Universität Stuttgart

TEAM:
KAPITÄN:

Schülerwettbewerb Mathe und Physik 2018

Lösungen

- Jede Mannschaft bestimmt einen Kapitän, dieser ist für die Kommunikation zwischen Mannschaft und Organisatoren, die Abgabe der Lösungen und die Übergabe der Auswertungen an seine Mannschaft direkt vor der Siegerehrung verantwortlich.
- Es gibt drei Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es ein gesondertes Aufgabenblatt, dieses soll auch zum Aufschreiben der Lösung verwendet werden. Wird weiteres Papier benötigt, so wird dieses von der Saalaufsicht zur Verfügung gestellt.
- Der Kapitän der Mannschaft sollte zusammen mit der Mannschaft die Aufgaben so verteilen, dass jeder sinnvoll beteiligt ist. Die Zeit wird nicht reichen, wenn alle gemeinsam alle Aufgaben lösen.
- Es werden Lösungswege korrigiert. Endergebnisse allein zählen nicht:

  Der Weg ist das Ziel.

- Nach der Bearbeitungszeit übergibt der Kapitän der Saalaufsicht zu jeder Aufgabe genau eine Lösung.
- Hilfsmittel:
  Erlaubt sind Papier, Stifte, Taschenrechner. Nicht erlaubt sind Geräte, die eine Kommunikation mit der Außenwelt ermöglichen. Das betrifft insbesondere Handys, Tablets und andere transportable Computer.

  Eine Formelsammlung wird gestellt.

- Bearbeitungszeit: 90 min

Viel Erfolg!

Juristische Erklärungen
Die abgegebenen Lösungen werden von Mitarbeitern der Universität Stuttgart korrigiert. Entscheidungen über Sieger im Wettbewerb und die Rangfolge werden von der Jury des Wettbewerbs, bestehend aus Prof. Dr. R. Nawrodt, Prof. TeknD T. Weidl und Apl. Prof. Dr. J. Wirth getroffen. **Entscheidungen der Jury sind nicht anfechtbar.**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

In einer Urne befinden sich $2k$ Kugeln, $k \geq 2$, von denen genau eine rot und die restlichen schwarz gefärbt sind. In einem Spiel ziehen zwei Spieler A und B abwechselnd jeweils eine Kugel (ohne diese zurückzulegen und ohne in die Urne schauen zu können). Gewonnen hat, wer die rote Kugel zieht.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit[1] dafür, dass der zweite Spieler direkt mit seinem ersten Zug gewinnt?

(b) Ist das Spiel fair oder hat derjenige Spieler, der die erste Kugel zieht, einen Vorteil?

Da das Spiel zugegebenermaßen langweilig ist, soll es aufgewertet und interessanter gestaltet werden. Dazu *ersetzen wir zwei weitere der schwarzen durch rote Kugeln* und ändern die Regeln dahingehend, dass derjenige Spieler gewinnt, der seine zweite rote Kugel zieht. Sobald einer der Spieler zwei rote Kugeln hat, endet das Spiel.

(c) Ist das Spiel immer noch fair?

(d) Sei nun $k = 5$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem geänderten Spiel der Verlierer eine der roten Kugeln gezogen hat? Hängt diese Wahrscheinlichkeit davon ab, ob der Verlierer den ersten Zug hatte oder nicht?

Lösung:

(a) Die Kugeln in der Urne sind zufällig verteilt, es genügt also die möglichen und die günstigen Fälle der Kugelanordnungen zu zählen. Wir stellen uns die Kugeln in der Reihenfolge ihrer Ziehung sortiert vor. Günstig ist der Fall mit der einen roten Kugel auf der zweiten Position, möglich sind $2k$ Positionen. Also ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von $1/(2k)$.

(b) Das Spiel ist fair. Sei Spieler A der Spieler der zuerst zieht. Dann gewinnt A, falls die rote Kugel auf einer ungeraden Position ist, und B, falls die rote Kugel auf einer geraden Position ist. Da es aber genau k gerade und k ungerade Positionen für die rote Kugel gibt, hat jeder der beiden Spieler eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $k/(2k) = 1/2$.

(c) Wir stellen uns das Ganze wieder wie in den beiden vorherigen Teilen vor und betrachten die Positionen der roten Kugeln. Spieler A zieht die ungeraden Positionen, Spieler B die geraden. Damit A gewinnt, müssen mindestens zwei rote Kugeln auf ungeraden Positionen sein. Günstig sind also

$$\binom{k}{2}\binom{k}{1} + \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)}{2}k + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{2(k-1)(2k^2-k)}{6}$$

der

$$\binom{2k}{3} = \frac{2k(2k-1)(2k-2)}{6} = \frac{4(k-1)(2k^2-k)}{6}$$

Möglichkeiten, das Spiel ist also fair. Beide Spieler haben dieselbe Gewinnchance.

[1] Bei gleichverteilten Ereignissen, ist die Wahrscheinlichkeit die Zahl der günstigen Ereignisse dividiert durch die Zahl der möglichen Ereignisse.

Variante ohne Binomialkoeffizienten: Tauscht man jede Kugel auf ungerader Position mit der nachfolgenden Kugel auf gerader Position, so wird aus jeder Gewinnsituation für A eine Gewinnsituation für B und aus jeder Gewinnsituation für B eine Gewinnsituation für A. Also stimmt die Anzahl der für A günstigen Fälle mit der Anzahl der für B günstigen Fälle überein und die Gewinnwahrscheinlichkeit ist für beide gleich $1/2$.

(d) Wir nehmen zuerst an, dass A gewinnt. Damit der Verlierer eine rote Kugel gezogen hat, muss die Position dieser roten Kugel vor der zweiten roten des Spielers A sein. Sei die ℓ-te von A gezogene Kugel seine zweite rote. Dann gibt es $\ell - 1$ günstige Positionen für die seine erste rote und ebenso $\ell - 1$ günstige Positionen für die rote Kugel des Verlierers. Damit ergeben sich (speziell für $k = 5$)

$$1 + \cdots + (\ell - 1)^2 + \cdots + (k-1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

günstige von

$$\binom{2k}{3} = \frac{4(k-1)(2k^2-k)}{6} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 45}{6} = 2 \cdot 4 \cdot 15 = 120$$

Möglichkeiten. Also hat der Verlierer B mit einer Wahrscheinlichkeit von $30/120 = 1/4$ eine rote Kugel gezogen.

Falls B der Gewinner ist, so kann A auch im letzten Zug eine rote Kugel ziehen. Das ändert die günstigen Fälle zu

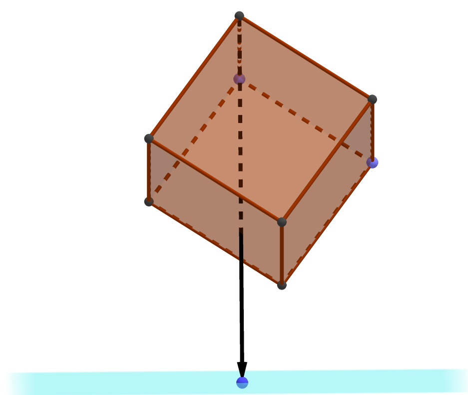
$$2 + \cdots + (\ell - 1)\ell + \cdots + (k-1)k = 2 + 6 + 12 + 20 = 40$$

In diesem Fall hat der Verlierer A mit einer Wahrscheinlichkeit von $40/120 = 1/3$ eine rote Kugel gezogen.

Zusammen ergeben sich $30 + 40 = 70$ günstige von $120 + 120 = 240$ möglichen Fällen und damit eine Wahrscheinlichkeit von $70/240 = 7/24$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Wir betrachten den Schatten eines Würfels der Kantenlänge 1, der durch die im Zenit stehende Sonne auf eine horizontale Fläche geworfen wird. Je nach Orientierung des Würfels können dabei unterschiedliche Figuren auftreten.



(a) Welche Figuren können dabei als Schatten auftreten? Eine Begründung ist nicht verlangt, falsche Antworten geben Abzug.

(b) Für welche Ausrichtung des Würfels besitzt die Projektion den größten Flächeninhalt? Bestimme die Fläche!

Wir führen Koordinaten ein und nutzen die Standardkoordinaten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, ..., $(1,1,1)$ für die Würfelecken und projizieren aus Richtung (a,b,c) mit $a,b,c > 0$ auf die auf der Projektionsrichtung senkrecht stehende Ebene.

(c) Welchen Flächeninhalt hat die Projektion einer Seitenfläche des Würfels? (Hinweis: Die Orthogonalprojektion eines ebenen Flächenstücks hat den Inhalt $A\cos\theta$, wobei A der Inhalt des Flächenstücks und θ der Anstellwinkel der Fläche ist.)

(d) Beweise, dass es sich bei dem Resultat aus **(b)** wirklich um die größtmögliche Fläche handelt.

Lösung:

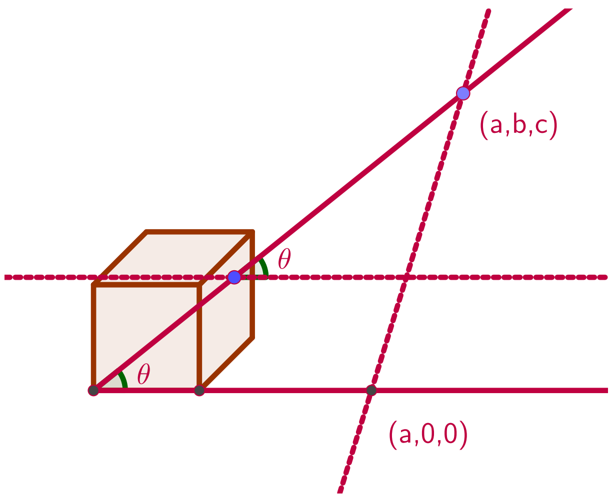
(a) Auftreten können als Projektionen ein Quadrat, diverse Rechtecke und ebenso Sechsecke.

(b) Das maximale Rechteck entsteht, wenn die Projektionsrichtung mit einer der Flächendiagonalen übereinstimmt. Ist die Kantenlänge des Würfels 1, so ist die Länge einer Flächendiagonalen $\sqrt{2}$ und dies entspricht auch der Fläche.

Allerdings werden Sechsecke größer. Stimmt die Projektionsrichtung mit einer Raumdiagonalen überein, so entsteht ein regelmäßiges Sechseck. Die Seitenlänge des Sechsecks entspricht dabei gerade der Höhe eines Dreiecks mit den Seitenlängen 1, $\sqrt{2}$ (der Flächendiagonale) und $\sqrt{3}$ (der Raumdiagonale). Diese Höhe ist aufgrund der Flächenformeln $\sqrt{2} = h\sqrt{3}$ durch $h = \sqrt{2}/\sqrt{3}$ gegeben. Das Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge h und damit der Höhe $h\sqrt{3}/2$, jedes davon hat also die Fläche $\sqrt{3}/6$. Das Sechseck hat damit die Fläche $\sqrt{3}$.

(c) Da die Seitenfläche Inhalt 1 haben, ergibt sich für diese drei Teile dabei als Flächeninhalt

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$



(d) Als Gesamtfläche der Projektion ergibt sich also

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Um nun zu zeigen, dass die in (b) berechnete Fläche maximal ist, ist damit die Ungleichung

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leq 3$$

für beliebige nichtnegative Zahlen $a, b, c \geq 0$ zu beweisen. Diese ist nach Multiplikation mit der Wurzel und Quadrieren äquivalent zu

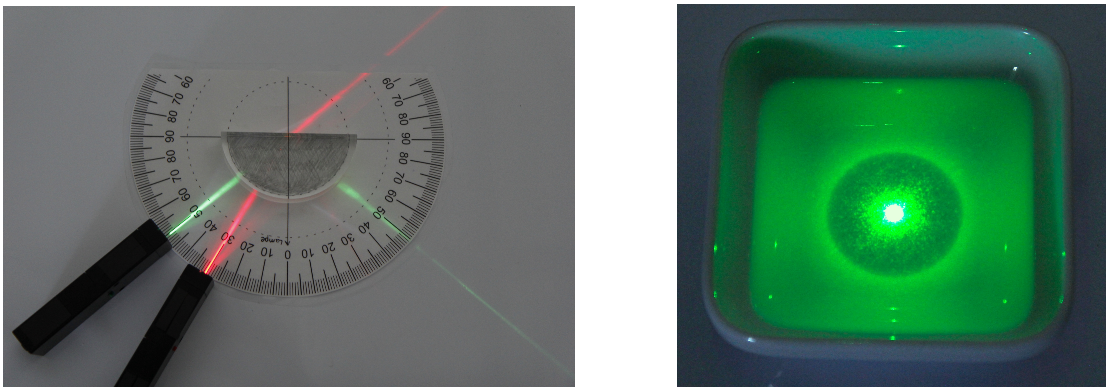
$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2),$$

beziehungsweise

$$0 \leq 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Letzteres ist offensichtlich wahr.

Aufgabe 3 (8 Punkte)



(a) Beim Übergang von Licht von Glas zu Luft treten unterschiedliche Effekte auf, je nachdem, welchen Einfallswinkel man benutzt. Wir haben hier zur Hilfe zwei unterschiedliche Lichtstrahlen (rot und grün) benutzt, um Dir einen Tipp zu geben, welchen Effekt Du zum Lösen der weiteren Aufgaben benötigst. Die Farbe des Lichts ist für den Effekt nicht entscheidend.

(b) Leuchtender Ring auf dem Boden einer gefüllten kleinen Schale. Der senkrecht einfallende Laserstrahl wird am Boden der Schale gestreut, d.h. er wird in alle möglichen Richtungen zurückgeworfen. Wir betrachten für die Aufgabe nur den deutlich leuchtenden Ring, der sich an die dunkle Zone vom Zentrum aus gesehen außerhalb anschließt.

Abbildung 1

(a) Beim Übergang von Licht aus einem Medium in ein anderes treten verschiedene optische Effekte auf. Betrachte dazu Abbildung 1a und beschreibe zwei Effekte kurz.

Ein flaches Schälchen wird mit Wasser befüllt. Leuchtet man jetzt senkrecht mit einem Laserpointer von oben in die Schale, so ergibt sich ein leuchtender Ring auf dem Boden (siehe Abbildung 1b). Der Ring hat auf der inneren Seite eine scharfe Berandung. An der Außenseite nimmt die Helligkeit kontinuierlich ab.

(b) Erläutere, warum man in der Mitte einen dunklen, kreisrunden Bereich findet, der von einem leuchtenden Ring umgeben ist! Fertige hierzu eine geeignete Skizze an, die den Strahlengang verdeutlicht!

(c) Der Ring hat einen Durchmesser von 50 mm. Die Flüssigkeitsschicht hat eine Höhe von 11 mm. Berechne aus diesen Daten die Brechzahl der Flüssigkeit!

Lösung:

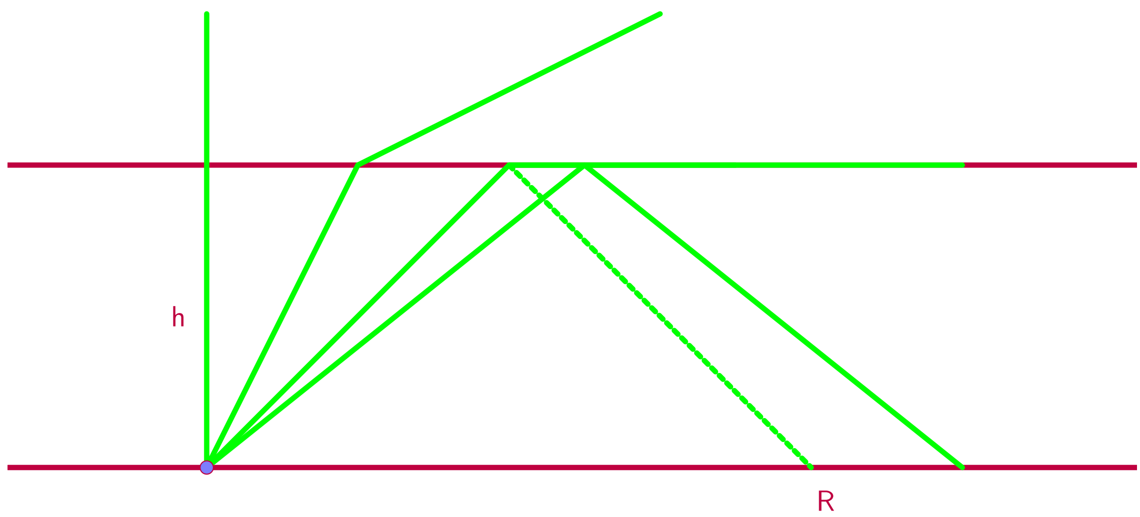
(a) Bei den beiden Effekten handelt es sich um Reflexion und Brechung. Bei der Reflexion wird der reflektierte Strahl so zurückgeleitet, dass der Winkel zur Normalenrichtung von einfallendem und auslaufendem Strahl übereinstimmen. Bei der Brechung unterscheiden sich die Winkel zwischen ein- und auslaufendem Strahl nach Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2,$$

n_i die Brechzahl des Mediums i.

Reflexion tritt auf, wenn der Winkel θ_1 so groß ist, dass $\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1$ gilt und damit mit dem Brechnungsgesetz kein (positiver reeller) Ausfallwinkel θ_2 bestimmt werden kann.

(b) Da der Strahl am Boden gestreut wird, gibt es auslaufende Strahlen in alle Richtungen. Die mit kleinem Winkel zur Normalen werden an der Oberfläche gebrochen, die mit großem Winkel zur Normalen werden an der Oberfläche reflektiert. Die reflektierten erreichen den Boden und beleuchten diesen außerhalb einer Kreislinie. Dies ist die sichtbare helle Kreislinie mit Radius R.



(c) Wir betrachten zuerst den Grenzwinkel der Totalreflexion θ_R. Ist n die Brechzahl der Flüssigkeit, so muss

$$n \sin \theta_R = 1$$

gelten. Weiter ist θ_R durch den Radius R bestimmt, es gilt

$$\tan \theta_R = \frac{R}{2h}.$$

Damit muss also

$$\theta_R = \arctan \frac{R}{2h} = \arctan \frac{25}{22} \approx 48,652^\circ$$

und nach der ersten Gleichung somit

$$n = \frac{1}{\sin \theta_R} = \frac{1}{\sin \arctan(25/22)} \approx 1,332$$

gelten.