Universität Stuttgart

TEAM:
KAPITÄN:

Schülerwettbewerb Mathematik 2017

Lösungen

- Jede Mannschaft bestimmt einen Kapitän, dieser ist für die Kommunikation zwischen Mannschaft und Organisatoren, die Abgabe der Lösungen und die Übergabe der Auswertungen am Ende vor der Siegerehrung verantwortlich.
- Es gibt vier Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es ein gesondertes Aufgabenblatt, dieses soll auch zum Aufschreiben der Lösung verwendet werden. Wird weiteres Papier benötigt, so wird dies von der Saalaufsicht zur Verfügung gestellt.
- Der Kapitän der Mannschaft sollte zusammen mit der Mannschaft die Aufgaben so verteilen, dass jeder sinnvoll beteiligt ist. Die Zeit wird nicht reichen, wenn alle gemeinsam alle Aufgaben lösen.
- Es werden Lösungswege korrigiert. Endergebnisse allein zählen nicht:

  Der Weg ist das Ziel.

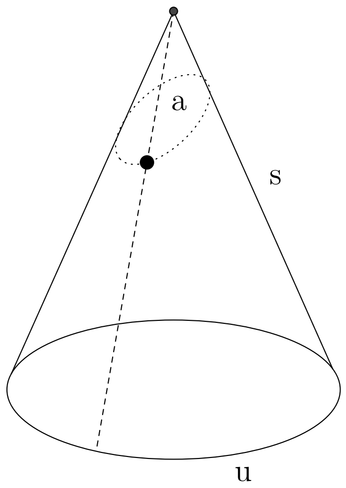
- Am Ende übergibt der Kapitän den Organisatoren zu jeder Aufgabe eine Lösung.
- Hilfsmittel:
  Erlaubt sind Papier, Stifte, Taschenrechner. Nicht erlaubt sind Geräte, die eine Kommunikation mit der Außenwelt ermöglichen. Das betrifft insbesondere Handys, Tablets und andere transportable Computer.
- Bearbeitungszeit: 70 min

Viel Erfolg!

Juristische Erklärungen
Die abgegebenen Lösungen werden von Mitarbeitern der Universität Stuttgart korrigiert. Entscheidungen über Sieger im Wettbewerb und die Rangfolge werden von der Jury des Wettbewerbs, bestehend aus Prof. TeknD Timo Weidl und Apl.Prof. Dr. Jens Wirth getroffen. **Entscheidungen der Jury sind nicht anfechtbar.**

TEAM:

Aufgabe 1 (6 Punkte)



Ein Kreiskegel habe (wie in der nebenstehenden Abbildung) einen Umfang von u am Boden und seine Mantellinie die Länge s. Im Abstand a von der Spitze befinde sich auf dem Mantel ein Punkt.

(a) Durch diesen soll eine Schnur um den Kegel herum gelegt werden. Wie lang muss diese mindestens sein, damit sie um den Kegel herumreicht?

(b) Welche Länge ergibt speziell für $s = 6$ cm, $u = \pi$ cm und für $a = 2$ cm?

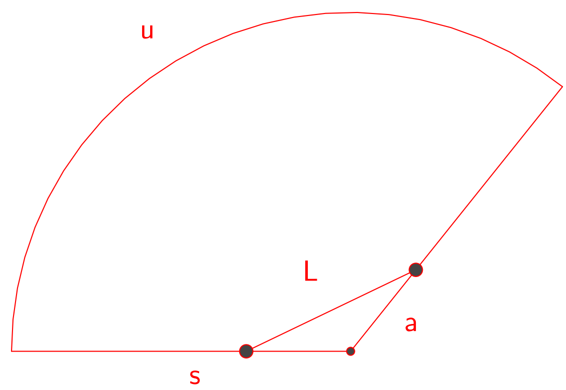
Lösung: Schneidet man den Kegelmantel an der gestrichelten Linie in der Abbildung auf, so kann er abgerollt werden. Die kürzeste Schnurlänge ist dann eine Gerade, also die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkeln der Länge a und einem Winkel von u/s an der Spitze. Also ergibt sich die Länge

$$L = 2a \sin \frac{u}{2s}.$$

Speziell für $a = 2$ cm, $s = 6$ cm und $u = \pi$ cm ergibt sich damit

$$L = 2 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \simeq 1,035276 \text{ cm},$$

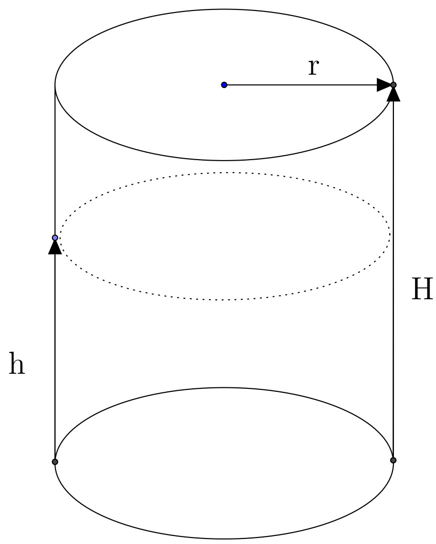
also eine Länge von 2 cm.



TEAM:

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Eine aufrecht stehende zylinderförmige Coladose habe die Höhe $H = 15\,\mathrm{cm}$ und den Radius $r = 3\,\mathrm{cm}$. Im leeren Zustand wiege die Dose $m = 15\,\mathrm{g}$. Die Dichte von Cola sei $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3} = 1\ \mathrm{g/cm^3}$.



(a) Auf welchen Höhen h_{leer} bzw h_{voll} befindet sich der Schwerpunkt der Dose, wenn diese

(i) leer bzw.

(ii) vollständig mit Cola gefüllt ist?

(b) Auf welcher Höhe befindet sich der Schwerpunkt, wenn die Dose bis zur Höhe h mit Cola gefüllt ist?

(c) Wie viel Cola (in Milliliter) muss in die Dose gefüllt werden, damit der Schwerpunkt am tiefsten liegt?

Hinweis: Die Koordinate x_s des Schwerpunktes eines aus zwei Massen zusammengesetzten Körpers erhält man aus den einzelnen Schwerpunktskoordinaten x_1, x_2 und den Massen m_1, m_2 durch $x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$.

Lösung: Sowohl die leere als auch die vollständig gefüllte Dose haben ihren Schwerpunkt genau in der Mitte, also bei $h_{\mathrm{voll}} = h_{\mathrm{leer}} = \frac{1}{2}H = 7,5\ \mathrm{cm}$. Füllt man die Dose nur bis zur Höhe h, so ergeben sich

- für die Flüssigkeit der Schwerpunkt auf der Höhe $\frac{1}{2}h$ (in $[\mathrm{cm}]$) bei einer Masse von $m = \rho\pi r^2 h = 9\pi h$ (in $[\mathrm{g}]$), und
- für die Dose ohne Inhalt mit Masse $15\ \mathrm{g}$ der Schwerpunkt auf Höhe $\frac{1}{2}H = 7,5\ \mathrm{cm}$

und damit insgesamt ein Schwerpunkt auf Höhe

$$\frac{15 \cdot 7,5 + 4,5\pi h^2}{15 + 9\pi h} = \frac{225 + 9\pi h^2}{30 + 18\pi h}.$$

Um das Minimum dieser Höhe zu bestimmen, leiten wir nach h ab. Dies liefert die Bedingung

$$0 = \frac{18\pi h}{30 + 18\pi h} - \frac{(225 + 9\pi h^2)18\pi}{(30 + 18\pi h)^2} \qquad \text{also} \qquad (30 + 18\pi h)h = 225 + 9\pi h^2$$

und damit $9\pi h^2 + 30h - 225 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$-\frac{5}{3\pi} \pm \sqrt{\frac{25}{9\pi^2} + \frac{225}{9\pi}} = -\frac{5}{3\pi} \pm \frac{5\sqrt{1 + 9\pi}}{3\pi}$$

und da die Höhe positiv sein sollte, muss somit also Höhe $\frac{5(\sqrt{9\pi+1}-1)}{3\pi} \simeq 2,34\ \mathrm{cm}$. Das entspricht einem Volumen von $66,2\ \mathrm{ml}$.

TEAM:

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zwei Drohnen F und G verfolgen die durch zwei Funktionen $\vec{f}$ bzw. $\vec{g}$ gegebenen, geradlinigen Flugbahnen. Sie befinden sich zur Zeit $t_0 = 0$ in den Punkten

$$\vec{f}(0) = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}(0) = \begin{pmatrix} 20 \\ -50 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Die Einheiten sind in Meter angegeben. Drohne F wurde der Flugrichtungsvektor

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

einprogrammiert, Drohne G hingegen soll sich nach $t = 15$ s im Punkt $P = (5, 10, 10)$ befinden.

(a) Bestimmen Sie für $t \geq 0$ die Flugbahnen $\vec{f}(t)$ und $\vec{g}(t)$ der beiden Drohnen.

(b) Zeigen Sie, dass beide Flugbahnen sich schneiden, die Drohnen jedoch nicht kollidieren.

(c) Halten die beiden Drohnen einen Mindestabstand von $d = 75$ m ein?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 20 \\ -50 \\ -20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Entweder sieht man direkt, dass

$$\vec{f}(t_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{g}(t_2)$$

mit $t_1 = 10 \neq 15 = t_2$ ist oder man löst ein lineares Gleichungssystem.

(c) Wir betrachten die quadrierte Abstandsfunktion der beiden Drohnen

$$\begin{aligned} 75^2 = 5625 \leq |\vec{f}(t) - \vec{g}(t)|^2 &= \left| \begin{pmatrix} -15 - 20 \\ 0 + 50 \\ 20 + 20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 1 - 4 \\ -1 - 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-35 + 3t)^2 + (50 - 3t)^2 + (40 - 3t)^2 \\ &= 27t^2 - 750t + 5325 \end{aligned}$$

Die Aussage

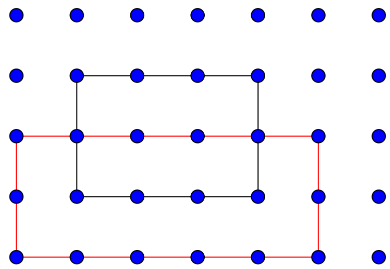
$$27t^2 - 750t - 300 \geq 0$$

ist (zum Beispiel für $t = 0$) nicht erfüllt. Der Mindestabstand wird also nicht eingehalten.

TEAM:

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei ein rechtwinkliges Raster aus Gitterpunkten mit jeweils n Punkten auf m Zeilen.



(a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Rechtecke (positiver Fläche), deren Eckpunkte auf den Gitterpunkten liegen, und deren Kanten parallel zu den Rasterlinien verlaufen.

(b) Welche Anzahl ergibt sich speziell für 5 Punkte in 7 Zeilen?

Lösung: Die Koordinaten gegenüberliegender Ecken eines Rechtecks haben die Form (i, j) und (k, l). Um ein Rechteck zu finden, sind also zwei Zahlen i, k aus $\{1, 2, \dots, n\}$ und zwei Zahlen j, l aus $\{1, 2, \dots, m\}$ auszuwählen. Das liefert

$$\binom{n}{2}\binom{m}{2} = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$$

Möglichkeiten. Speziell für $m = 5$ und $n = 7$ ergibt sich also die Anzahl von

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6}{4} = 210$$

möglichen Rechtecken.