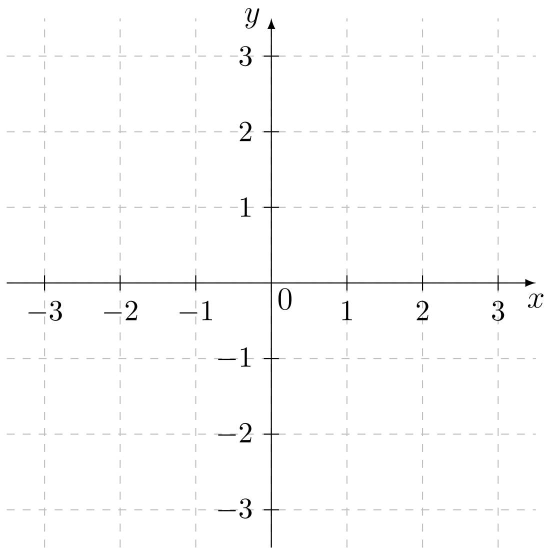
Aufgabe 4

Bestimme jeweils die Abbildungswerte der Einheitsvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ unter der beschriebenen Abbildung und stelle damit das Matrix-Schema auf, das die Abbildung beschreibt. Kontrolliere deine Matrix, indem Du mit der Matrix den Abbildungswert des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ berechnest und $\vec{v}$ und seinen Abbildungswert in das Koordinatensystem einzeichnest.
Tipp: Wenn du z.B. den Vektor $\vec{e}_x$ und seinen Abbildungswert einzeichnest, kannst du die Koordinaten des Abbildungswertes von $\vec{e}_x$ direkt ablesen.

a) A sei die Spiegelung an der y-Achse.

$A =$

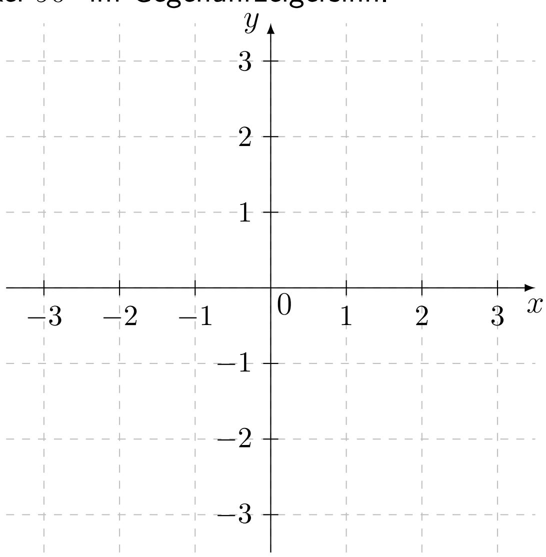
$A(\vec{v}) =$



b) D sei die Drehung um den Ursprung mit Winkel $90°$ im Gegenuhrzeigersinn.

$D =$

$D(\vec{v}) =$



Weiter auf Seite 3

Aufgabe 5

Es sei A eine beliebige Abbildung der Ebene, die die Eigenschaften (L1) und (L2) besitzt (mehr wird nicht vorausgesetzt). Weiter seien die Abbildungswerte $A(\vec{e}_x)$ und $A(\vec{e}_y)$ der Einheitsvektoren bekannt.

a) Drücke den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ mit beliebigen Koordinaten v_x und v_y als Summe der Vektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ multipliziert mit geeigneten Faktoren aus.

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \vec{e}_x + \boxed{} \cdot \vec{e}_y.$$

b) Drücke den Abbildungswert $A(\vec{v})$ mit Hilfe der Vektoren $A(\vec{e}_x)$ und $A(\vec{e}_y)$ aus. Verwende dazu das Ergebnis aus Teil a) und die Eigenschaften (L1) und (L2).

$$A(\vec{v}) = \boxed{}.$$

c) Folgere, dass A linear ist und gib das Matrix-Schema von A mit Hilfe der Vektoren $A(\vec{e}_x)$ und $A(\vec{e}_y)$ an.

$$A = \boxed{}.$$

Abbildungswert des Nullvektors

Aufgabe 6

Gegeben ist eine lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$.

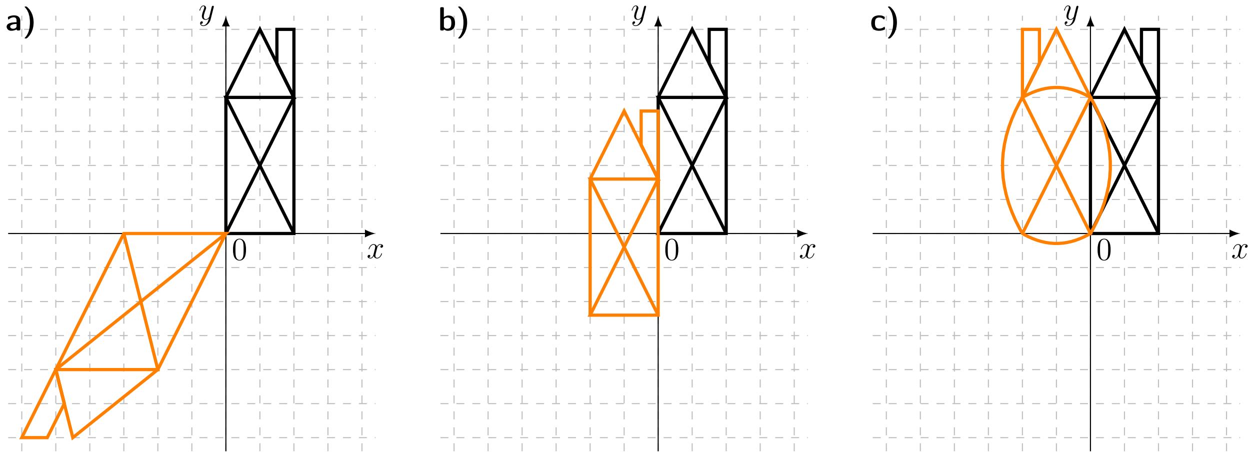
a) Berechne $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Matrix-Schemas.

b) Verwende die Eigenschaft (L2) mit geschickt gewähltem λ, um $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu beweisen.

Linearität

Aufgabe 7

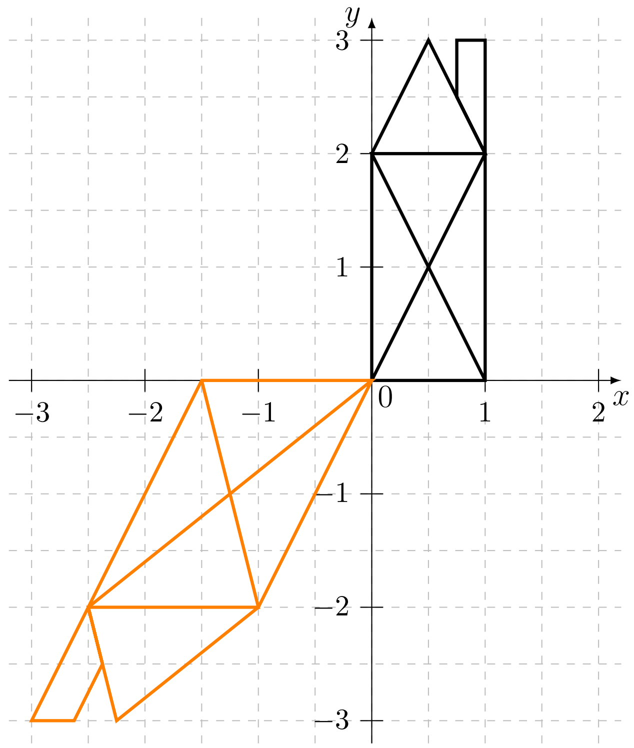
In jeder Teilaufgabe sei A die Abbildung, die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet. Beantworte jeweils die Frage: Kann die Abbildung A linear sein oder ist sie sicher nicht linear?



Eigenvektoren und Eigenwerte

Aufgabe 8

A sei die lineare Abbildung, die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet. Kannst Du einen oder mehrere Eigenvektor(en) von A sehen? Welcher Eigenwert gehört dazu?



Aufgabe 9

Gegeben sind ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die linearen Abbildungen A, B, C durch ihr Matrizen-Schema

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die Abbildungswerte $A(\vec{v})$, $B(\vec{v})$ und $C(\vec{v})$.

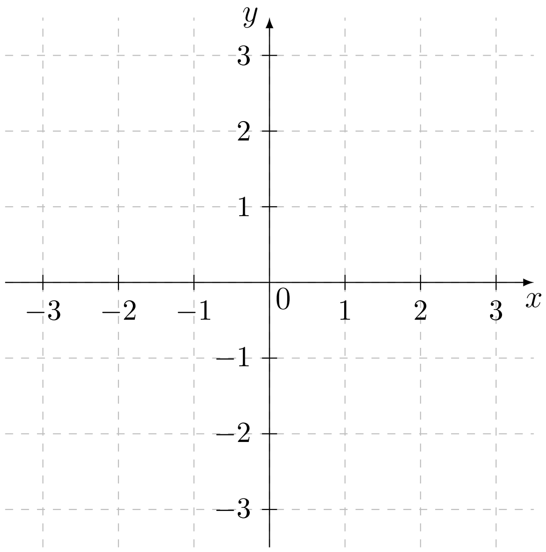
b) Entscheide jeweils, ob $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A, von B oder von C ist. Gib gegebenenfalls den zugehörigen Eigenwert an.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 10

Sei S_g die Spiegelung an der Geraden

$$g : \vec{s}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$



a) Zeichne die Fixpunktegerade von S_g in das Koordinatensystem ein.

b) Zeichne die Fixgerade von S_g ein, die durch den Ursprung geht und verschieden von der Fixpunktgeraden ist.

c) Gib zwei verschiedene Eigenvektoren von S_g an, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören.

Aufgabe 11

a) Sei Z die zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $k = 2$. Gib alle Eigenvektoren von Z mit dem zugehörigen Eigenwert an.

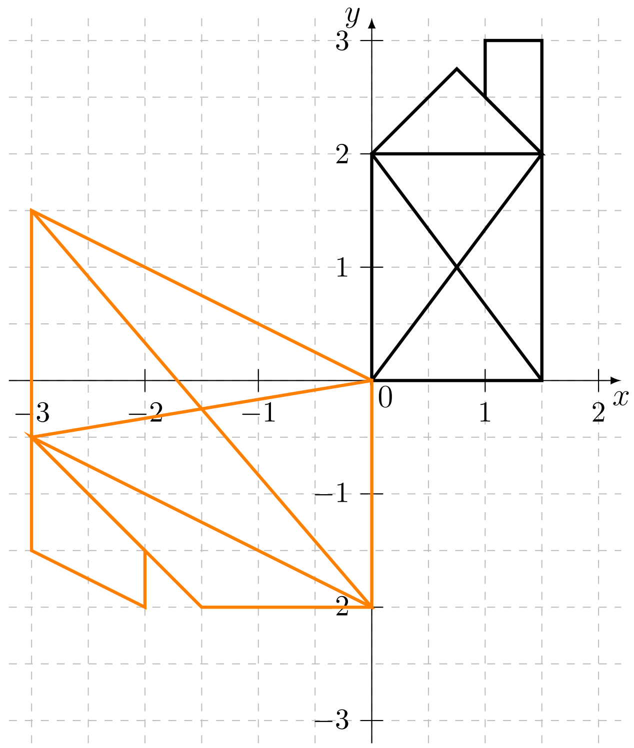
b) Sei D_{120} die Drehung um $O(0 \mid 0)$ mit Winkel $120°$. Gib alle Fixpunkte von D_{120} an. Besitzt D_{120} Eigenvektoren und Eigenwerte?

Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 12

Es sei A die lineare Abbildung, die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet.



a) Zeichne $\vec{e}_x$, $A(\vec{e}_x)$, $\vec{e}_y$ und $A(\vec{e}_y)$ in der Graphik ein.

b) Gib die Koordinaten von $A(\vec{e}_x)$ und $A(\vec{e}_y)$ an.

$A(\vec{e}_x) = \boxed{}$,

$A(\vec{e}_y) = \boxed{}$.

c) Gib das Matrix-Schema der Abbildung an.

$A = \boxed{}$.

Aufgabe 13

Gegeben sind die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

und die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Abbildungswerte.

$A(\vec{v}_1) = \boxed{}$, $A(\vec{v}_2) = \boxed{}$, $A(\vec{v}_3) = \boxed{}$.

b) Kreuze an, falls $\vec{v}_j$ kein Eigenvektor ist, oder gib andernfalls den Eigenwert an.

	kein EV	EV zum EW
$\vec{v}_1$ ist		
$\vec{v}_2$ ist		
$\vec{v}_3$ ist		

Aufgabe 14

Gegeben ist die Eulerabbildung E mit dem Matrix-Schema

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Gib zwei verschiedene Eigenvektoren an, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören.

Eigenvektor $\vec{v}_1 =$ ☐, zugehöriger Eigenwert $\lambda_1 =$ ☐,

Eigenvektor $\vec{v}_2 =$ ☐, zugehöriger Eigenwert $\lambda_2 =$ ☐.

Aufgabe 15

Für die lineare Abbildung A sind die Abbildungswerte der Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bekannt:

$$A(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Verwende die Eigenschaften (L1) und (L2) zur Berechnung der folgenden Abbildungswerte.

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \square,$$

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = A(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \square.$$

b) Verwende die Eigenschaft (L2) zur Berechnung der folgenden Abbildungswerte.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \square,$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \square.$$

c) Gib das Matrix-Schema für A an. $A =$ ☐.

15 Ausarbeitung Unterrichtsstunde 6: Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

15.1 Tafelanschriebe Einheit 6: Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

Arbeitsblatt 6.1: Eigenvektoren (Besprechung an Tafel)

VI. Eigenvektoren und Eigenwerte

1. Eigenvektoren berechnen

Satz: Ist ein Eigenwert λ einer linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ bekannt, so erhält man die zugehörigen Eigenvektoren als Lösung der Gleichung

$$\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. äquivalent

$$v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x - \lambda \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

D.h. man bestimmt Lösungen v_x, v_y des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & (a_x - \lambda)\, v_x + b_x\, v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & a_y\, v_x + (b_y - \lambda)\, v_y & = & 0 \end{array}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \text{(Eigenvektorgleichung)} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_x \\ \lambda v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - v_x \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} - v_y \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & v_x \cdot \begin{pmatrix} a_x - \lambda \\ a_y \end{pmatrix} + v_y \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & (*) \end{aligned}$$

$\square$

Arbeitsblatt 6.2: Berechnung von Eigenvektoren (Besprechung an Tafel)

2. Determinanten

Satz: Gegeben seien a_x, a_y, b_x, b_y. Gesucht sind alle Lösungen x, y des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. äquivalent

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & a_x\,v_x + b_x\,v_y & = & 0 \\ \text{(ii)} & a_y\,v_x + b_y\,v_y & = & 0 \end{array}.$$

1) Im Fall $a_x b_y - a_y b_x = 0$ besitzt das Gleichungssystem die Lösungen

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ -a_x \end{pmatrix} \qquad \text{mit } s \in \mathbb{R}.$$

2) Im Fall $a_x b_y - a_y b_x \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem nur die Lösung $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beweis: 1) Einsetzen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & a_x\,(sb_x) + b_x\,(-sa_x) & = & 0 \quad \checkmark \\ \text{(ii)} & a_y\,(sb_x) + b_y\,(-sa_x) & = & s(\underbrace{a_y b_x - b_y a_x}_{=0}) \;=\; 0 \quad \checkmark \end{array}$$

2) Wegen $a_x b_y - a_y b_x \neq 0$ muss $a_x \neq 0$ oder $a_y \neq 0$ gelten.

Fall $a_x \neq 0$: (i) $\Rightarrow\ a_x\,v_x = -b_x\,v_y \ \Rightarrow\ v_x = -\dfrac{b_y}{a_x}\,v_y$

In (ii) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & a_y \cdot \Big(-\frac{b_y}{a_x}\,v_y\Big) + b_y\,v_y = 0 \\ \Rightarrow\quad & -a_y b_x\,v_y + a_x b_y\,v_y = 0 \\ \Rightarrow\quad & v_y \cdot (\underbrace{-a_y b_x + a_x b_y}_{\neq 0}) = 0 \\ \Rightarrow\quad & v_y = 0 \\ \Rightarrow\quad & v_x = -\frac{b_y}{a_x}\,0 = 0 \\ \Rightarrow\quad & \begin{pmatrix} v_x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fall $a_x = 0$: Dann muss $a_y \neq 0$ gelten und man kann (ii) nach v_x auflösen. Rest wie im anderen Fall. □

Definition: Die Determinante $\det(A)$ einer linearen Abbildung ist definiert durch

$$\det(A) \;=\; \det\left(\begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}\right) \;=\; a_x b_y - a_y b_x.$$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$

Wegen $\det(A) \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem $A(\vec{v}) = \vec{0}$ die einzige Lösung $\vec{v} = \vec{0}$.

Arbeitsblatt 6.3: Determinanten (Besprechung an Tafel)

3. Eigenwertberechnung

Definition: Das charakteristische Polynom P_A einer linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ ist definiert durch

$$P_a(\lambda) \;=\; \det\left(\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix} \right).$$

Satz: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms P_A sind genau die Eigenwerte von A.

Beweis: $P_A(\lambda) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix} \right) \;=\; 0$$

$\overset{\text{voriger Satz}}{\Leftrightarrow}$ $\begin{bmatrix} a_x - \lambda & b_x \\ a_y & b_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt mindestens eine Lösung $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{erster Satz}}{\Leftrightarrow}$ Die Lösung $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ. $\square$

Beispiel: Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 1 \\ &= 12 - 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Es ist P_A ein quadratisches Polynom.

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-10}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$.

Die Abbildung A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \dfrac{10}{2} = 5$ und $\lambda_2 = \dfrac{4}{2} = 2$.

EVen zum EW $\lambda_1 = 5$: Löse

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & -2v_x + v_y &=& 0 \\ \text{(ii)} & 2v_x - v_y &=& 0 \end{array} \quad \Rightarrow \; \vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; (s \in \mathbb{R},\, s \neq 0).$$

EVen zum EW $\lambda_2 = 2$: Löse

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & v_x + v_y &=& 0 \\ \text{(ii)} & 2v_x + 2v_y &=& 0 \end{array} \quad \Rightarrow \; \vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; (s \in \mathbb{R},\, s \neq 0).$$

Arbeitsblatt 6.4: Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren (Besprechung an Tafel)

15.2 Arbeitsblätter

Siehe folgende Seiten

Eigenvektoren

Aufgabe 1

a) Gib die Eigenvektor-Gleichung für einen Eigenvektor $\vec{v}$ der linearen Abbildung A zum Eigenwert λ an.

b) Beschreibe, was bei der Abbildung eines Eigenvektors mit diesem geschieht.

c) Zeige, dass der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ist. Gib auch den zugehörigen Eigenwert an.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 2

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
Die Abbildung A besitzt Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$. Fülle die Lücken in den Teilaufgaben und finde einen Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$.

a) Um einen Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$ zu berechnen, muss folgende Gleichung gelöst werden.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \square \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

b) Nun wird die Matrix auf den Vektor angewandt. Die rechte Seite bleibt unverändert.

$$v_x \cdot \left(\square \right) + v_y \cdot \left(\square \right) = \square \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

c) Nun kann die rechte Seite geschickt umgeschrieben werden.

$$v_x \cdot \left(\square \right) + v_y \cdot \left(\square \right) = v_x \cdot \left(\square \right) + v_y \cdot \left(\square \right).$$

d) Die Ausdrücke der rechten Seite auf beiden Seiten abziehen.

$$v_x \cdot \left(\square \right) - v_x \cdot \left(\square \right) + v_y \cdot \left(\square \right) - v_y \cdot \left(\square \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Die Ausdrücke mit v_x bzw. mit v_y jeweils zusammenfassen.

$$v_x \cdot \left(\square \right) + v_y \cdot \left(\square \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

f) Die linke Seite als einen Vektor schreiben.

$$\left(\square \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

g) Damit die Gleichung aus f) gilt, müssen die folgenden zwei Gleichungen erfüllt sein.
(i) $\square = 0$ und (ii) $\square = 0$.

h) Die beiden Gleichungen sind $\square$.

i) Errate eine Lösung und gib einen Eigenvektor an. $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \left(\square \right)$.

Berechnung von Eigenvektoren

Aufgabe 3

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 8$.

a) Berechne alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Gehe hierzu folgendermaßen vor:

a$_1$) Setze die gegebenen Daten für $a_x, a_y, b_x, b_y, \lambda$ in die Gleichungen (i) und (ii) aus dem letzten Satz ein.

(i) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$

(ii) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$

a$_2$) Löse jede der beiden Gleichungen nach v_x auf. Was beobachtest Du?

(i) $\Leftrightarrow \boxed{}\, v_x = \boxed{}\, v_y \Leftrightarrow v_x = \boxed{}$

(ii) $\Leftrightarrow \boxed{}\, v_x = \boxed{}\, v_y \Leftrightarrow v_x = \boxed{}$

Beobachtung: $\boxed{}$

a$_3$) Gib einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ an, dessen Koordinaten die Gleichungen (i) und (ii) erfüllen.
Hinweis: Du kannst z.B. für v_y eine Zahl wählen und dann v_x berechnen.

$\vec{v} = \boxed{}$

a$_4$) Gib alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ an, deren Koordinaten die Gleichungen (i) und (ii) erfüllen.
Hinweis: Es ist geschickt, $v_y = 2s$ zu setzen, wobei s alle reellen Zahlen durchläuft.

$\vec{v} = \boxed{}$

a$_5$) Welche der Vektoren aus der letzten Teilaufgabe sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$?

$\boxed{}$

b) Berechne entsprechend alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$.

Determinanten

Aufgabe 4

In jeder Teilaufgabe ist eine lineare Abbildung A mit dem angegebenen Matrix-Schema gegeben. Bestimme jeweils die Determinante $\det(A)$ und gib alle Lösungen der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ an.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, **c)** $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Die folgenden beiden Aufgaben behandeln die geometrische Bedeutung der Determinante. Der Wert der Determinante einer linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ gibt bis auf Vorzeichen den Flächeninhalt des Parallelogramms an, welches durch die Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ aufgespannt wird (siehe grünes Parallelogramm in der letzten Aufgabe).

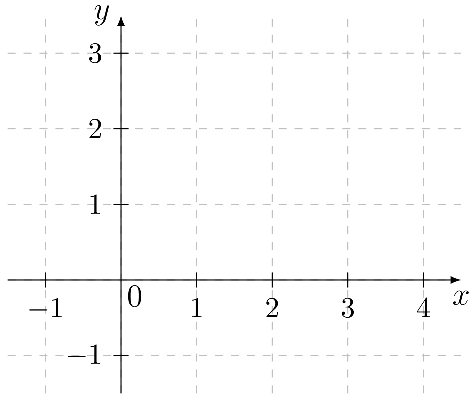
Aufgabe 5

a) Gegeben ist $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a$_1$) Berechne die Determinante von A.

a$_2$) Zeichne die Standard-Pfeile der Spaltenvektoren von A in das Koordinatensystem ein und das von ihnen aufgespannte Parallelogramm.

a$_3$) Berechne den Flächeninhalt des gezeichneten Parallelogramms mit der aus der Schule bekannten Formel („Grundseite Mal Höhe“). Wähle die Grundseite geschickt, so dass die passende Höhe leicht abzulesen ist.



b) Nun sei $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

b$_1$) Beschreibe den Unterschied zwischen den Matrizen von A und von B.

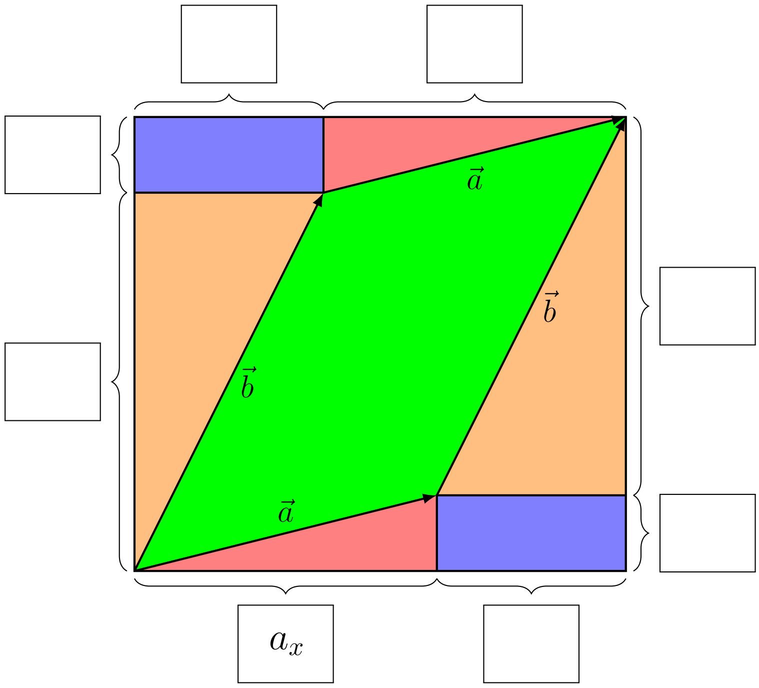
b$_2$) Berechne die Determinante von B. Was beobachtest Du?

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 6

Wir betrachten eine allgemeine lineare Abbildung $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ mit den Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$.

a) Trage in der Graphik die fehlenden Werte in die Kästchen ein.



b) Berechne in Abhängigkeit von a_x, a_y, b_x, b_y:

b₁) Den Flächeninhalt des gesamten großen Rechtecks. Bitte Klammern ausmultiplizieren.

$F_{\text{Rechteck}} = \boxed{}$

b₂) Den Flächeninhalt der beiden blauen Rechtecke zusammen. $F_{\text{blau}} = \boxed{}$

b₃) Den Flächeninhalt der beiden roten Dreiecke zusammen. $F_{\text{rot}} = \boxed{}$

b₄) Den Flächeninhalt der beiden orangen Dreiecke zusammen. $F_{\text{orange}} = \boxed{}$

b₅) Den Flächeninhalt des grünen Parallelogramms, indem du vom Flächeninhalt des großen Rechtecks die Flächeninhalte der eingezeichneten Dreiecke und Rechtecke abziehst.

$F_{\text{grün}} = \boxed{}$

c) Vergleiche Dein Ergebnis mit der Formel für die Determinante von A.

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Aufgabe 7

a) Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berechne das charakteristische Polynom P_A, gib alle Eigenwerte von A an und bestimme zu jedem der Eigenwerte einen Eigenvektor.

b) Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Berechne das charakteristische Polynom P_B. Was kannst Du über Eigenwerte von B aussagen?

Aufgabe 8

a) Gegeben ist eine Abbildung D mit dem Matrix-Schema

$$D = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ 0 & b_y \end{bmatrix}.$$

Eine Matrix dieser Form heißt **obere Dreiecksmatrix**. Für diese Aufgabe wird $a_x \neq b_y$ vorausgesetzt.

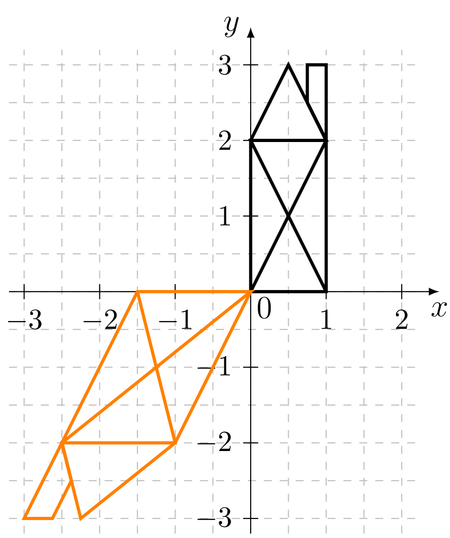
a$_1$) Berechne das charakteristische Polynom P_D in Abhängigkeit von a_x, b_x, b_y.
Hinweis: Hier ist es sinnvoll, Klammern nicht auszumultiplizieren. Für die nächste Teilaufgabe kann dann der Satz vom Nullprodukt verwendet werden.

a$_2$) Gib die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 von D in Abhängigkeit von a_x, b_x, b_y an.

b) Gegeben ist die Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

die das schwarze Haus auf das orange Haus abbildet. Wir hatten bereits den Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmt. Gib den zweiten Eigenwert λ_2 von A an und bestimme einen zugehörigen Eigenvektor.



Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 9

Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Trage „w“ oder „f“ ein.

Aussage	w/f
Null kann Eigenwert einer linearen Abbildung sein.	
Der Nullvektor kann Eigenvektor einer linearen Abbildung sein.	
Ist die Determinante einer Matrix Null, dann hat sie Null als Eigenwert.	
Es gibt lineare Abbildungen, die keinen Eigenwert besitzen.	
Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, dann ist $t \cdot \vec{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $t\lambda$	
Die Determinante einer Matrix ist immer nichtnegativ.	
Jede Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist Eigenwert von A.	
Die Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ hat immer genau eine Lösung.	
Ist $\vec{v}$ eine Lösung der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$, dann ist auch $t \cdot \vec{v}$ mit beliebigem $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Gleichung.	
Eine Abbildung mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ besitzt maximal zwei Eigenwerte.	
Ist $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, so ist jeder Vektor außer dem Nullvektor ein Eigenvektor von A.	

Aufgabe 10

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die Determinate $\det(A) = \boxed{}$.

b) Gib alle Lösungen der Gleichung $A(\vec{v}) = \vec{0}$ an.

$\boxed{}$.

c) Gib einen Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 0$ an. $\vec{v} = \boxed{}$.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 11

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Gib das charakteristische Polynom an. Multipliziere alle Klammern aus.

$P_A = \boxed{}$.

b) Berechne die Eigenwerte von A. $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$.

c) Gib zum Eigenwert λ_1 die Gleichungen (i) und (ii) zur Berechnung der Eigenvektoren an.

(i) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$ (ii) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$

d) Gib alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_1 an. $\vec{v} = \boxed{}$.

e) Gib zum Eigenwert λ_2 die Gleichungen (i) und (ii) zur Berechnung der Eigenvektoren an.

(i) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$ (ii) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y = 0$

f) Gib alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_2 an. $\vec{v} = \boxed{}$.

Aufgabe 12

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Gib das charakteristische Polynom an. Multipliziere die Klammern nicht aus!

$P_A = \boxed{}$.

b) Gib die Eigenwerte von A an. $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$.

c) Gib alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_1 an. $\vec{v} = \boxed{}$.

d) Gib alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_2 an. $\vec{v} = \boxed{}$.