Universität Stuttgart

TEAM:
KAPITÄN:

Schülerwettbewerb Mathe und Physik 2019

Lösungen

- Jede Mannschaft bestimmt einen Kapitän, dieser ist für die Kommunikation zwischen Mannschaft und Organisatoren, die Abgabe der Lösungen und die Übergabe der Auswertungen an seine Mannschaft direkt vor der Siegerehrung verantwortlich.
- Es gibt drei Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es ein gesondertes Aufgabenblatt, dieses soll auch zum Aufschreiben der Lösung verwendet werden. Wird weiteres Papier benötigt, so wird dieses von der Saalaufsicht zur Verfügung gestellt.
- Der Kapitän der Mannschaft sollte zusammen mit der Mannschaft die Aufgaben so verteilen, dass jeder sinnvoll beteiligt ist. Die Zeit wird nicht reichen, wenn alle gemeinsam alle Aufgaben lösen.
- Es werden Lösungswege korrigiert. Endergebnisse allein zählen nicht:

  Der Weg ist das Ziel.

- Nach der Bearbeitungszeit übergibt der Kapitän der Saalaufsicht zu jeder Aufgabe genau eine Lösung.
- Hilfsmittel:
  Erlaubt sind Papier, Stifte (außer rot), Taschenrechner. Nicht erlaubt sind Geräte, die eine Kommunikation mit der Außenwelt ermöglichen. Das betrifft insbesondere Handys, Tablets und andere transportable Computer.

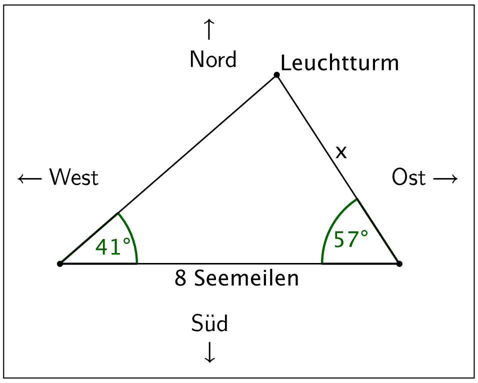
  Eine Formelsammlung wird gestellt.
- Bearbeitungszeit: 90 min

Viel Erfolg!

Juristische Erklärungen
Die abgegebenen Lösungen werden von Mitarbeitern der Universität Stuttgart korrigiert. Entscheidungen über Sieger im Wettbewerb und die Rangfolge werden von der Jury des Wettbewerbs, bestehend aus Prof. Dr. R. Nawrodt und apl. Prof. Dr. J. Wirth getroffen.
Entscheidungen der Jury sind nicht anfechtbar.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

(a) Ein Schiff fährt genau auf ostwärts gerichtetem Kurs. Ein Leuchtturm wird zunächst unter einem Winkel von 41° zur Ostrichtung gesehen. Nachdem das Schiff 8 Seemeilen zurückgelegt hat, muss man zum Leuchtturm zurück sehen. Nun beträgt der Winkel zur Westrichtung 57°. Berechne, welche Entfernung x das Schiff vom Leuchtturm hat (in Seemeilen).



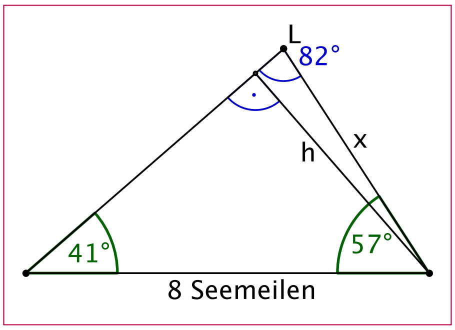
(b) In welchem Abstand ist das Schiff am Leuchtturm vorbeigefahren?

(c) Unter welchem Winkel ist der Leuchtturm zu sehen, wenn das Schiff ohne den Kurs zu wechseln weitere 8 Seemeilen zurückgelegt hat?

Lösung:

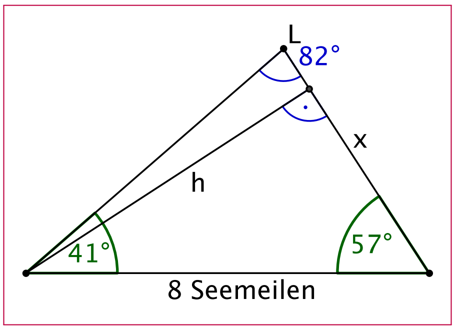
(a) Möglichkeit 1: Verwende die Höhe durch die rechte untere Ecke. Dann gilt $h = 8\sin(41°)$ Seemeilen und $\frac{h}{x} = \sin(82°)$, also

$$x = \frac{1}{\sin(82°)}h = 8\frac{\sin(41°)}{\sin(82°)} \approx 5,3 \text{ Seemeilen.}$$



Möglichkeit 2: Verwende die Höhe durch die linke untere Ecke. Dann gilt $h = 8\sin(57°)$ Seemeilen und $y = \dfrac{h}{\sin(82°)}$ und

$$\begin{aligned} x &= 8\cos(57°) + \frac{h}{\sin(82°)} \cdot \cos(82°) \\ &= 8\left(\cos(57°) + \frac{\sin(57°)\cos(82°)}{\sin(82°)}\right) \\ &\approx 5,3 \text{ Seemeilen.} \end{aligned}$$



(b) Der Abstand entspricht der Höhe H im Dreieck zur Grundseite. Für diesen gilt

$$\frac{H}{x} = \sin(57°)$$

und damit $H = x\sin(57°) \approx 4,45$ Seemeilen.

(c) Wir bezeichnen den Winkel (zur Westrichtung) mit α. Dann gilt

$$\tan\alpha = \frac{x\sin(57°)}{8 + x\cos(57°)}$$

und damit

$$\alpha = \arctan\frac{x\sin(57°)}{8 + x\cos(57°)} \approx 22,21°.$$

Der Leuchtturm erscheint also unter einem Winkel von etwa $22,21°$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Wir betrachten die folgende Schaltung und nehmen an, dass es sich bei allen verwendeten Bauelementen, Quellen und Messgeräten um ideale Komponenten handelt.

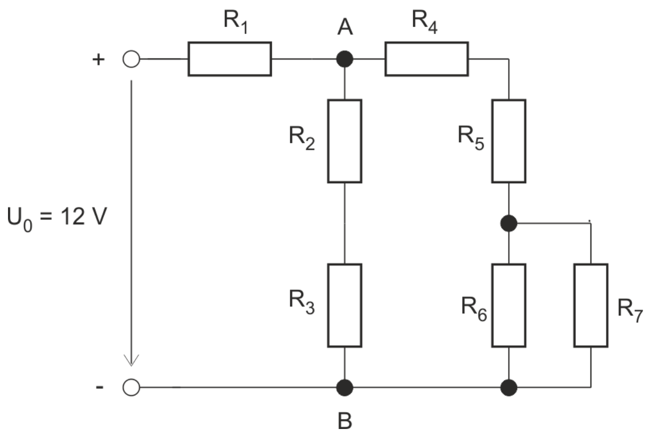


Abbildung 1: R_1=1,5 kΩ, R_2=300 Ω, R_3=1,2 kΩ, R_4=400 Ω, R_5=800 Ω, R_6=500 Ω.

Legt man an die Schaltung 12 V wie angegeben an, so stellt sich zwischen den Punkten A und B eine Potentialdifferenz von 4 V ein.

(a) Welchen elektrischen Widerstand besitzt R_7?

(b) Mit einem Multimeter wird die elektrische Spannung an R_7 bestimmt. Zeichne die entsprechende Schaltung und berechne die gemessene elektrische Spannung!

(c) Die Schaltung wird jetzt nicht verändert. Das Multimeter wird in den Strommessbereich umgeschaltet. Berechne die zu erwartende Stromstärke, die das Messgerät anzeigen wird! Begründe Deinen Ansatz!

Lösung:

(a) Da Widerstände in Reihenschaltung proportional zur Potentialdifferenz sind, beträgt der Ersatzwiderstand zwischen A und B die Hälfte von R_1 und damit genau 750 Ω. Wir drücken diesen durch die restlichen Widerstände aus. Damit gilt

$$\frac{1}{750} = \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5 + \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7}} = \frac{1}{1500} + \frac{1}{1200 + \frac{500 R_7}{500 + R_7}}.$$

Dies liefert eine Gleichung für R_7. Es gilt

$$1500 = 1200 + \frac{500 R_7}{500 + R_7}$$

und damit

$$300(500 + R_7) = 500 R_7$$

also

$$150000 = 200 R_7.$$

Also gilt $R_7 = 750\,\Omega$.

(b) Der Ersatzwiderstand der Parallelschaltung von R_6 und R_7 beträgt

$$\frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7} = \frac{500 \cdot 750}{500 + 750} = 300,$$

also 300 Ω. Der der Reihenschaltung von R_4 und R_5 beträft 1200 Ω und damit das Vierfache. Also ergibt sich als Potentialdifferenz über R_7 (und ebenso R_6) ein Wert von 0.8 V.

[Skizze]

(c) Ein ideales Strommessgerät hat Widerstand 0 Ω und überbrückt damit die Widerstände R_6 und R_7. Damit ergibt sich als Ersatzwiderstand der gesamten Schaltung

$$1500 + \frac{1500 \cdot 1200}{1500 + 1200} = \frac{6500}{3}$$

und es fließt durch R_1 ein Strom von $12\,\mathrm{V}/2166{,}7\,\Omega = 5{,}54\,\mathrm{mA}$. Dieser teilt sich auf die Widerstände $R_2 + R_3$ sowie die dazu parallelen Widerstände $R_4 + R_5$ und das Strommessgerät auf. Mit der Spannung U zwischen A und B entspricht dieser Strom also

$$U/1500 + U/1200 = U \frac{1500 + 1200}{1500 \cdot 1200}$$

und damit ergibt sich

$$U = 5.54\,\mathrm{mA}/666{,}7\,\Omega = 3{,}69\,\mathrm{V}.$$

Damit ergibt sich als Stromstärke über das Strommessgerät

$$I = U/1200\,\Omega = 3{,}08\,\mathrm{mA}.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Löse diese Aufgaben ohne Taschenrechner:

(a) Beweise, dass

$$\sqrt{6}-\sqrt{5} > \sqrt{8}-\sqrt{7}$$

gilt.

(b) Handelt es sich bei

$$z = \sqrt{48+24\sqrt{3}} + \sqrt{48-24\sqrt{3}}$$

um eine rationale oder eine irrationale Zahl? Begründen Deine Antwort!

Lösung:

(a) **Möglichkeit 1:** Da beide Seiten nichtnegativ sind, ist die Ungleichung äquivalent zu

$$11-2\sqrt{30} = (\sqrt{6}-\sqrt{5})^2 > (\sqrt{8}-\sqrt{7})^2 = 15-2\sqrt{56}$$

und damit zu

$$\sqrt{30} < \sqrt{56}-2 = 2\left(\sqrt{14}-1\right).$$

Erneutes Quadrieren liefert dazu äquivalent

$$30 < 4(\sqrt{14}-1)^2 = 4\left(15-2\sqrt{14}\right)$$

und damit

$$8\sqrt{14} < 30.$$

Das wiederum ist äquivalent zu $4\sqrt{14} < 15$, also zu

$$224 = 14 \cdot 16 < 15^2 = 225.$$

Also ist die Aussage gezeigt.

Möglichkeit 2: Wir formen die Ungleichung äquivalent um zu

$$\sqrt{6}+\sqrt{7} > \sqrt{5}+\sqrt{8}.$$

Da beide Seiten nichtnegativ sind, gilt dies genau dann, wenn

$$13+2\sqrt{42} = \left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^2 > \left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)^2 = 13+2\sqrt{40}.$$

Letzteres ist wiederum äquivalent zu $42 > 40$ und damit wahr.

(b) Da $\sqrt{3} < 2$ ist sind die Ausdrücke unter den Wurzeln jeweils positiv und die Zahl ist wohldefiniert und reell. Wir schreiben sie um zu

$$z = \sqrt{48+24\sqrt{3}} + \sqrt{48-24\sqrt{3}} = \sqrt{24}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$$

und betrachten die Faktoren einzeln. Der erste ist durch $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ gegeben, der zweite erfüllt

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 2+\sqrt{3}+2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} + 2-\sqrt{3} = 4+2\sqrt{4-3} = 6$$

und somit ebenso gleich $\sqrt{6}$. Also folgt

$$z = 2\sqrt{6}\sqrt{6} = 12$$

und z ist ganz und damit insbesondere rational.