

Universität Stuttgart

TEAM:

KAPITÄN:

Schülerwettbewerb Mathe und Physik 2018

- Jede Mannschaft bestimmt einen Kapitän, dieser ist für die Kommunikation zwischen Mannschaft und Organisatoren, die Abgabe der Lösungen und die Übergabe der Auswertungen an seine Mannschaft direkt vor der Siegerehrung verantwortlich.
- Es gibt drei Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es ein gesondertes Aufgabenblatt, dieses soll auch zum Aufschreiben der Lösung verwendet werden. Wird weiteres Papier benötigt, so wird dieses von der Saalaufsicht zur Verfügung gestellt.
- Der Kapitän der Mannschaft sollte zusammen mit der Mannschaft die Aufgaben so verteilen, dass jeder sinnvoll beteiligt ist. Die Zeit wird nicht reichen, wenn alle gemeinsam alle Aufgaben lösen.
- Es werden Lösungswege korrigiert. Endergebnisse allein zählen nicht:

Der Weg ist das Ziel.

- Nach der Bearbeitungszeit übergibt der Kapitän der Saalaufsicht zu jeder Aufgabe genau eine Lösung.
- Hilfsmittel:
Erlaubt sind Papier, Stifte, Taschenrechner. Nicht erlaubt sind Geräte, die eine Kommunikation mit der Außenwelt ermöglichen. Das betrifft insbesondere Handys, Tablets und andere transportable Computer.
Eine Formelsammlung wird gestellt.
- Bearbeitungszeit: 90 min

Viel Erfolg!

Juristische Erklärungen

Die abgegebenen Lösungen werden von Mitarbeitern der Universität Stuttgart korrigiert. Entscheidungen über Sieger im Wettbewerb und die Rangfolge werden von der Jury des Wettbewerbs, bestehend aus Prof. Dr. R. Nawrodt, Prof. TeknD T. Weidl und Apl. Prof. Dr. J. Wirth getroffen. **Entscheidungen der Jury sind nicht anfechtbar.**

TEAM:

Aufgabe 1 (8 Punkte)

In einer Urne befinden sich $2k$ Kugeln, $k \geq 2$, von denen genau eine rot und die restlichen schwarz gefärbt sind. In einem Spiel ziehen zwei Spieler A und B abwechselnd jeweils eine Kugel (ohne diese zurückzulegen und ohne in die Urne schauen zu können). Gewonnen hat, wer die rote Kugel zieht.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit¹ dafür, dass der zweite Spieler direkt mit seinem ersten Zug gewinnt?
- (b) Ist das Spiel fair oder hat derjenige Spieler, der die erste Kugel zieht, einen Vorteil?

Da das Spiel zugegebenermaßen langweilig ist, soll es aufgewertet und interessanter gestaltet werden. Dazu *ersetzen wir zwei weitere der schwarzen durch rote Kugeln* und ändern die Regeln dahingehend, dass derjenige Spieler gewinnt, der seine zweite rote Kugel zieht. Sobald einer der Spieler zwei rote Kugeln hat, endet das Spiel.

- (c) Ist das Spiel immer noch fair?
- (d) Sei nun $k = 5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem geänderten Spiel der Verlierer eine der roten Kugeln gezogen hat? Hängt diese Wahrscheinlichkeit davon ab, ob der Verlierer den ersten Zug hatte oder nicht?

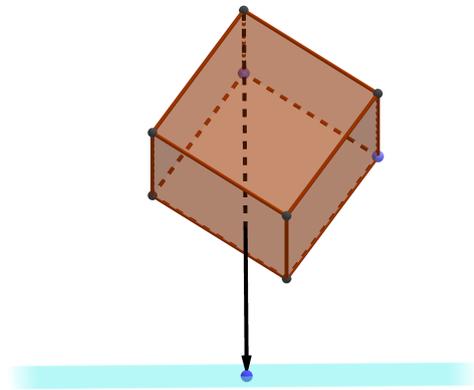
Lösung:

¹Bei gleichverteilten Ereignissen, ist die Wahrscheinlichkeit die Zahl der günstigen Ereignisse dividiert durch die Zahl der möglichen Ereignisse.

TEAM:

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Wir betrachten den Schatten eines Würfels der Kantenlänge 1, der durch die im Zenit stehende Sonne auf eine horizontale Fläche geworfen wird. Je nach Orientierung des Würfels können dabei unterschiedliche Figuren auftreten.



- (a) Welche Figuren können dabei als Schatten auftreten? Eine Begründung ist nicht verlangt, falsche Antworten geben Abzug.
- (b) Für welche Ausrichtung des Würfels besitzt die Projektion den größten Flächeninhalt? Bestimme die Fläche!

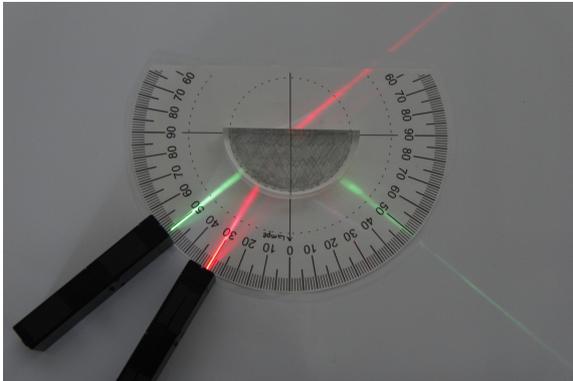
Wir führen Koordinaten ein und nutzen die Standardkoordinaten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, ..., $(1, 1, 1)$ für die Würfecken und projizieren aus Richtung (a, b, c) mit $a, b, c > 0$ auf die auf der Projektionsrichtung senkrecht stehende Ebene.

- (c) Welchen Flächeninhalt hat die Projektion einer Seitenfläche des Würfels?
(Hinweis: Die Orthogonalprojektion eines ebenen Flächenstücks hat den Inhalt $A \cos \theta$, wobei A der Inhalt des Flächenstücks und θ der Anstellwinkel der Fläche ist.)
- (d) Beweise, dass es sich bei dem Resultat aus (b) wirklich um die größtmögliche Fläche handelt.

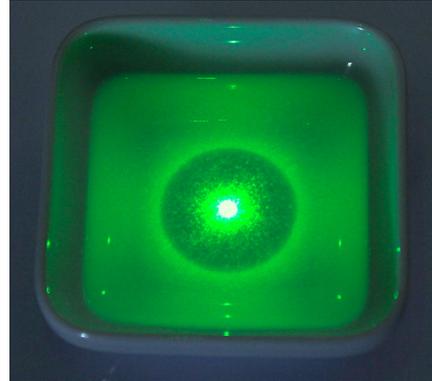
Lösung:

TEAM:

Aufgabe 3 (8 Punkte)



(a) Beim Übergang von Licht von Glas zu Luft treten unterschiedliche Effekte auf, je nachdem, welchen Einfallswinkel man benutzt. Wir haben hier zur Hilfe zwei unterschiedliche Lichtstrahlen (rot und grün) benutzt, um Dir einen Tipp zu geben, welchen Effekt Du zum Lösen der weiteren Aufgaben benötigst. Die Farbe des Lichts ist für den Effekt nicht entscheidend.



(b) Leuchtender Ring auf dem Boden einer gefüllten kleinen Schale. Der senkrecht einfallende Laserstrahl wird am Boden der Schale gestreut, d.h. er wird in alle möglichen Richtungen zurückgeworfen. Wir betrachten für die Aufgabe nur den deutlich leuchtenden Ring, der sich an die dunkle Zone vom Zentrum aus gesehen außerhalb anschließt.

Abbildung 1

- (a) Beim Übergang von Licht aus einem Medium in ein anderes treten verschiedene optische Effekte auf. Betrachte dazu Abbildung 1a und beschreibe zwei Effekte kurz.

Ein flaches Schälchen wird mit Wasser befüllt. Leuchtet man jetzt senkrecht mit einem Laserpointer von oben in die Schale, so ergibt sich ein leuchtender Ring auf dem Boden (siehe Abbildung 1b). Der Ring hat auf der inneren Seite eine scharfe Berandung. An der Außenseite nimmt die Helligkeit kontinuierlich ab.

- (b) Erläutere, warum man in der Mitte einen dunklen, kreisrunden Bereich findet, der von einem leuchtenden Ring umgeben ist! Fertige hierzu eine geeignete Skizze an, die den Strahlengang verdeutlicht!
- (c) Der Ring hat einen Durchmesser von 50 mm. Die Flüssigkeitsschicht hat eine Höhe von 11 mm. Berechne aus diesen Daten die Brechzahl der Flüssigkeit!

Lösung: