Universität Stuttgart

TEAM:

Schülerwettbewerb Mathe und Physik 2022

Lösungen

- Es gibt drei Aufgaben.
- Die Teilnehmer eines Teams sollten untereinander die Aufgaben so verteilen, dass jeder sinnvoll beteiligt ist. Optimal ist alle Aufgaben gemeinsam zu lösen.
- Es werden Lösungswege korrigiert. Endergebnisse allein zählen nicht:

  Der Weg ist das Ziel.

  Lösungen können in Deutsch oder in Englisch eingereicht werden.
- Es wird pro Team genau eine Lösung eingereicht. Ein Nachreichen einzelner Teillösungen ist nicht erlaubt, die zuerst eingegangene Lösung zählt als Lösung für alle Aufgaben.
- Hilfsmittel:
  Erlaubt ist alles; wir können ohnehin nicht nachprüfen, was Ihr zu Hause zum Lösen verwendet. Allerdings sind die Aufgaben so gestellt, dass Hilfsmittel nur von geringer Bedeutung sind. Gesucht sind Lösungswege, Beschreibungen von Experimenten und Auswertungen derselben. Rechnungen, die nicht komplett aufgeschrieben werden, sind zu kommentieren. Insbesondere ist bei der Benutzung von Software anzugeben, welche Version genutzt worden ist.
  Eine physikalische Formelsammlung wird gestellt. Jedoch sind alle Quellen für über die Formelsammlung hinausgehende Formeln anzugeben.
- Bearbeitungszeit:
  maximal **zwei Wochen**, jedoch sollten die Aufgaben auch deutlich schneller gelöst werden können.

Viel Erfolg!

Juristische Erklärungen
Die abgegebenen Lösungen werden von Mitarbeitern der Universität Stuttgart korrigiert. Entscheidungen über Sieger im Wettbewerb und die Rangfolge werden von der Jury des Wettbewerbs, bestehend aus Prof. Dr. R. Nawrodt und Prof. Dr. J. Wirth getroffen.
Entscheidungen der Jury sind nicht anfechtbar.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

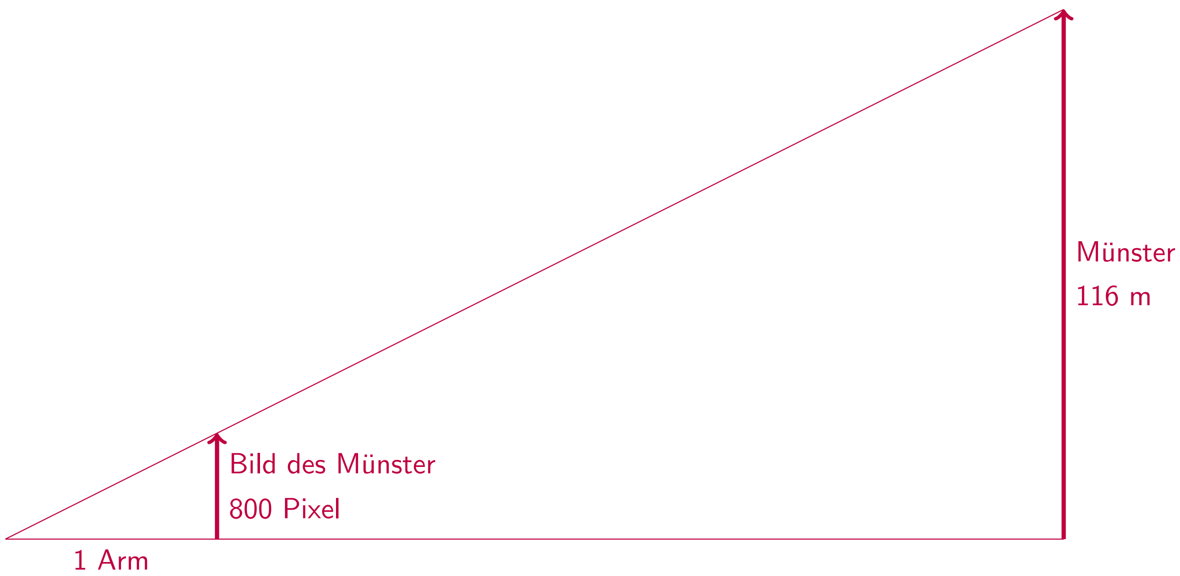
Auf einem Selfie vor dem Freiburger Münster beträgt der Pupillenabstand einer Schülerin 200 Pixel, das Münster selbst erscheint 800 Pixel hoch. Sie weiß aufgrund einer kurz zuvor vom Optiker vorgenommenen Messung, dass ihre Augen in der Realität einen Abstand von genau 62 mm besitzen. Das Münster ist 116 m hoch. Wieviele Armlängen war der Münsterturm bei der Aufnahme entfernt?

[Quelle: Cosh-Gruppe Physik, `http://www.cosh-physik.de`, Aufgabe O3]

Lösung: In der Bildebene kann man die Einheiten Meter und Pixel ineinander umrechnen. Nach Voraussetzung gilt damit 62 mm $= 200$ Pixel. Damit ergibt sich die Lösung nach Anwendung des Strahlensatzes. Wie in untenstehender Skizze ablesbar, gilt

$$\frac{1 \text{ Armlänge}}{x \text{ Armlängen}} = \frac{800 \text{ Pixel}}{116 \text{ Meter}} \cdot \frac{0,062 \text{ Meter}}{200 \text{ Pixel}} = 467,7419$$

und der Abstand zum Münsterturm beträgt 467,75 Armlängen.



Punktverteilung: Die Nutzung des Strahlensatzes und eine richtige Skizze geben 2 Punkte. Es gibt 2 Punkte für die Umrechnung Pixel in Meter in der Bildebene, 2 weitere für die Bestimmung des Abstandes zum Turm. Die verbleibenden 2 Punkte gibt es für eine saubere Darstellung der Lösung.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Bestimme mit haushaltsüblichen Mitteln die Brechzahl von Wasser für sichtbares Licht. Gehe dazu wie folgt vor:

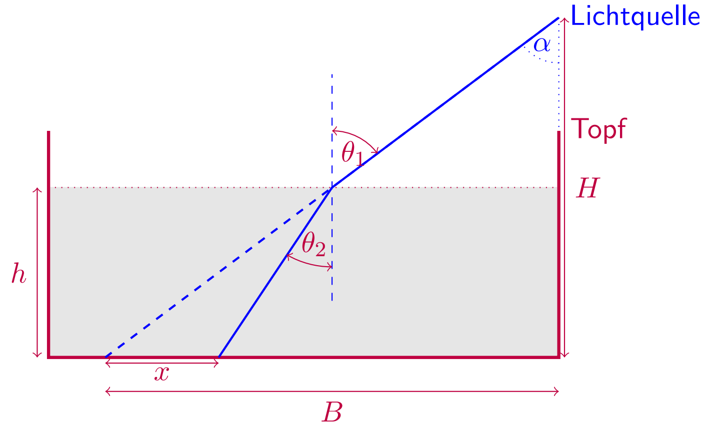
(a) Entwickle einen entsprechenden experimentellen Aufbau, der Dir die Bestimmung der Brechzahl ermöglicht. Dokumentiere den Aufbau und Dein Vorgehen in einem kurzen Video.

(b) Führe das Experiment aus und bestimme die Brechzahl von Wasser für sichtbares Licht.

(c) Schätze die Genauigkeit Deiner Messung ab. Wie genau ist das Ergebnis?

Lösung: Es gibt verschiedene Möglichkeiten ein Experiment mit einfachen Hilfsmitteln aufzubauen. Statt einer Musterlösung skizzieren wir eine der Möglichkeiten:

Vergleich der Lichtwege in einem Behälter mit und ohne Wasser. Dazu kann man einen hinreichend großen Topf und als Lichtquelle zum Beispiel einen Laserpointer verwenden.



Fixiert man den Laserpointer derart, dass sich Position der Lichquelle und der Winkel α während des Versuchs nicht ändern, so kann man für verschiedene Wasserhöhen h den Abstand x auf einem am Boden des Gefäßes liegenden Lineal ablesen. Aus den Größen h und x kann der Brechungsindex berechnet werden.

Dabei gilt für den Einfallswinkel $\theta_1 = \alpha$ und für den Winkel des gebrochenen Strahls zum Lot $\tan\theta_2 = \frac{b-x}{h}$ mit $b = h\tan\theta_1$, also $\tan\theta_2 = \tan\theta_1 - \frac{x}{h}$. Mit dem Brechungsindex $n_1 = 1.0003$ für Luft und dem gesuchten Brechungsindex n_2 für Wasser gilt mit dem Brechungsgesetz

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

und damit

$$n_2 = n_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n_1 \frac{\sin\alpha}{\sin(\arctan(\tan\alpha - \frac{x}{h}))} = n_1 \sin\alpha \frac{\sqrt{1 + (\tan\alpha - \frac{x}{h})^2}}{\tan\alpha - \frac{x}{h}}.$$

Es ist wichtig, dabei die Messfehler abzuschätzen und deren Fortpflanzung beim Rechnen im Blick zu haben. Bei festem Winkel α sollte das Verhältnis $\frac{x}{h}$ unabhängig von der Wasserhöhe sein. Eine Mittelung über mehrere Höhen verringert dabei sicher den Messfehler. Ebenso sollte man für mehrere Winkel α Messungen durchführen um die Ungenauigkeit durch den Winkel zu reduzieren.

Statt des Winkels α ist es besser, die im Bild eingezeichneten Strecken B und H zu messen. Dies führt auf

$$n_2 = n_1 \frac{B}{\sqrt{B^2+H^2}} \frac{\sqrt{1+(\frac{B}{H}-\frac{x}{h})^2}}{\frac{B}{H}-\frac{x}{h}}.$$

Punktverteilung: 2 Punkte für einen angemessenen Versuchsaufbau und dessen Beschreibung. Weiter gibt es 2 Punkte für die Durchführung des Experiments und dessen Dokumentation. Die Abschätzung der Genauigkeit gibt 2 weitere Punkte, die verbleibenden 2 Punkte werden vergeben wir auf das Video zur Dokumentation und Erklärung des Versuches.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei ein Stück Papier in Form eines gleichseitigen Dreiecks. Ist es möglich das Dreieck mit geraden Schnitten so in Stücke zu zerschneiden, dass sich aus diesen Stücken ein Quadrat zusammen puzzeln lässt? Die einzelnen Puzzlestücke dürfen dabei auch umgedreht (also die Unterseite oben verwendet) werden.

(a) Findet eine Möglichkeit dies zu tun! Gebt dazu bitte genau an, entlang welcher Linien ihr schneidet und wie wieder zusammengesetzt werden soll.

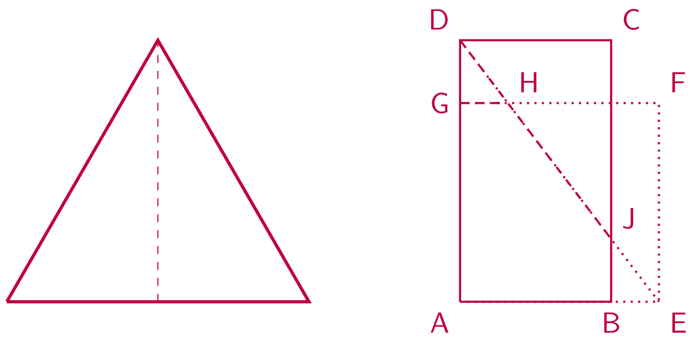
(b) Begründet, dass dies wirklich eine Lösung obigen Problems liefert. Überzeugt die Jury von eurer Lösung!

(c) Das Team mit der geringsten Anzahl an Puzzlestücken (und bei gleicher Anzahl an Puzzlestücken geringster Gesamtlänge der Schnitte) bekommt zwei weitere Punkte.

Lösung: Ohne zu zeigen, welche Lösung wirklich optimal[1] ist, können wir nur Lösungen mit möglichst kleiner Teilezahl angeben. Wir geben zwei Lösungsvarianten an, eine mit fünf und eine mit vier Puzzleteilen. Die Lösung mit fünf Teilen ist damit sicher nicht optimal, jedoch ist die Begründung für diese Lösung einfacher. Wir nehmen an, dass das Ausgangsdreieck die Seitenlänge 2 und damit die Höhe $\sqrt{3}$ besitzt. Das flächengleiche Quadrat hat dann die Seitenlänge $\sqrt[4]{3}$.

Variante 1: Wir schneiden zuerst das Dreieck entlang einer seiner Höhen. Durch Umklappen kann man beide Teildreiecke zu einem Rechteck zusammensetzen. Wir erklären also zuerst, wie man ein Rechteck zu einem Quadrat umpuzzelt. Dazu zeichnen wir zu dem Rechteck $ABCD$ mit Seiten 1 und $\sqrt{3}$ (der Höhe des Dreiecks) ein flächengleiches Quadrat $AEFG$, so dass die Seiten AE und AG auf den Rechteckseiten AB und AD liegen. Die Verbindungslinie DG liefert die eine Schnittlinie des Quadrats, die zweite Linie GH liegt wiederum auf einer der Quadratseiten.

[1] Optimal ist eine Lösung mit vier Teilen. Dazu kann man zeigen, dass alle Möglichkeiten ein Dreieck in drei Teile mit geraden Schnitten zu zerlegen nicht die gewünschten Winkel / Längen liefern können. Allerdings müsste man auch zu zeigen, dass es keine bessere Lösung mit vier Teilen, also kürzerer Schnittlänge gibt.

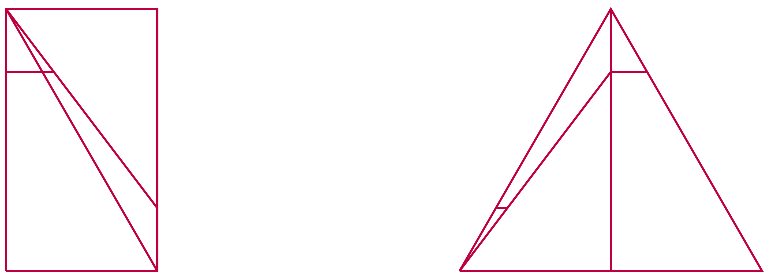


Die Strecke $\overline{CJ}$ ist nach Konstruktion gleich lang wie Strecke FE (also $\sqrt[4]{3}$). Das sieht man wie folgt. Der Strahlensatz im Dreieck AED und BEJ liefert

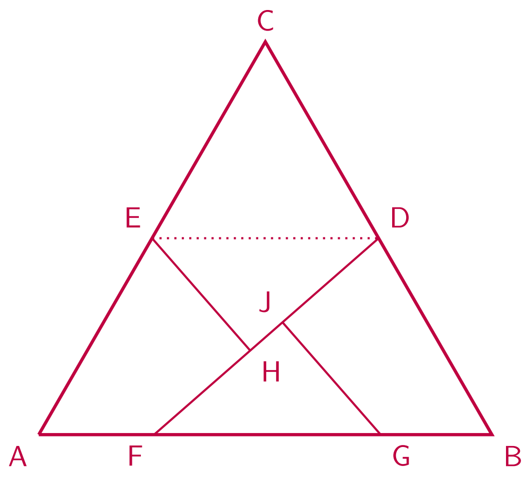
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\overline{BJ}}{\overline{BE}} = \frac{\sqrt{3} - \overline{CJ}}{\sqrt[4]{3} - 1}$$

und damit $\overline{CJ} = \sqrt[4]{3}$. Damit ist Dreieck DJC kongruent zu Dreieck HEF (nach www und mit Gleichheit einer Seite). Ebenso ist Dreieck BEJ kongruent zu Dreieck GHD, sowohl $\overline{BJ}$ als auch $\overline{GD}$ haben die Länge $\sqrt{3} - \sqrt[4]{3}$.

Zusammengefasst ergibt sich also folgendes Schnittmuster des Ausgangsdreiecks:

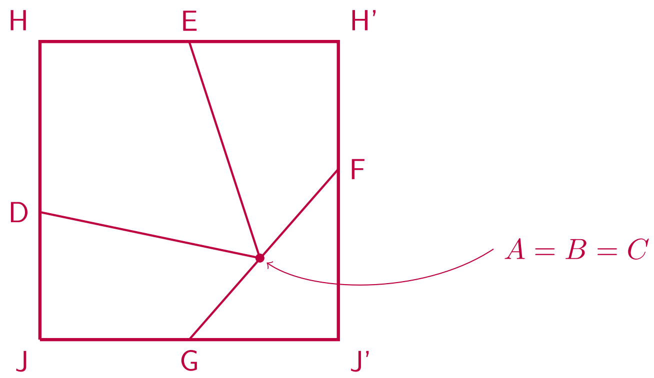


Variante 2: Die Schnittlinien sind wie folgt:



Dabei sind die Punkte D und E die Seitenmitten der Seiten BC und CA. Weiter ist die Strecke $\overline{DF}$ gerade $\sqrt[4]{3}$ (also die Quadratseite) lang. Das bestimmt den Punkt F. Die nächste Schnittlinie ergibt sich als Lot von E auf die Strecke DF, der Lotfußpunkt ist dabei H. Die verbleibende Schnittlinie JG steht ebenso senkrecht auf DF und ist dabei so zu wählen, dass $\overline{EH} + \overline{JG} = \overline{DF} = \sqrt[4]{3}$ gilt.

Wir zeigen, dass man damit ein Quadrat zusammensetzen kann. Die Idee besteht darin, die Punkte D, E, F als Scharniere zu verstehen und die Figur umzuklappen. Das Ergebnis sieht danach dann so aus (wobei wir mehrfach auftretenden Bildpunkte mit $'$ markiert haben):



Da $\angle BDJ + \angle CDH$ zusammen zwei Rechte ergeben, liegen nach dem Umklappen J, D und H auf einer Geraden. Selbiges gilt für H, E und H' und H', F und J'. Weiter treffen sich dabei B, A und C in einem Punkt, da D und E Seitenmitten waren. Um zu zeigen, dass sich am Ende ein Quadrat ergibt, benötigen wir im Ausgangsdreieck $\overline{AF} + \overline{GB} = \overline{FG}$. Dies rechnen wir noch nach: Im Dreieck FBD zeichnen wir die Höhe DK ein. Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke DEH mit Dreieck FKD aufgrund gleicher Winkel ähnlich

$$\overline{EH} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{3} = \overline{GJ}.$$

Damit sind die Dreiecke DEH und FGJ kongruent. Damit folgt aber auch $\overline{AF} + \overline{GB} = 2 - 1 = 1 = \overline{FG}$.

Punktverteilung: Wir vergeben 3 Punkte für die genaue Beschreibung der Schnittlinien und der zu verwendenden Umsortierung. Während die Schnitte genau anzugeben bzw. zu konstruieren sind, genügt für die Umsortierung selbst auch eine Demonstration als Bild oder Video. Wir vergeben 3 weitere Punkte für die Begründung, dass beim Umsortieren auch wirklich genau ein Quadrat entsteht (die Teile also genau aneinander passen). Die verbleibenden 2 Punkte bekommt das Team / bekommen die Teams mit der Lösung mit der geringsten Teileanzahl.